现代物理基础丛书 30

经典宇宙和量子宇宙

王永久 著

科学出版社
www.sciencep.com

(O-3789.0101)



销售分类建议：理论物理

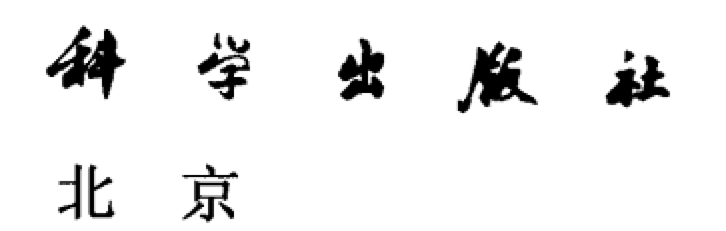
定 价：89.00 元



现代物理基础丛书　30

经典宇宙和量子宇宙

王永久　著



北　京

内 容 简 介

本书系统地阐述了宇宙学近年来的新进展，包括作者和合作者们以及国内外同行学者们的近期研究成果. 全书包括引力理论基础、广义相对论宇宙学、宇宙的暴胀、量子宇宙学等4篇；宇宙动力学方程、弗里德曼宇宙模型、其他宇宙模型、奇点定理、暗物质和暗能量、宇宙的暴胀、dilaton宇宙解、宇宙暴胀的机制、哈特-霍金宇宙波函数、宇宙结构的起源、虫洞波谱、Vilenkin的量子宇宙学、诱导引力及其量子宇宙学模型、圈量子宇宙学的解析表述、宇宙创生的量子特性、额外维度和膜宇宙理论等21章114节.

本书可供理论物理、天体物理和应用数学专业的硕士生、博士生和研究人员阅读，也可供高年级本科学生和自考者参考.

图书在版编目(CIP)数据

经典宇宙和量子宇宙/王永久著. —北京：科学出版社，2010
(现代物理基础丛书；30)
ISBN 978-7-03-026555-5
I. 经… II. 王… III. 宇宙学 IV. P159
中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第016274号

责任编辑：张 静 杨 然／责任校对：李奕萱
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年2月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年2月第一次印刷 印张：30 1/2
印数：1—2 500 字数：595 000

定价：89.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)



前　　言

宇宙是物理学研究的最大对象. 宇宙学是建立在引力理论基础上的. 1687 年, 牛顿创立了第一个引力理论, 这是人类对自然界普遍存在的力 —— 引力的认识的第一次升华. 牛顿引力理论首次揭开了行星运动之谜, 奇迹般地预言了两个行星 (海王星和冥王星) 的存在并被天文观测所证实, 从此牛顿的名字誉满全球. 直至 20 世纪初, 这一理论是人们普遍接受的、唯一正确的引力理论. 随着人类智慧的发展, 牛顿引力理论的困难日益引起学者们的重视: 它无法解释天文学家观测到的事实 —— 水星近点的移动, 无法解释物体的引力质量等于惯性质量 ……

牛顿引力理论无法研究宇宙. 用牛顿引力理论研究宇宙会导致著名的 Newman 疑难.

1916 年, 爱因斯坦以全新的观点创立了新的引力理论 —— 广义相对论, 这是人类对引力认识的第二次升华. 爱因斯坦引力理论将时–空几何和引力场统为一体, 以其简洁的逻辑和优美的结构令学者们叹服甚至陶醉. 它圆满地解决了牛顿引力理论的困难, 并将牛顿引力理论纳入自己的特殊情况 (弱场近似).

爱因斯坦引力理论 (广义相对论) 的建立, 第一次为宇宙学提供了动力学基础, 使宇宙学成为一门定量的科学. 爱因斯坦的引力场方程可以用于宇宙, 作为宇宙演化的动力学方程. 因此, 应用广义相对论, 可以根据宇宙的现在研究宇宙的过去和未来.

本书的内容包括广义相对论宇宙学 (即标准宇宙学或大爆炸宇宙学)、宇宙的暴胀和量子宇宙学三个部分. 在内容安排上侧重于宇宙的暴胀和量子宇宙学, 特别是该领域近年来的新进展, 包括宇宙暴胀的机制、暴胀和膨胀的自然衔接、dilaton 宇宙解、膜宇宙以及近两年用圈量子宇宙学方法给出的宇宙创生过程的量子特性.

本书第一篇是爱因斯坦引力理论基础, 为后几篇的叙述做必要的准备. 第二篇阐述广义相对论大爆炸宇宙学. 大爆炸宇宙学成功地解释了自 $t = 10^{-2}$s(轻核形成) 至 $t = 10^{10}$y (现在) 宇宙演化阶段的观测事实. 其中包括元素的起源 (氦丰度测量)、星系光谱的宇宙学红移、3K 微波背景辐射、星系计数、宇宙大尺度的均匀各向同性等. 宇宙背景辐射的观测两次获得诺贝尔物理学奖 (1978 年, 2006 年), 就是因为它们支持了大爆炸宇宙模型. 由于大爆炸宇宙模型普通为人们所接受, 故称之为标准宇宙模型. 然而标准宇宙模型也有它的困难, 就是在 $t < 10^{-10}$s 这一极早期演化阶段中的 4 个问题: 奇点问题、视界问题, 平直性问题和磁单极问题. 书中第三篇比较详细地阐述了 20 世纪 80 年代诞生的暴胀宇宙学理论. 这一理论解决

了上述 4 个问题中的后三个. 它已经把我们带到了 $t = 10^{-36}$s 的宇宙极早期, 已接近宇宙的开端. 我们可以把加入了暴胀理论的大爆炸宇宙模型称为新的标准宇宙模型.

近年来, 人们把超弦理论用于研究暴胀宇宙, 发现弦宇宙方程的解可以分成两个对偶分支. 一个分支描述膨胀的 Friedmann-Robertson-Walker 宇宙, 另一个分支描述暴胀宇宙. 只要 dilaton 势取通常的确定值, 其中任何一个分支便可以平稳地演化到另一个分支. 即宇宙可以由弗里德曼膨胀自然过渡到暴胀, 再由暴胀自然过渡到弗里德曼膨胀, 自然地解决了宇宙暴胀的 "从容退出" 问题. dilation 宇宙解对于揭示宇宙暴胀的机制是至关重要的. 书中比较详细地论述了弦宇宙方程和 dilation 宇宙解.

标准宇宙模型 4 个困难问题还剩下一个, 即宇宙的初始奇点 (宇宙的创生) 问题, 这是本书第四篇 (量子宇宙学) 的内容.

广义相对论宇宙学是建立在爱因斯坦引力理论基础上的. 严格地说, 量子宇宙学应该建立在量子引力理论的基础上. 然而, 至今尚未建立一个令人满意的量子引力理论. 尽管如此, 人们仍然可以根据已经了解到的量子引力的某些特征, 去寻找各种途径, 尝试解决量子宇宙学的主要问题 —— 宇宙的创生问题. 20 世纪 80 年代初, 哈特 (Hartle)、霍金 (Hawking)、Vilenkin 等提出, 用宇宙波函数来描述宇宙的量子状态, 宇宙动力学方程即惠勒–德维特方程. 这样, 只要确定宇宙的边界条件, 便可定量地研究宇宙的创生问题了.

对于宇宙波函数的选择和宇宙边界条件的确定, 哈特–霍金和 Vilenkin 分别提出了不同的方案, 这两个方案构成了目前量子宇宙学的两个学派. 本书第四篇比较详细地阐述了哈特–霍金的量子宇宙学理论和韦连金的量子宇宙学理论, 并对这两个理论进行了比较.

2006 年, 美国物理学家 Ashtekar, Pawlowski 和 Singh 用圈量子宇宙学理论给出的量子方程做了系统的解析推导和数值计算, 发现在大爆炸之前可以存在一个与我们的观测宇宙相似的收缩的经典宇宙. 演化一直进入普朗克区域内. 在这两个经典宇宙中时空都是连续的, 广义相对论精确成立. 在收缩的经典宇宙和膨胀的经典宇宙之间的量子通道只持续非常短的一段 "时间", 其间广义相对论失效. 这个 APS 模型中不存在大爆炸奇点, 但与已有的反弹宇宙模型不同, 它是在圈量子宇宙学框架内经过严格的解析推导和数值计算得到的. 唯一遗憾的是假定宇宙是均匀各向同性的. 书中第 9 章比较详细地论述了宇宙学这一最新进展.

由现代高能物理实验和理论分析, 可以确定超对称破缺的能标为 TeV 量级, 再根据量子场论的计算便可确定宇宙常数的量级. 由此确定的宇宙常数值比观测值大 60 个数量级. 进而用广义相对论得到宇宙半径只有毫米量级! 这一尖锐的矛盾曾经令学者们震惊, 而又无可奈何. 超弦理论和膜宇宙理论为这一矛盾的解决提供

了可能.

1996 年, Witten 提出了一种十一维时空中的新的超弦理论, 它以十一维超引力理论为低能有效理论, 统一了人们熟悉的 5 种不同类型的超弦理论. 这一理论被称为 M 理论. 超弦理论中的规范场只存在于十维时空中, 即只存在于十一维时空中的一个超曲面上. 这就是膜宇宙论思想在超弦理论中的体现. 而我们的观测宇宙是四维的, 即只存在于十维时空的一个四维超曲面上, 如同一张膜. 我们的观测宇宙就成为了膜宇宙. 在膜宇宙理论中, 宇宙常数与可观测宇宙的半径之间没有直接关系, 宇宙常数可以如超对称破缺和量子场论给出的那么大, 而宇宙半径也可以和观测到的一样大 (即宇宙曲率很小). 在膜宇宙理论中, 把对膜宇宙 (可观测宇宙) 曲率有贡献的那部分宇宙常数称为 “有效宇宙常数”. 如果宇宙常数只对额外维度有贡献, 则 “有效宇宙常数” 为零. 这就是说, 宇宙常数可以很大, “有效宇宙常数” 可以很小. 于是上述宇宙常数问题不复存在. 书中最后一章阐述了膜宇宙理论的主要内容.

本书假定读者已具备量子场论、张量分析和微分几何等基础知识.

作者与同事和合作者荆继良教授、余洪伟教授和唐智明教授一起获得过两次国际引力研究荣誉奖 (美国)、两次中国图书奖和一次教育部科技进步奖; 在几种相关杂志上发表过一些文章 (Phys. Rev. D42 篇, Ap.J.Lett.4 篇, Ap.J.4 篇, JCAP 3 篇, Nucl.Phys.B17 篇, JHEP 6 篇, Phys. Lett. A&B 27 篇, 《中国科学》5 篇), 加上诸多国内外同行学者的原始论文, 其中部分相关内容经补充推导和加工整理已写入书中.

作者深深感谢刘辽教授、郭汉英研究员、Kramer 教授、Will 教授、Cruz 教授、易照华教授和王绶琯院士、曲钦岳院士、杨国桢院士、周又元院士、陆埮院士, 他们曾对作者的部分论文的初稿提出过有益的意见, 对作者的科研工作给予热情的关心和支持.

作者和须重明教授、彭秋和教授、梁灿彬教授、赵峥教授、王永成教授、李新洲教授、桂元星教授、钟在哲教授、黄超光研究员、沈有根研究员、罗俊教授、李芳昱教授、李爱根教授进行过多次讨论和交流, 受益颇多, 在此一并致谢.

作者还要感谢樊军辉教授、吕君丽教授、郭鸿钧教授、黎忠恒教授、鄢德平编审以及黄亦斌、罗新炼、陈菊华、黄秀菊、陈松柏、吴普训、潘启元、张佳林、朱致英、龚添喜诸位博士, 他们对作者的科研工作和本书的出版给予了热情的帮助和支持.

王永久

2008 年 12 月于长沙岳麓山

目　　录

第二篇 广义相对论宇宙学

第三篇 宇宙的暴胀

第四篇　量子宇宙学



第一篇　引力理论基础

在人们已经知道的诸种力中, 引力是唯一不可屏蔽的长程力, 对于分布于大尺度时空中的物质和时空本身, 引力是起决定作用的力. 因此, 引力决定宇宙动力学, 从而决定宇宙的演化. 任何定量的宇宙学理论都必须以引力理论为基础, 然而牛顿引力理论不能研究宇宙, 用牛顿引力理论研究宇宙将导致著名的 Newman 疑难. 宇宙学以爱因斯坦的引力理论为基础.





第 1 章　平直时空引力理论

1.1　万有引力定律

两个质量分别为 M 和 M' 的质点相距 r 时, 其间存在一引力

$$F = K\frac{MM'}{r^2}, \tag{1.1.1}$$

式中常数 M 和 M' 是两质点的**引力质量**; K 为普适常数, 它的数值决定于单位制的选择.

牛顿的万有引力定律的建立, 使人们能够严格地导出行星轨道的所有参数, 能够轻而易举地推得开普勒三定律. 从而, 人们第一次揭开了天体运行之谜. 1846 年, 勒威耶和亚当斯根据天王星轨道的摄动, 应用牛顿的万有引力定律, 成功地预言了当时尚未发现的两颗行星 (海王星和冥王星, 冥王星稍晚一些) 的存在, 后来果然被天文观察所证实. 从此, 牛顿的平直时空引力理论得到举世公认, 牛顿的名字誉满全球. 此外, 牛顿引力定律还成功地解释了潮汐现象、地球的形状等地球物理现象. 牛顿引力理论是第一个成功的引力理论. 但是这一理论也有不可克服的困难.

首先, 由式 (1.1.1) 所确定的力是超距作用力. 根据近代的和经典的概念, 这都是不可理解的. 甚至牛顿本人也认为是无法接受的.

更重要的是, 牛顿引力理论与实验事实不相符: 牛顿引力定律 (1.1.1) 无法解释天文观测发现的水星近日点的进动这一现象.

人们曾经试图对式 (1.1.1) 进行修正. 霍耳 (Holl) 提出

$$F(r) = K\frac{MM'}{r^N}. \tag{1.1.2}$$

按照水星的实验观测资料, 欲使式 (1.1.2) 与观测结果相符合, 应有 $N \approx 2.00000016$. 可是如果 N 取这一数值, 则式 (1.1.2) 又无法与月球的运动规律相符合.

人们也曾经试图给式 (1.1.1) 附加上按 $\dfrac{1}{r^n}$ 规律变化的附加项

$$F(r) = K\frac{MM'}{r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{r^n}\right), \tag{1.1.3}$$

式中 $n = 3, 4$ 或 5. 按行星轨道近日点的进动, α 应为正数. 不难看到, 无论 α 取什么值都无法符合水星和其他行星以及月球的运动规律.

牛顿引力理论不能研究宇宙. 用牛顿引力理论研究宇宙将导致著名的 Newman 疑难, 其内容如下:

根据宇宙学原理, 宇宙是各向同性的, 宇宙物质是均匀分布的. 由高斯定理和式 (1.1.1) 容易得到

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{g} \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \oint \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{1.1.4}$$

式中 $\boldsymbol{g}$ 为引力场强. 和静电学的情况类似, 注意 $\rho = \text{const}$, 得到 $|\boldsymbol{g}| \sim \rho R$. R 可取得任意大, 于是 g 值不确定. 这是不可接受的.

宇宙是无限的还将导致著名的 Olbers 佯谬. 设宇宙中任一点 O, 在以 O 点为圆心以 r 为半径的球壳内, 恒星数为 $4\pi r^2 \rho \mathrm{d}r, \rho$ 为恒星密度. 球壳内每颗恒星在 O 点产生的照度为 $\frac{K}{r^2}$, $k = \text{const}$, 于是球壳内恒星在 O 点的照度为 $4\pi\rho k\mathrm{d}r$, 宇宙中任一点 O 处的总照度为

$$\int_0^\infty 4\pi\rho k \mathrm{d}r = \infty,$$

即“天空是无限明亮的”. 此即 Olbers 佯谬.

1.2 牛顿引力势

设质点 M 为引力源, 质点 $M' = m$ 为试验质点, 则式 (1.1.1) 可写为场分布的形式 (与静电学中的情形类似)

$$\boldsymbol{F} = -m\nabla U, \tag{1.2.1}$$

$$U = -K\frac{M}{r}. \tag{1.2.2}$$

U 叫做牛顿引力势, 它满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U = 0.$$

如果产生引力场的场源物质密度为 $\rho(x, y, z)$, 则牛顿引力势 $U(x, y, z)$ 满足泊松方程

$$\nabla^2 U = 4\pi k\rho(x, y, z). \tag{1.2.3}$$

牛顿引力理论实际上是一个三维场论. 泊松方程的解给出引力势的空间分布 $U(x, y, z)$. 例如, 当观察点 (x^i) 与物质系统的距离远大于物质系统的线度时, 方程 (1.2.3) 的解可写为

$$U = -k\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3 x', \tag{1.2.4}$$

式中 $\boldsymbol{r}=\{x^i\}, \boldsymbol{r}'=\{x'^i\}$, 分别为观察点和质量元的位矢. 式 (1.2.4) 可展开为 $\frac{1}{r}$ 的幂级数

$$U=-K\left\{\frac{M}{r}+\frac{1}{6}D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots\right\}. \tag{1.2.5}$$

式中

$$M=\int\rho\mathrm{d}^3x \tag{1.2.6}$$

是系统总质量. 质量四极矩张量 D_{ij} 可表示为

$$D_{ij}=\int\rho(3x^ix^j-r^2\delta^{ij})\mathrm{d}^3x=J_{kk}\delta_{ij}-3J_{ij}, \tag{1.2.7}$$

式中

$$J_{ij}=\int\rho(r^2\delta_{ij}-x^ix^j)\mathrm{d}^3x \quad (J_{kk}=J_{11}+J_{22}+J_{33}) \tag{1.2.8}$$

是惯性矩张量. 按定义, 质量四级矩张量是零迹的, 即 $D_{kk}=D_{11}+D_{22}+D_{33}=0$.

1.3 惯性质量和引力质量

由式 (1.1.1) 定义的质量叫引力质量. 另外, 根据动力学定律

$$\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{a}, \tag{1.3.1}$$

式中的常数 M 表征物体对加速的阻碍作用, 定义为物体的**惯性质量**. 同一物体的引力质量和惯性质量分别记为 M_{g} 和 M_{I}. 如果设

$$\frac{M_{\mathrm{g}}}{M_{\mathrm{I}}}=\lambda, \tag{1.3.2}$$

则式 (1.1.1) 可写为

$$F=K\lambda^2\frac{M_{\mathrm{I}}M_{\mathrm{I}}'}{r^2}=G\frac{M_{\mathrm{I}}M_{\mathrm{I}}'}{r^2}, G\equiv K\lambda^2. \tag{1.3.3}$$

伽利略落体实验和精确度不断提高的厄特沃什 (Eötvös) 实验都证明了物体的引力质量恒等于惯性质量, 即 $\lambda\equiv 1$. 因此有

$$K\equiv G \tag{1.3.4}$$

式中 G 为牛顿引力常数.

由 $M_{\mathrm{g}}\equiv M_{\mathrm{I}}$ 可以得到试验粒子在引力场中的加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{F}}{m_{\mathrm{I}}}=-\frac{m_{\mathrm{g}}}{m_{\mathrm{I}}}\nabla U=-\nabla U. \tag{1.3.5}$$

这就是说, 加速度 $\boldsymbol{a}$ 不依赖于试验物体, 只和引力场有关. 这正是伽利略落体实验所得出的结论. 这一结果和电磁场中的情况不同. 在那里, 我们有

$$\boldsymbol{F} = -q\nabla\phi,$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$$

从而有

$$\boldsymbol{a} = -\frac{q}{m}\nabla\phi.$$

即加速度依赖于试验粒子的荷质比, 而不单纯依赖于电磁场.

为了发现物体的引力质量与惯性质量的差别, 人们不断提高实验的精度, 但所得到的都是零结果. 下表给出了一些代表性实验的结果, 最右边一纵行的精确度表示 $|m_{\rm g} - m_{\rm I}|/m_{\rm I}$.

表 1-1　区分 $m_{\rm g}$ 和 $m_{\rm I}$ 的实验结果

年份	实 验 者	精 确 度
1610	Galileo	2×10^{-3}
1680	Newton	2×10^{-3}
1827	Bessel	2×10^{-5}
1890	Eötvös	5×10^{-8}
1922	Eötvös, Pekar	3×10^{-9}
1935	Renner	2×10^{-10}
1964	Dicke, Krotkov	3×10^{-11}
1971	Braginsky, Panov	9×10^{-13}

图 1-1 是 Eötvös 实验的示意图. 在一扭秤的两端固定两个材料不同的物体, 调整两壁水平且东西取向. 实验将给出引力质量与惯性质量之比对两个物体是否相同. 如果这一比值 $m_{\rm g}/m_{\rm I}$ 对两个物体是相同的, 那么没有扭矩加在扭秤上. 如果比值 $m_{\rm g}/m_{\rm I}$ 对于两个物体不相等, 则将产生一个扭矩加在扭秤上, 从而引起它转动.

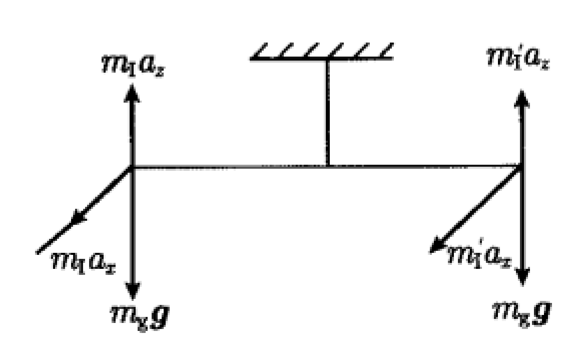


图 1-1

图中每个物体受两个力: 指向地心的引力 $m_{\rm g}\boldsymbol{g}$ 和惯性离心力 (由于地球绕轴自转产生的)$m_{\rm I}\boldsymbol{a}$. 设 z 轴沿径向, 则 $m_{\rm I}\boldsymbol{a}$ 沿 z 轴和 x 轴方向的分量分别为 $m_{\rm I}a_z$ 和 $m_{\rm I}a_x$; $m_{\rm g}\boldsymbol{g}$ 沿 z 轴的负方向. 我们来计算作用在扭秤上的扭矩的分量. 沿 z 轴的分量为

$$M_z = m_{\rm I}a_x l - m'_{\rm I}a_x l', \tag{1.3.6}$$

沿 x 轴的分量是

$$M_x = (m_{\rm g}g - m_{\rm I}a_z)l - (m'_{\rm g}g - m'_{\rm I}a_z)l'. \tag{1.3.7}$$

由于秤处于平衡状态, 所以 $M_x = 0$. 由式 (1.3.6) 和 (1.3.7) 可得 (消去 l')

$$M_z = m_{\rm I} a_x l \frac{m'_{\rm g}/m'_{\rm I} - m_{\rm g}/m_{\rm I}}{m'_{\rm g}/m'_{\rm I} - a_z/g}. \tag{1.3.8}$$

设 $\frac{m_{\rm g}}{m_{\rm I}} = \lambda$. 由式 (1.3.8) 可见, 如果 $\lambda' \neq \lambda$, 则 $M_z \neq 0$. 结果秤转动 (平衡后使其东西指向). 这时扭矩 M_z 与悬挂的细金属丝产生的反向扭转平衡. 将整个装置绕竖直轴转动 180°, 这等效于交换了两个物体的质量 m 和 m', 引起 M_z 变号. 因此转动 180° 以后 (如果 $M_z \neq 0$), 臂将偏离东西方向. 但实验结果是不存在这种偏离, 即 $M_z = 0, \lambda' = \lambda$.

Dicke 的实验也是用扭秤做的, 但是与 Eötvös 实验不同. 这里的引力是太阳的引力; 惯性离心力是由地球绕太阳的运动产生的. 假定实验是在地球北极做的, 则惯性离心力是水平的. 他所得到的扭矩沿竖直方向的分量为

$$M_z = \{(m_{\rm g} g - m_{\rm I} a) l - (m'_{\rm g} g - m'_{\rm I} a) j'\} \sin\phi, \tag{1.3.9}$$

式中 g 是由于太阳的引力场产生的加速度, a 是地球上的局部的惯性离心力产生的加速度, ϕ 是秤臂与指向太阳方向的夹角. 由于扭秤固定在实验室中, 所以随着角 ϕ 增加 360°, 扭矩以 24h 为周期振动. 用这方法可以消除任何非周期效应. 实际上 Dicke 的装置比 Eötvös 的复杂得多, 并且扭秤用三个物体, 而不是两个.

综上所述, 牛顿引力理论取得了辉煌成就, 但也始终存在着不可克服的困难. 它无法解释水星近日点的进动. 在牛顿力学理论 (和狭义相对论) 中, 物体的引力质量恒等于惯性质量这一事实也只能被视为一种“偶合”.

爱因斯坦从这“偶合”的事件中发现了新理论的线索, 突破了牛顿引力理论的框架, 从而建立了全新的引力理论. 在爱因斯坦的引力理论 (广义相对论) 的基础上, 建立了现代宇宙学.

第 2 章　爱因斯坦引力理论基础

2.1　等 效 原 理

考虑一局部空间中的一个假想实验. 如图 2-1 所示, 一封闭实验室中的观察者发现, 其中一物体对弹簧秤的拉力为 mg, 方向向下. 他无法区分所在的参考系属于下列两种情况中的哪一种: ① 系统正在太空中, 远离任何一个引力体; 实验室以加速度 g 向上运动. 此时这一局部空间中存在一惯性力场, 物体 m 受一虚构的力 (惯性力)mg 的作用. ② 系统停留在一永久引力体的表面, 其局部永久引力场的场强为 g. 此时物体受到真实力 (引力)mg 的作用.

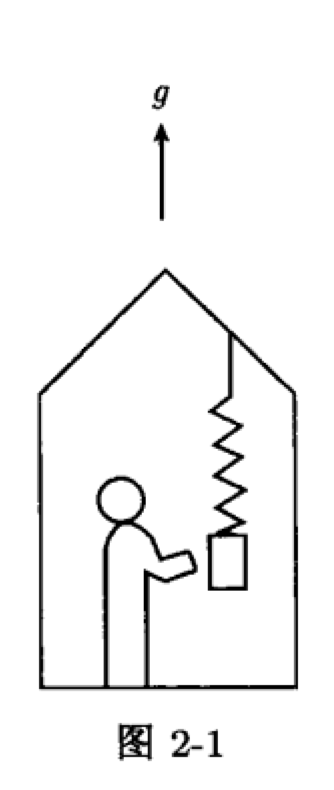


图 2-1

这一假想实验的结果表明, 在局部空间区域, 不可能将虚构的惯性力场和真实的引力场区分开来; 二者的动力学效应之间存在着局部等效性.

对于大的空间区域, 一般不存在上述等效性. 例如, 地球的引力场, 在充分大的空间区域中其力线是辐射状的, 所以不存在一个非惯性系, 其中的惯性力场能够等效于这一辐射状的引力场.

爱因斯坦把上述等效性作为新理论的第一条基本原理 ——**等效原理**, 表述为: **惯性力场和引力场的动力学效应是局部不可分辨的**.

在爱因斯坦提出等效原理之前, 人们无法处理真实力和虚构力之间的关系, 无法承认物体的引力质量恒等于惯性质量这一事实是自然的. 牛顿认为真实力和虚构力是不同的. 前者依赖于产生它的系统的物理性质, 后者则是由于过度到加速系所产生的. 惯性力 (惯性离心力、科里奥利力等) 具有特殊的性质; 它可以使物体产生加速度, 且此加速度与被加速的物体的性质无关 (由于这类力可以借助于适当的坐标变换消除, 所以称之为虚构的力). 在这种意义上, 绝对空间可以由选定的一特定参考系表征, 在这一参考系中不存在虚构的力, 只有真实的力; 物理定律具有自然的表述形式. 牛顿曾以著名的水桶实验来证明绝对空间的存在.

图 2-2 中的两幅图分别表示桶开始转动、水未被带动和稳定转动后桶突然静止的情形. 自上向下看, 第一种情况是水相对于桶逆时针转动, 此时水面是平面; 第二种情况是水相对于桶顺时针转动, 此时水面是凹面. 显然, 水的转动对液面形状的影响不能以桶作为参照物, 因为两种情况下水相对于桶都做转动. 两种情况的差

异 (液面平与凹) 必决定于第三物体 (或物体组). 牛顿认为这第三物体就是绝对空间. 当水相对于绝对静止的绝对空间做绝对运动 (转动) 时, 水面是凹面; 当水相对于绝对空间绝对静止时, 水面是平面. 马赫反对这种绝对空间的概念. 他指出, 设想桶变得很大, 大得与恒星系有相同的线度和质量, 相对转动对于水面形状不起作用, 则遥远的恒星不再能作为“第三物体”, 绝对空间在哪儿呢?

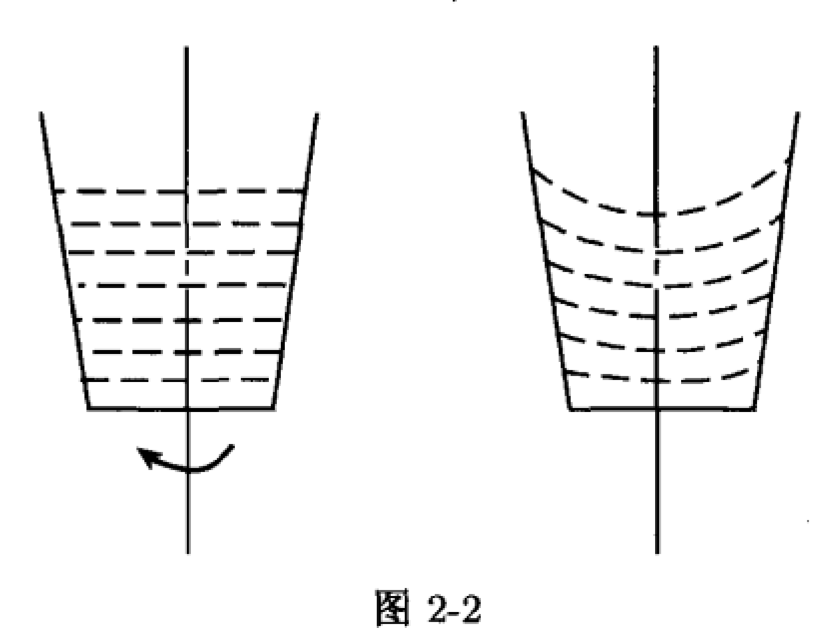


图 2-2

自上向下看: 水对桶逆时针转动时水面为平面; 水对桶顺时针转动时水面为凹面

在牛顿力学中, 动力学定律是相对于绝对参照系而建立的 (允许相差一个均匀平移, 即关于伽利略群的不变性), 遥远恒星的唯一影响是改变转动桶附近的引力势. 因此马赫认为这种效应 (在经典力学范围内) 是无法理解的.

赫兹和马赫都不同意牛顿的绝对空间的概念, 他们试图从另外的想法出发引入惯性力.

赫兹希望把一定距离上的电磁作用归结为接触作用. 对于引力, 他也想这样做. 惯性原理确定一自由质量做匀速直线运动. 有惯性力时运动的区别是由于其他质量的存在所引起的. 物体的轨迹可由高斯的最小偏离原理确定: 真实的运动以最小的可能程度偏离匀速直线运动. 因此, 惯性原理是最小偏离原理的特殊情况, 它对应于不存在力而存在隐藏质量的情况.

马赫认为, 局部空间的惯性效应 (惯性力场) 是远距离质量的存在所引起的. 如果没有远距恒星 (如在空间中只有地球), 则所有的参考系都是等效的, 并且都是惯性系.

爱因斯坦吸取了马赫的上述思想, 提出了等效原理, 并建立了新的引力场方程.

等效原理逻辑简洁地、统一地处理了惯性力场和局部引力场的联系, 自然地得出了物体的惯性质量恒等于引力质量的结论, 即自然地解释了落体实验和 Eötvös 实验的结果.

根据理论研究的需要, 有时将等效原理区分为弱等效原理和强等效原理两种. 上面所表述的 (惯性力场和引力场的动力学效应局部不可分辨) 是弱等效原理. 它

还可以这样表述：物体的引力加速度与被加速物体的成分和物质结构无关. 显然, 弱等效原理是直接为 Eötvös 实验所支持的.

将弱等效原理中的"动力学效应" 推广为 "任何物理效应", 便得到了强等效原理. 这一原理表述为：在引力场中一自由落下的 (非转动的) 实验室里, 局部物理定律具有同一数学形式, 与实验室的空间位置无关. 或者表述为：在引力场中任一时空点引入一局部惯性系, 则物理规律的数学形式是洛伦兹协变的. 强等效原理是弱等效原理的推广, 它没有直接的实验支持. 这一原理是广义相对论的基础, 它的正确性只能由它的各个推论是否与实验符合来检验.

等效原理指出, 当空间某一范围存在引力场时 (这是普遍情况), 就不能引入和采用惯性系. 因为在惯性系统中, 惯性力等于零, 而引力却不为零, 这与等效原理矛盾. 因此, 在引力场中只能引入局部惯性系.

在广义相对论中, 由于不存在相互做匀速直线运动的惯性系, 从而使加速度的概念不再像牛顿力学和狭义相对论中那样是绝对的, 而是相对的了.

下面讨论作为爱因斯坦引力理论 (广义相对论) 基础的第二个原理 —— 广义协变原理, 或称广义相对性原理.

2.2　广义协变原理

几乎在所有的物理现象中, 都有引力的参与. 这就是说, 在研究物理现象时必须考虑引力场的存在. 在 2.1 节的讨论中已经说明, 当引力场存在时, 不能引入统一的惯性系. 因此, 人们必须在非惯性系中描述物理现象. 狭义相对论只在一时空点的邻域内成立. 这样, 就应该将狭义相对性原理延拓到引力场存在的情况. 换言之, 真实的物理规律不仅在惯性系间的洛伦兹变换下是协变的 (狭义相对性原理), 而且在任意坐标变换下都应该是协变的. 这就是**广义协变原理**, 或称**广义相对性原理**.

广义协变原理可以用下列形式之一表述：

(1) 对于描述物理规律, 所有的坐标系都具有同等资格, 不存在任何一个优越的坐标系.

(2) 描述物理规律的方程中各项应是四维黎曼时空中的同阶张量.

(3) 描述物理定律的方程在所有坐标系中应具有相同的形式.

可以发现, 以上三种表述形式不是完全等价的. 但是从这些表述中不难看出, 根据广义协变原理, 在爱因斯坦引力理论 (广义相对论) 中, 坐标只是用来标记时空事件的簿记系统而已, 不含有比这更多的内容. 物理学结论和结果应不依赖于获得结果所采用的特殊坐标系. 通常, 只有坐标变换下的不变量才具有物理意义.

广义协变原理对于推导物理定律和建立场方程具有指导意义. 例如, 通常在建立场方程时, 首先选择一个由同阶张量构成的标量泛函作为作用量, 再应用变分原理获得场方程. 这一方法就是以广义协变原理为指导的. 又如, 当我们试图把物理定律从狭义相对论形式推广到广义相对论形式 (把引力场包括进去) 时, 这个原理是最有用的. 它指导我们将狭交相对论中的麦克斯韦 (Maxwell) 方程推广到广义相对论中. 在这一过程中常常以协变导数代替普通导数. 当引力被去掉时它们应回到平直时空中的原有形式.

等效原理和广义协变原理是整个广义相对论的基础. 和任何其他的物理学原理一样, 它们不可能由已知的理论、原理证明和推导出来; 在新理论建立时, 它们只能作为假定提出来. 原理的正确性只能由它的和整个新理论的各个推论是否与实验相符合来检验.

爱因斯坦引力理论逻辑十分简洁, 只需要这两个原理就够了. 由这两个原理出发, 导致了引力场的几何化, 即用黎曼几何描述引力场. 这一描述是如此成功、如此漂亮, 致使人们称这两个原理是理论物理中最大的个人成就.

2.3 广义相对论中的空间和时间

1. 非欧几里得几何的引入

早在 1913 年, 爱因斯坦就意识到引力场和惯性力场的等效性应导致空间几何性质的改变. 他假设我们生活的空间是非欧几里得的. 但当时还不知道引力定律以什么形式和黎曼空间的结构条件相联系.

新的引力理论是建立在黎曼空间概念基础上的. 在叙述新的引力定律之前, 我们希望能够阐明非欧几里得几何的空间概念是怎样引入的, 即引力场和惯性力场的等效性以及任意加速参考系的等效性是怎样导致空间的非欧几里得性质的.

爱因斯坦的广义协变原理要求引力定律的数学形式在任何参考系中都是相同的. 这样, 新的引力场方程必须是由非欧几里得空间量构成的方程. 下面我们将看到, 上述空间量就是时空的曲率张量; 同时, 引力场由各质点的世界线 (即时空中的短程线) 给出. 在这里, 动力学问题归结为运动学问题, 而运动学问题是和时空几何概念相联系的; 这个几何概念又等效于引力场的概念.

在爱因斯坦引力理论中, 引力场是几何化的. 即假定存在非欧几里得空间, 受引力场作用的质点即为此空间中的自由质点. 根据惯性定律, 这些质点的轨迹应该是欧几里得直线的推广. 在这一空间中, 两点间的最短距离是其间的短程线. 因此, 赫兹理论中的隐藏质量和马赫原理中的遥远恒星所产生的效应都表现为使时空弯曲, 从而使质点在这弯曲时空中沿短程线运动. 引力场和惯性力场的等效性奠定了

世界结构几何化的基础, 物质分布的影响不表现为力的作用, 而表现为时空的弯曲. 至于欧几里得空间, 则是没有物质的世界.

这样, 引入非欧几里得空间, 便可将相对性原理推广到加速系和由任意弯曲标架所确定的参考系. 换言之, 物理定律的形式不仅对于洛伦兹变换是协变的, 对于任意坐标变换也是协变的.

在欧几里得空间中, 可以确定任意的坐标系, 也可以引入任意的坐标变换. 但是应该指出, 对于整个空间, 两种表述是等效的. 与此相反, 加速系和惯性系的等效性只具有局部性质. 在非欧几里得空间中, 这一局部等效性导致这样的结论: **仿射流形的小区域可以用切于流形某给定点的欧几里得空间来代替**.

非欧几里得空间的引入, 准确地给出了等效原理的含义和它的适用范围.

2. *爱因斯坦转盘*

考虑两个同一平面内的同心转盘 S 和 S_0. S_0 为伽利略系 (如实验室坐标系), S 绕中心轴相对于 S_0 以恒定角速度 ω 转动. 在 S_0 系中, 空间是欧几里得的. S 系不再是惯性系, 导致洛伦兹变换的狭义相对论基本假设不再适用. 标准尺和标准钟都要受到惯性力场的影响.

设 S' 系是在所研究的时刻固连于杆 $\mathrm{d}l$ 的惯性系. 我们假定, S 系和 S_0 系中对应的杆长 $\mathrm{d}l$ 和 $\mathrm{d}t_0$ 的比值等于 S' 系和 S_0 系中对应的比值. 这样, 沿同一圆周放置的标准尺都有洛伦兹收缩.

采用柱坐标 (r,θ). 在 S 系中两无限近的点 (r,θ) 和 $(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta)$ 之间的距离, 在 S_0 系测量, 其值恒为

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2. \tag{2.3.1}$$

在 S_0 系观测, S 系中沿径向放置的尺等于单位长 ($v=0$, 无洛伦兹收缩); 垂直于半径放置的尺则长度变为 $\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}$. 因此, 在 S 系中测量上述两邻点的距离时, 其值为

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2+\frac{r^2\mathrm{d}\theta^2}{1-\omega^2r^2/c^2}. \tag{2.3.2}$$

特殊地, 如果在 S 系中测量一半径为 r 的圆的周长, 则得

$$S=\int\mathrm{d}l=\frac{r}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{S_0}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}>S_0. \tag{2.3.3}$$

周长与直径之比 (S 系测得) 为

$$\frac{S}{2r}=\frac{S_0}{2r\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}>\pi. \tag{2.3.4}$$

S 系测得圆的面积为

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}\mathrm{d}r = \left(1-\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\right)\frac{2\pi c^2}{\omega^2}. \tag{2.3.5}$$

如果 $v=\omega r \ll c$, 则有

$$S \approx \pi r^2\left(1+\frac{\omega^2r^2}{4c^2}\right). \tag{2.3.6}$$

用加速 (转动系 S) 的标准尺所进行的一切测量, 都将得到式 (2.3.2)~(2.3.6). 而加速系中观察者认为只有这样的标准尺才是自然的. 因此, 对于加速系中的观察者, 由测量所构成的几何学是非欧几里得几何学. 他们得到的结论是: **由于存在引力场**(等效原理), **使空间几何不再是欧几里得几何**.

对于上述转动参考系中的惯性力场, 由式 (2.3.4) 可知, 离中心越远的地方 (引力场强越强) 与欧几里得几何的偏离越大.

下面我们讨论转盘上的"直线"(短程线). 在固定于转盘的 S 系中, 空间的几何性质由其中的线元

$$\mathrm{d}l^2 = g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b \quad (a,b=1,2) \tag{2.3.7}$$

确定. 设

$$x^1=r,\quad x^2=\theta, \tag{2.3.8}$$

由式 (2.3.2) 得

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=\frac{r^2}{1-\omega^2r^2/c}, \tag{2.3.9}$$

$$g_{12}=g_{21}=0; \tag{2.3.10}$$

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g}=1,\quad g^{22}=\frac{g_{11}}{g}=\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)r^{-2}, \tag{2.3.11}$$

$$g^{12}=g^{21}=0. \tag{2.3.12}$$

代入 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ 的表达式, 得到其不为零的分量

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1}=\frac{-r}{(1-\omega^2r^2/c^2)^2},\\ \Gamma^2_{12} =\Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2}g^{22}g_{22,1}=\frac{1}{r(1-\omega^2r^2/c^2)}.\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

式中 $A_{,1}\equiv\dfrac{A}{\partial x^1}$. 将式 (2.3.13) 代入短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^c}{\mathrm{d}l^2}+\Gamma^c_{ab}\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}l}=0, \tag{2.3.14}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}l^2}-\frac{r}{(1-\omega^2 r^2/c^2)^2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)^2=0, \tag{2.3.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}l^2}+\frac{2}{r(1-\omega^2 r^2/c^2)}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=0. \tag{2.3.16}$$

式 (2.3.16) 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{r^2}{1-\omega^2 r^2/c^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=0. \tag{2.3.17}$$

积分得

$$\frac{r^2}{1-\omega^2 r^2/c^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=k. \tag{2.3.18}$$

将式 (2.3.18) 代入式 (2.3.4) 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}\right)^2=1-\frac{r^2}{1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)^2=1-\frac{k^2}{r^2}\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right), \tag{2.3.19}$$

或者写成

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{k}{r^2}\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)=\pm\sqrt{1-\frac{k^2}{r^2}\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)}. \tag{2.3.20}$$

如果积分常数 $k=0$, 则由式 (2.3.19) 和 (2.3.18) 可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}=1,\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=0. \tag{2.3.21}$$

这就是说, 转盘上的短程线是曲线 $\theta=\text{const}$, 即盘的半径.

若 $k\neq 0$, 短程线方程 (2.3.20) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\pm\frac{r^2}{k}\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^{-1}\sqrt{1-\frac{k^2}{r^2}+\frac{k^2\omega^2}{c^2}}. \tag{2.3.22}$$

令

$$\rho=\frac{r}{k}\sqrt{1+\frac{\omega^2 k^2}{c^2}}, \tag{2.3.23}$$

式 (2.3.22) 可写为

$$\frac{1}{\rho^2\sqrt{1-\rho^{-2}}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=\pm 1+\frac{k^2\omega^2/c^2}{1+\dfrac{k\omega^2}{c^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^{-2}}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}, \tag{2.3.24}$$

积分得

$$\arccos\rho^{-1}=\pm(\theta-\theta_0)+\frac{k^2\omega^2/c^2}{1+\dfrac{k^2\omega^2}{c^2}}\sqrt{\rho^2-1}. \tag{2.3.25}$$

取 $\theta_0=0$, 我们得到

$$\theta=\pm\arccos\frac{\lambda}{\gamma}\mp\frac{\lambda\omega^2}{c^2}\sqrt{r^2-\lambda^2},\quad(2.3.26)$$

式中

$$\lambda=\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k^2\omega^2}{c^2}}},\qquad(2.3.27)$$

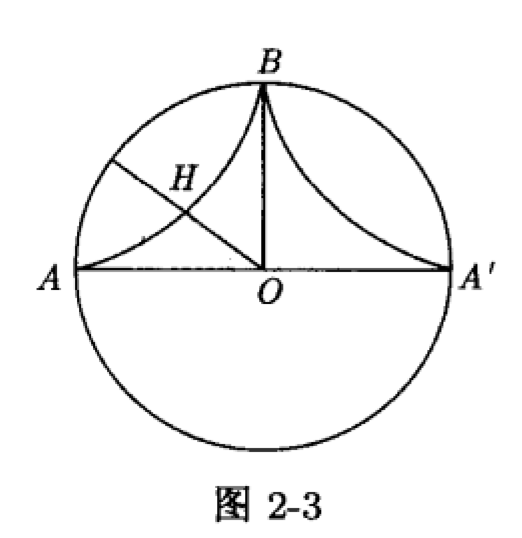


图 2-3

图 2-3 中的三条短程线 AOA', AB 和 BA' 构成一个三角形, 其内角和显然介于 0 到 π 之间. 考虑由三条短程线构成的另一三角形 OHA. OA 和 OH 沿径向, AH 沿短程线. 将 (2.3.11) 代入两曲线间夹角的表达式[注]

$$\cos\phi=\frac{g_{ab}\mathrm{d}x^a\delta x^b}{\mathrm{d}l\delta l}\quad(a,b=1,2),\tag{2.3.28}$$

[注] 为了导出式 (2.3.28), 我们考虑三维欧氏空间中的一个二维曲面. 欧氏空间中的直角坐标以 $X^i(i=1,2,3)$ 表示, 曲面上的高斯坐标以 $x^a(a=1,2)$ 表示, 此时曲面方程可写为

$$X^i=X^i(x^a)(i=1,2,3)\tag{A$_1$}$$

曲面上两点 X^a 和 $X^a+\mathrm{d}x^a$ 之间的距离为

$$\mathrm{d}s^2=\sum_i\mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^i=\left(\sum_i\frac{\partial X^i}{\partial x^a}\frac{\partial X^i}{\partial x^b}\right)\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b.\tag{A$_2$}$$

令

$$g_{ab}=\sum_i\frac{\partial X^i}{\partial x^a}\frac{\partial X^i}{\partial x^b},\tag{A$_3$}$$

则 (A$_2$) 表示为

$$\mathrm{d}s^2=g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b\quad(a,b=1,2).\tag{A$_4$}$$

另一方面, 两个方向 $\mathrm{d}x^a$ 和 δx^a 之间夹角的余弦等于

$$\cos\theta=\sum_i\frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}_s}\frac{\delta X^i}{\delta s},\tag{A$_5$}$$

而

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\sum_i\mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^i},\quad\delta s=\sqrt{\sum_i\delta X^i\delta X^i}.\tag{A$_6$}$$

将 (A$_2$) ~ (A$_4$) 代入, 得到

$$\cos\theta=\frac{g_{ab}\mathrm{d}x^a\delta x^b}{\mathrm{d}s\delta s}=\frac{g_{ab}\mathrm{d}x^a\delta x^b}{\sqrt{g_{cd}\mathrm{d}x^c\mathrm{d}x^d}\sqrt{g_{ef}\mathrm{d}x^e\mathrm{d}x^f}},\tag{A$_7$}$$

式中 $a,b,c,d,e,f=1,2$.

式中

$$\begin{aligned} dl^2 &= g_{ab}dx^a dx^b, \\ \delta l^2 &= g_{ab}\delta x^a \delta x^b, \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

δ 和 d 分别表示沿两条曲线的增量, 我们得到

$$\cos\phi = \frac{dr}{dl}\frac{\delta r}{\delta l} + \frac{r^2}{1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}}\frac{d\theta}{dl}\frac{\delta\theta}{\delta l}. \tag{2.3.30}$$

考虑到式 (2.3.18) 和 (2.3.19), 可将式 (2.3.30) 写成

$$\cos\phi = \sqrt{1-\frac{k_1^2}{r^2}+\frac{k_1^2\omega^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{k_2^2}{r^2}+\frac{k_2^2\omega^2}{c^2}} + k_1k_2\frac{1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}}{r^2}. \tag{2.3.31}$$

式中 k_1 和 k_2 分别表示与 $\left(\dfrac{dr}{dl}, \dfrac{d\theta}{dl}\right)$ 和 $\left(\dfrac{\delta r}{\delta l}, \dfrac{\delta\theta}{\delta l}\right)$ 对应的积分常数 k.

现在计算短程线三角形 OHA 的内角和. 首先求出沿三条边的 k 值. 对于 OH 和 OA, $\dfrac{d\theta}{dl}=0$, 故 $k_1=k_3=0$.

对于 HA, 在 H 点有 $\dfrac{dr}{dl}=0$, 由式 (2.3.19) 得

$$k_2 = \frac{r_H}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r_H^2}{c^2}}}, \quad r_H = OH. \tag{2.3.32}$$

将此式代入式 (2.3.18) 得

$$\left(\frac{d\theta}{dl}\right)_H = k_2\frac{1-\dfrac{\omega^2 r_H^2}{c^2}}{r_H^2} = r_H^{-1}\sqrt{1-\frac{\omega^2 r_H^2}{c^2}}. \tag{2.3.33}$$

代入式 (2.3.31), 对于点 H 有

$$r = r_H, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{r_H}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r_H^2}{c^2}}},$$

$$\cos\phi_H = 0, \quad \phi_H = \frac{\pi}{2}; \tag{2.3.34}$$

对于点 A(设边缘 $\omega r = c$), 我们有

$$\gamma = \frac{c}{\omega}, \quad \kappa_1 = \frac{-\gamma_H}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r_H^2}{c^2}}}, \quad \kappa_3 = 0,$$

$$\cos\phi_A = 1, \quad \phi_A = 0; \tag{2.3.35}$$

对于 O 点, 空间为欧几里得的, 故有

$$\phi_0 \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{2.3.36}$$

由式 (2.34)~(2.36) 可知, 三条短程线构成的三角形其内角之和介于 $0 \sim \pi$ 之间

$$\phi_H + \phi_A + \phi_0 \leqslant \pi. \tag{2.3.37}$$

此式再次表明, 由于引力场的存在, 转盘上的空间不再遵守欧几里得几何学.

下面讨论转盘上的坐标时和本征时. 设 S 系钟 C 的读数记作 t, S_0 系的钟 C_0 的读数记作 t_0, S' 系钟 C' 的读数记作 t'. 它们有共同的零点. 和长度测量的情况类似, 我们假定 t 和 t_0 的比值与 t' 和 t_0 的比值相同 (t' 对应于惯性系 S' 系的钟). 这就等于假定同一空间位置的两个钟的读数间存在着洛伦兹关系式

$$t = t_0\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}. \tag{2.3.38}$$

两个参考系 S 和 S_0 的观察者都发现 C 较 C_0 慢一个洛伦兹因子. S_0 系观察者把这一现象解释为 C 经受了加速过程; S 系观察者则解释为引力场的作用. 引力场的势为 $U = -\frac{1}{2}\omega^2 r$, 故式 (2.3.38) 又可写为

$$t = t_0\sqrt{1+\frac{2U}{c}}. \tag{2.3.39}$$

在 S 系中, 不同位置的钟是不同步的, 但位于同一半径圆周上的所有钟都同步. 由式 (2.3.38) 确定的时间称为 S 系中的坐标时.

容易发现, 若用坐标时来确定光速, 则它不等于常数. 实际上, 在 S_0 系中, 对于光信号有

$$\mathrm{d}s_0^2 = -\mathrm{d}r_0^2 - r_0^2\mathrm{d}\theta_0^2 - \mathrm{d}z_0^2 + c^2\mathrm{d}t_0^2 = 0. \tag{2.3.40}$$

变换到 S 系

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 - \omega t_0, \quad z = z_0, \tag{2.3.41}$$

我们有

$$-\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - \mathrm{d}z^2 \mp \frac{2\omega r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}} + c^2\mathrm{d}t^2 = 0, \tag{2.3.42}$$

或者写成

$$\mathrm{d}l_e^2 \pm \frac{2\omega r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}} - c^2\mathrm{d}t^2 = 0. \tag{2.3.43}$$

采用坐标时, 光速应为

$$v=\frac{\mathrm{d}l_e}{\mathrm{d}t}=\left\{c^2\mp\frac{\omega\gamma^2}{\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right\}^{1/2}. \tag{2.3.44}$$

式中 $\mathrm{d}l_e$ 为欧几里得空间的线元

$$\mathrm{d}l_e^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}z^2. \tag{2.3.45}$$

由式 (2.3.44) 可见, 坐标光速不等于常数 c.

下面采用本征时. 代替欧几里得空间线元 $\mathrm{d}l_e$, 我们引入转盘上的非欧几里得空间线元

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2\frac{r^2\mathrm{d}\theta^2}{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}+\mathrm{d}z^2. \tag{2.3.46}$$

将此式代入式 (2.3.42), 得到

$$-\mathrm{d}l^2+c^2\mathrm{d}\tau^2=0, \tag{2.3.47}$$

式中

$$\mathrm{d}\tau=\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\left(\mathrm{d}t_0\pm\frac{\omega r^2\mathrm{d}\theta}{c^2(1-\omega^2r^2/c^2)}\right). \tag{2.3.48}$$

量 τ 是与转盘上的非欧几何相对应的本征时间. 采用本征时间, 则光速恒等于常数 c. 这一结论对于一般的静态引力场 (取 $g_{i0}=0$) 都是正确的.

3. *广义相对论中的空间和时间*

在 2.2 节中我们已经看到, 转盘上的二维空间几何是非欧几里得的; 转盘上各处的标准钟是不同步的. 其原因是这一二维空间中存在引力场. 或者说, 引力场使空间弯曲了; 引力场改变了时空属性. 在狭义相对论中, 不管引力场存在与否, 空间都是平直的, 同一参考系中各处的钟都是同步的. 或者说, 在狭义相对论中, 引力场的存在对时空属性没有影响 (严格些说, 忽略了这种影响).

19 世纪以前, 人们认为欧几里得几何学是唯一合理、唯一真实的几何学. 19 世纪初, 人们开始认识到非欧几里得几何和欧几里得几何同样是合理的. 但仍然认为欧几里得几何学是唯一真实的 —— 真实的三维空间只遵守欧几里得几何学. 20 世纪, 广义相对论诞生. 它断言二者都是真实的: 当引力场不存在时, 欧几里得几何是真实的; 当引力场存在时, 非欧几里得几何是真实的.

对于转盘上的二维空间, 我们看到, 任意二曲线间的夹角 (类似地, 任一面元) 都由度规张量 g_{ab} 唯一确定. 对于任意的四维时空, 其几何性质、空间量也都由度

规张量 $g_{\mu\nu}$ 唯一确定. 这就是说, 只要给出线元的具体表达形式

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \tag{2.3.49}$$

时空的一切性质便唯一确定.

前面我们曾讨论了转盘上的坐标时和本征时的区别. 下面讨论坐标时和本征时以及坐标钟和标准钟的普遍定义, 给出它们之间的关系.

在任意坐标系 x^μ 中, $t = \dfrac{x^0}{c}$ 称为**坐标时**, 其时计称为**坐标钟**. 在引力场中任一点, 引入一局部静止惯性系 ($\mathrm{d}x^i = 0$), 其中静止粒子世界线长度除以 c 称为**本征时**, 以 τ 表示, 其时计称为**标准钟**. 即

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} = \sqrt{g_{00}}\mathrm{d}t, \tag{2.3.50}$$

此即坐标钟和标准钟的关系.

2.4 引力场的势

定义引力场强 $\boldsymbol{a}$:

$$a^i = \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_i = \gamma_{ij} a^j. \tag{2.4.1}$$

式中 $\gamma_{ij} = \dfrac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}$ 为纯空间度规.

和电场的情况类似, 引力场强度也可表示为标势的梯度和矢势对时间的微商. 引力场强可用一静止试验质点所受的力来量度. 在引力场中, 一自由质点的运动方程应为短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} \tag{2.4.2}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0. \tag{2.4.3}$$

试验质点瞬时静止 ($\mathrm{d}x^i = 0$), 式 (2.4.3) 的空间分量表示为 (取参量 $\lambda = \tau$)

$$g_{ij}\frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{i0}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right). \tag{2.4.4}$$

又有

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = -\mathrm{d}l^2 + g_{00}\mathrm{d}x^{0^2}\left(1 - \frac{\gamma_i}{\sqrt{g_{00}}}\frac{u^i}{c}\right)^2. \tag{2.4.5}$$

式中

$$u^i \equiv \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = c\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}x^0}, \quad \gamma_i \equiv \frac{-g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{2.4.6}$$

将式 (2.4.5) 两边除以 $\mathrm{d}x^{0^2}$, 解出 $\dfrac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}=c\left\{g_{00}\left(1-\frac{\gamma_i u^i}{c\sqrt{g_{00}}}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.4.7}$$

式中

$$u=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4.8}$$

式 (2.4.8) 即

$$g_{i0}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}=c\gamma_i\left\{\left(1-\frac{\gamma_k u^k}{c\sqrt{g_{00}}}\right)^2-\frac{u^2}{c^2 g_{00}}\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.4.9}$$

两边对 τ 微分, 并注意到 $u^i=0, \mathrm{d}s^2=g_{00}\mathrm{d}x^{0^2}=c^2\mathrm{d}\tau^2$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{0i}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left\{c^2\frac{\partial\gamma_i}{\partial x^0}+\frac{\gamma_i\gamma_k}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2}\right\}. \tag{2.4.10}$$

又由 $\mathrm{d}\tau=\sqrt{g_{00}}\mathrm{d}t$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}\tau^2}=\frac{1}{g_{00}}\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.4.11}$$

将式 (2.4.6)~(2.4.11) 代入式 (2.4.4), 得到

$$\gamma_{ik}\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{c^2 g_{00}}{2}\right)-c\sqrt{g_{00}}\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}. \tag{2.4.12}$$

令

$$U=-\frac{c^2}{2}(1-g_{00}),\quad 即 g_{00}=1+\frac{2U}{c^2}, \tag{2,4.13}$$

式 (2.4.12) 可写为

$$a_i=\gamma_{ik}\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial U}{\partial x^i}-c\sqrt{1+\frac{2U}{c^2}}\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}. \tag{2.4.14}$$

U 称为标量引力势, γ_i 称为矢量引力势. 对于时轴正交系, $\gamma_i=0$.

第3章　引力场方程

3.1　场方程的建立

引力场的分布确定了时空的几何结构; 反之, 时空的几何结构唯一确定了引力场的分布. 而时空的几何性质完全由度规张量 $g_{\mu\nu}$ 确定. 因此, 张量 $g_{\mu\nu}$ 既描述时空几何又描述引力场. 换句话说, 引力场就是时空度规张量场. 既然 $g_{\mu\nu}$ 作为 (引力) 场分布, 故应满足一定形式的微分方程. 按照广义协变原理, 这些方程应该由同阶张量组成; 方程应含有场变量 $g_{\mu\nu}$ 所构成的张量, 还应含有作为场源的物质场的张量. 在牛顿近似下, 该方程应能退化为牛顿引力场方程.

我们知道, 牛顿引力势 U 满足泊松方程

$$\nabla^2 U = 4\pi G\rho. \tag{3.1.1}$$

而式 (2.4.13) 告诉我们, 引力场的势 U 与 g_{00} 有简单的关系 (只差常数). 在狭义相对论中, 式 (3.1.1) 右端的质量密度 ρ 又恰为能量–动量张量的分量 T_{00}. 因此, 由牛顿引力场方程 (3.1.1) 推断, 推广后的新的引力场方程的右端应为物质场的能量–动量张量, 左端应该是含有 $g_{\mu\nu}$ 的二阶协变导数的二阶张量. 由式 (3.1.1) 还可以推断, 新方程关于 $g_{\mu\nu}$ 的二阶导数应是线性的. 只有这样, 才能保证在近似条件下新的方程能够退化为方程 (3.1.1).

可以证明在黎曼几何中, 含有 $g_{\mu\nu}$ 和它的一阶、二阶导数, 且对二阶导数为线性组合的二阶张量只可能取下述形式:

$$C_1 R_{\mu\nu} + C_2 R g_{\mu\nu} + C_3 g_{\mu\nu}, \tag{3.1.2}$$

式中 C_1, C_2 和 C_3 均为常数. 因此, 场方程的最普遍的可能形式应为

$$R_{\mu\nu} + A R g_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}. \tag{3.1.3}$$

式中 k 由引力常数唯一确定. A 和 λ 是待定常数, 可以由 Ricci 张量 $R_{\mu\nu}$ 的内在性质和无限远处的时空渐近性质来确定.

在狭义相对论中, 能量–动量守恒定律表示为 $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$. 在广义相对论中自然应推广为 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$. 这样, 应该要求

$$(R^{\mu\nu} + A R g^{\mu\nu})_{;\nu} = 0. \tag{3.1.4}$$

将此式与爱因斯坦张量式 $G^{\mu\nu}_{;v}=0$ 比较, 知

$$A=-\frac{1}{2}. \tag{3.1.5}$$

于是式 (3.1.3) 可写为

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=kT_{\nu\mu\nu}. \tag{3.1.6}$$

对于真空的情况, $T_{\mu\nu}=0$, 式 (3.1.6) 简化为

$$R_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=0. \tag{3.1.7}$$

这一方程中只含有 $g_{\mu\nu}$ 和它们的导数. 这表明, λ 的值只能由整体空间的几何性质决定. 如果承认无引力场时, 空间是欧几里得的, 那么时空结构就必须满足条件

$$R_{\mu\nu\gamma\lambda}=0. \tag{3.1.8}$$

式 (3.1.8) 是时空平直的充分且必要条件. 此式应导致

$$R_{\mu\nu}=0. \tag{3.1.9}$$

实验观测结果表明, 在数十万光年的空间范围内, 式 (3.1.9) 是和实验结果符合得很好的. 在太阳系内的实验观测就更加准确地与式 (3.1.9) 相合. 于是可以断定, λ 值应该等于零或极其微小.

我们有理由认为, "没有物质场 ($T_{\mu\nu}=0$) 的空间是欧几里得的" 这是小范围空间内的经验概念, 可望在更大的空间范围内会与欧几里得几何有偏离; 那时才有必要考虑场方程中的 $\lambda g_{\mu\nu}$ 一项 ($\lambda\neq 0$). 因此, 常数 λ 称为宇宙因子. $[\lambda]=[L^{-2}]$, L 为宇宙距离, 数量级为宇宙半径.

方程 (3.1.6) 即爱因斯坦引力场方程. 它可以写为下述形式:

$$R^{\nu}_{\mu}-\frac{R}{2}\delta^{\nu}_{\mu}+\lambda\delta^{\nu}_{\mu}=kT^{\nu}_{\mu}, \tag{3.1.10}$$

$$R^{\mu\nu}-\frac{R}{2}g^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}=kT^{\mu\nu}; \tag{3.1.11}$$

或者注意到 $R=4\lambda-kT$, 有

$$R^{\nu}_{\mu}+\lambda\delta^{\nu}_{\mu}=k\left(T^{\nu}_{\mu}+\frac{T}{2}\delta^{\nu}_{\mu}\right), \tag{3.3.12}$$

$$R^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}=k\left(T^{\mu\nu}+\frac{T}{2}g^{\mu\nu}\right), \tag{3.3.13}$$

$$R_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=k\left(T_{\mu\nu}+\frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right). \tag{3.1.14}$$

3.2 牛 顿 极 限

我们讨论弱引力场的情况. 在线元 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ 的表达式中, 取 $x^0 = ct, t$ 为时间坐标. 线元表达式右端各项中, $g_{00}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^0$ 比 $2g_0\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^k$ 要大一个量级, 而 $2g_{0k}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^k$ 又要比 $g_{kl}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l$ 大一个量级. 因此, 忽略一阶小量时有 $\mathrm{d}s^2 \approx g_{00}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^0$. 显然, 当速度 $\dfrac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \ll c$ 或者 $\mathrm{d}x^k \ll c\mathrm{d}t$ 时上述条件成立, 这正是牛顿极限条件.

在短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{3.2.1}$$

中, 我们引入另一参量 λ(沿短程线)

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}, \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda^2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}s^2}. \tag{3.2.3}$$

将式 (3.2.2) 和 (3.2.3) 代入式 (3.2.1), 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\right)^{-2}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{3.2.4}$$

现在取参量 λ 为时间坐标 x^0, 此时式 (3.2.4) 可写为

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = -\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^{-2}\dot{x}^\mu. \tag{3.2.5}$$

式中一点表示对 x^0 求微商. 式 (3.2.5) 的零分量为

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = -\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^{-2}\dot{x}^0.$$

但是 $\dot{x}^0 = 1, \ddot{x}^0 = 0$. 故有

$$\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^{-2} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta. \tag{3.2.6}$$

将式 (3.2.6) 代入式 (3.2.4), 得到

$$\ddot{x}^\mu + \left(\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^\mu\right)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0. \tag{3.2.7}$$

由于 $\ddot{x}^0 = 0$ 和 $\dot{x}^0 = 1$, 式 (3.2.7) 的零分量是一恒等式, 因此它等效于下面的方程:

$$\ddot{x}^i + (\Gamma^i_{\alpha\beta} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^i)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0. \tag{3.2.8}$$

注意到 $\dot{x}^i = \dfrac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$, 有 $\Gamma^i_{\alpha\beta} \gg \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^i$. 同时, 考虑到 $\dot{x}^0 \gg \dot{x}^k$, 式 (3.2.8) 最后简化为

$$\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{00}. \tag{3.2.9}$$

此式表明 Γ^i_{00} 是单位质量试验粒子所受的牛顿力. 我们还可以进一步简化 Γ^i_{00} 的表达式:

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{00} =& \frac{1}{2}g^{i\sigma}\left(2\frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}\right) \\ \approx& -\frac{1}{2}\eta^{i\sigma}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}.\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

结果得到最低级近似下的短程线方程

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \tag{3.2.11}$$

考虑到 $g_{00} = 1 + \dfrac{2U}{c^2}$, 式 (3.2.11) 可用引力标势 U 表示:

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x^i} \tag{3.2.12}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial U}{\partial x^i}. \tag{3.2.13}$$

此式表明 U 即为牛顿引力势.

下面讨论场方程的牛顿极限. 考虑忽略宇宙项的场方程

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right). \tag{3.2.14}$$

在最低级近似下, 我们有

$$T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \approx T_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} \approx T_{00}\eta^{00} = T_{00}. \tag{3.2.15}$$

由此得

$$R_{00} = k\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right) \approx k\left(T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}T\right) = \frac{1}{2}kT_{00} = \frac{1}{2}k\rho c^2. \tag{3.2.16}$$

式中 ρ 为引力场源物质的密度. R_{00} 的渐近式还可以由 $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$ 给出:

$$\begin{aligned}R_{00} =& \frac{\partial \Gamma^\lambda_{00}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{0\lambda}}{\partial x^0} + \Gamma^\sigma_{00}\Gamma^\lambda_{\lambda 0} - \Gamma^\sigma_{0\lambda}\Gamma^\lambda_{0\sigma} \\ \approx& \frac{\partial \Gamma^\lambda_{00}}{\partial x^\lambda} \approx \frac{\partial \Gamma^k_{00}}{\partial x^k}.\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

将式 (3.2.10) 代入式 (3.2.17), 得到

$$R_{00} \approx \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^i} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2 U. \tag{3.2.18}$$

式中 ∇^2 为三维拉普拉斯算符.

比较式 (3.2.16) 和 (3.2.18), 得到

$$\nabla^2 U = \frac{1}{2}kc^4\rho. \tag{3.2.19}$$

将式 (3.2.19) 与牛顿引力场方程 $\nabla^2 U = 4\pi G\rho$ 比较, 得到常数 k 的值

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}. \tag{3.2.20}$$

至此, 爱因斯坦引力场方程 (3.1.3) 中的常数 A 和 k 均已确定.

3.3 关于宇宙因子 λ 的讨论

起初爱因斯坦引入宇宙因子 λ 是为了得到静态宇宙解. 对于不等于零的平均密度 $T_0^0 = \rho c^2 = \text{const}, \lambda$ 应等于 $8\pi G\rho/c^2$. 后来发现了红移, 爱因斯坦倾向于 $\lambda = 0$ 的场方程. 1930 年以前, 人们详细研究了 $\lambda \neq 0$ 的宇宙解 (静态的和非静态的). 但是直到 1967 年以前, 人们一直没有完全确认引入宇宙因子 λ 的必要性和真实性. 1967 年, 类星体按红移分布的一种解释指出, λ 可能不为零, 具有量级 $\lambda \approx 10^{-55}/\text{cm}^2$.

至今, 上述解释也没有被完全证明. 甚至在用于一些新观测到的类星体时遇到了困难. 但是另一方面, 讨论过程表明, 简单地假定 $\lambda = 0$ 也没有根据, 大多数学者不认为 $\lambda = 0$. 可以预料, 近些年仍然很难确定 λ 值或它的极限值.

宇宙因子有什么物理含义? 为什么学者们对它如此感兴趣呢?

前面曾指出, λ 的量纲是 $[\lambda] = 1/\text{cm}^2$. 由此可以把它看作空的空间 (没有物质和引力波) 的曲率. 而引力理论把曲率和能量、动量、物质压强联系起来. 在式 (3.1.6) 中, 将 λ 项移到右端, 我们得到

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}. \tag{3.3.1}$$

$\lambda \neq 0$ 意味着空的空间产生了引力场. 它相当于充满整个空间的物质, 其密度为

$$\rho_\lambda = \frac{c^2\lambda}{8\pi G}, \tag{3.3.2}$$

能量密度为

$$\varepsilon_\lambda = \frac{c^4\lambda}{8\pi G}, \tag{3.3.3}$$

压强为

$$P_\lambda = -\varepsilon_\lambda = -\frac{c^4\lambda}{8\pi G}. \tag{3.3.4}$$

对于 $\lambda \approx 10^{-55}/\mathrm{cm}^2, \rho_\lambda \approx 10^{-28}\mathrm{g/cm}^3, \varepsilon_\lambda \approx 10^{-7}\mathrm{erg/cm}^3$. (lerg=$10^{-7}$J.)

在这个意义上, 可以说真空具有能量密度 ε_λ 和压强 P_λ(压强张量).

这里应指出, 对于 ε_λ 和 ρ_λ, 我们做了这样的假定：理论的相对论协变性不被破坏; ε_λ 和 P_λ 在 Lorentz(洛伦兹) 变换下是不变的.

上述各量在基本粒子实验和原子、分子物理实验中不表现出来. 进行实验的局部空间中的真空能量起着常数项的作用, 可以在能量守恒定律中被消掉.

ε_λ 和 P_λ 只在引力现象中出现. 由式 (3.3.1) 可见, 宇宙项在场方程中是和物质场能–动张量平权的一项, 它们同样作用于空间. 因此, 卡文迪许实验原则上应可以用来发现和测量 ε_λ 及 P_λ. 两铅球的引力取决于铅的密度和真空的密度 $\rho_\lambda(|\rho_\lambda| < 10^{-28}\mathrm{g/cm}^3)$, 积分时遍及铅球的体积.

实际测量 ε_λ 和 P_λ 是不可能的. 无论用实验室中的实验观测太阳系中行星的运动, 还是观测银河系中恒星的运动, 都无法测得 ε_λ 和 P_λ 的值. 实际上, 在太阳系中, 在半径等于地球轨道半径的空间范围内, 物质的平均密度为 $\langle\rho\rangle \approx 10^{-7}\mathrm{g/cm}^3$, 在银河系中为 $10^{-24}\mathrm{g/cm}^3$. ρ_λ 的效应均无法观测 (可忽略不计). 它的影响只能在宇宙尺度上表现出来.

关于 λ 的性质, 一些学者认为, 确定的值 λ 和对应的 $\rho_\lambda, \varepsilon_\lambda, P_\lambda$ 均作为宇宙常数, 不再作进一步的解释. 另一种观点是假定零级近似：$\lambda = \rho_\lambda = \varepsilon_\lambda = P_\lambda = 0$.

下面我们先回顾一下关于真空能量的理论发展, 再说明关于建立宇宙因子 λ 的理论的一些观点.

第一批关于电磁场量子化的尝试导致了真空能量密度无限大的佯谬. 真空作为所研究系统的最低能态 (如在研究电磁现象时用 Maxwell 议程组表征), 粒子 (如光子) 是基本的受激系统. 类似于量子力学中原子核在晶体点阵中运动的图像：基本的受激态叫做光子 (声子、量子); 在晶体的基态不含有光子, 即具有零温度. 这个状态类似于真空. 晶体基态的能量具有完全确定的值, 是可以测量的. 同一元素的不同的同位素, 其基态能量依赖于同位素原子气体的温度. 在最简单的场论方案中, 基态具有无限大的能量. 但是可以改变一下理论的形式, 使得自由场的自由态能量等于零.

在经典 Maxwell 理论中, 能量密度 $\varepsilon = \dfrac{E^2+H^2}{8\pi}$. 栗弗席兹 (Lifshitz) 曾指出, 不存在一种量子电动力学理论, 能使真空中 E^2 或 H^2 的平均值等于零 (离电荷很远并且不存在实光子). 因此, 为了借助于通常的算符乘积来构成这些理论, 使真空 $\varepsilon = 0$, 就必须放弃 ε 与场强之间的经典关系式.

真空能量的另一种来源是由狄拉克 (Dirac) 电子理论给出的. 负能态被充满的思想不可避免地导致能量密度具有负值. 在这种情况下, 也必须改变原理论, 使得对于无相互作用的真空 ε 恒等于零. 但是不能保证在有相互作用时真空能量仍为零. 按照现在的理论, 不仅实粒子之间存在相互作用, 而且虚粒子也有相互作用. 注意这里 "相互作用" 一术语和经典意义上的不同. 在经典物理中谈到两个碰撞物体的相互作用, 质子和电子的库仑相互作用等; 在量子场论中谈到 4–费米相互作用 (当中子、电子、质子和中微子散射时) 和光子–电子相互作用 (当电子辐射光子时).

众所周知, 自由电子不能辐射实光子. 但是可以说自由电子辐射然后又吸收了虚光子. 这将使电子的质量和磁矩发生变化, 正如 Lemb 实验所证实的那样. 实验测定电子质量的变化是不可能的, 因为不可能测量失去虚光子后电子的质量. 但是电子磁矩的变化却可以测出来.

还有许多类似的过程, 如电子对 (e^+, e^-) 在真空中产生和湮灭.

现在, 真空的组成和性质的理论不像 60 年前那么简单和明显.

真空能量理论的第一个可能方案是假定在没有场和相互作用时真空的能量恒等于零; 当它们存在时真空的能量不等于零. 引入实粒子时它应等于一个附加常数. 根据这一方案建立的粒子理论可以使所得结果不依赖于未知的 (不确定的或无限大的) 真空能量. 费曼正是这样做的. 他把跃迁幅 A_{12}(真空加始态 1 的粒子 $\rightarrow$ 真空加末态 2 的粒子) 分解成 A_V(真空 $\rightarrow$ 真空) 和比值 A_{12}/A_V 的积. 只有 A_{12}/A_V 才是与实粒子相互作用对应的真实值. 这一方案使真空能量问题得到了很好的解决, 但是这一方案不包含引力场. 在引力理论中, 真空的能量密度如前面所说, 是真实的, 原则上可观测的.

在粒子理论中, 真空能量理论的第二个方案, 即公理式的方案, 假定真空的能量密度和相应的压强恒等于零.

这一假定只能作一种可能性提出. 有些文献中出现这样的断言: 这一公理是必须的, 只有这样才能与相对论的不变性相符合. 这样的断言是不正确的. 正如前面指出的, 真空的压强 P_λ 和能量密度 ε_λ 均不为零, 它们之间的关系 $P_\lambda = -\varepsilon_\lambda$(由场方程得出) 具有相对不变性.

我们指出, 像粒子理论一样, 原则上可以估计 ε_λ 的量级, 它不等于零且保持相对论不变性. 这里应注意, 常常在研究有限体积 V 内的能量 $E = \varepsilon \nu$ 时发生错误. 真空的三维动量 P 显然等于零, 因为真空中无法分辨方向. 能量和动量构成四维矢量 $(E, \boldsymbol{P})$; 对于给定的体积, 这 4–矢量是 $(E, 0)$. 这样的组合显然不是不变量. 如果不假定 $E = 0(\varepsilon = 0)$, 在另一相对于该坐标系运动的坐标系中将有 $\boldsymbol{P} \neq 0$. 错误发生在选择了特殊的有限体积, 因为这违背相对论不变性. 无限的 (非局域的) 介质, 其中包括真空, 可以用能量密度表征, 它是一个能量–动量张量的分量 T_0^0, 此张量的其余分量 $T_0^i (i = 1, 2, 3)$ 同时描述空间的能流和动量密度. 能量–动量张量的分

量 T^{μ}_{ν} 对应于弹性理论中的张力. 对于流体 (各向同性的)$T^{\mu}_{\nu} = P\delta^{\mu}_{\nu}$.

在这里重复这些众所周知的内容是为了强调, 问题不在于真空是否具有能量-动量矢量, 而在于是否存在能量-动量张量. 不存在具有相对论不变性的矢量 (它的大小恒等于零), 但是完全有可能存在相对论不变的张量. 在洛伦兹系中, 这一张量应具有形式

$$T_{\mu\nu} = \text{const}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.3.5}$$

而这正是在 $\lambda \neq 0$ 的情况下所提到的那个张量. 人们没有理由先验地排除这样的与真空相联系的张量.

现在仍然存在的问题是:

(1) 是否存在某种要求 $\lambda \neq 0$ 的原理? (2) 我们是否应该把 λ 看作新的独立的常数? 或者说, (3) 能否由其他的普适常数来计算 λ(尽管只是量级)?

下面我们试图回答第三个问题, 不涉及前两个问题. 这一回答 (根据量纲和量级的比较) 也许有利于构成更正确的和最终的理论.

在实验物理中, 我们测量 (真空 + 粒子) 系统和单独真空系统的能量之差, 不等于零的 ε_λ 在计算中被消掉了. 按照真空极化理论和量子的粒子理论所作的全部工作都是这样的.

量 ε_λ 只在引力理论中才引入. 虽然没有精确的理论, 但是我们可以借助于量纲的分析提出重要的设想.

基本粒子理论使人们能够建立具有 ε_λ 的量纲的量. 由理论基本常数可以构成能量 mc^2, 长度 $\dfrac{h}{mc}$, 密度 $\left(\dfrac{mc}{h}\right)^3$ 和 $\varepsilon_\lambda = mc^2 \times \left(\dfrac{mc}{h}\right)^3$. 这样得到的量 ε_λ 明显地不合用. 因为以电子质量代入时得 $\varepsilon_\lambda = 10^{22}\text{erg/cm}^3$, 以质子质量代入时得 $\varepsilon_\lambda \sim 10^{35}\text{erg/cm}^3$. 这些数值远大于宇宙学中假定的值 ($\varepsilon_\lambda < 10^{-7}\text{erg/cm}^3$). 正因为这样, 物理学家才本能地反对 $\lambda \neq 0$: 如果不能取更大的 ε_λ(相应地取更大的 λ) 则什么都谈不到.

在天文学家的影响下, 人们发现将 $mc^2\left(\dfrac{mc}{h}\right)^3$ 乘以一个表征引力的无量纲因子 $\dfrac{Gm^2}{hc}$, 可能构造出一个合理的 ε_λ. 这一表达式为

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda &= \left(\frac{Gm^2}{hc}\right) \cdot mc^2 \cdot \left(\frac{mc}{h}\right)^3 \\ &= \frac{Gm^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^3}, \quad \lambda = \frac{h}{mc}. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

这一表达式可以解释为：在真空中产生虚粒子，质量为 m，它们的平均空间距离为 λ；假定它们的总的本征能量为零，使得真空的总能量密度只决定于相邻粒子间的相互作用. 对于 $m = m_e$，上式给出 $\varepsilon_\lambda = 10^{-19}\text{erg/cm}^3$；对于 $m = m_p$，上式给出 $\varepsilon_\lambda = 1\text{erg/cm}^3$. 宇宙学所假定的 ε_λ 值介于二者之间.

还有一个问题，人们常说 $\lambda \neq 0$ 意味着引力子具有不为零的静止质量，这似乎不合理. 我们知道，当 $\lambda \neq 0$ 时，即使物质不存在，时空也不可能是平直的. 而在弯曲空间中引力子质量的定义是不明确的.

宇宙因子项如果不等于零，它的数值也是很小的，它的效应只在宇宙学中才可能出现，这一点是无疑的.

3.4 引力场的变分原理

前面已经建立了爱因斯坦引力场方程. 本节将由引力场的变分原理得到这一组场方程. 为了使所得到的场方程具有协变性，最好的途径是由变分原理出发进行推导. 在许多非爱因斯坦引力理论中也都是这样做的. 问题的关键在于选择适当的作用量泛函.

引入标量泛函

$$I = I_\text{g} + I_\text{f} = \int (L_\text{g} + L_\text{f})\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.4.1}$$

式中，I_g 和 L_g 分别表示引力场的作用量和拉格朗日函数，I_f 和 L_f 分别表示除引力场之外的所有其他场的作用量和拉格朗日函数. L_g 和 L_f 的表示式取为

$$L_\text{g} = R, \quad L_\text{f} = -2kL_\text{f}, \tag{3.4.2}$$

式中，k 为爱因斯坦引力常数，$k = 8\pi G/c^4$.

变分原理表示为

$$\delta I = 0. \tag{3.4.3}$$

首先计算 δI_g.

$$\begin{aligned}\delta I_\text{g} =& \delta \int \sqrt{-g}R\mathrm{d}^4x = \delta \int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x \\ =& \int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x + \int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\mathrm{d}^4x.\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

为了求出 $\delta R_{\mu\nu}$，采用短程线坐标系. 此时有

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\left\{\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&=\delta\left\{\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right\}\\
&=\frac{\partial(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})}{\partial x^{\nu}}\\
&=(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}-(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu}.
\end{aligned}\tag{3.4.5}
$$

在式 (3.4.5) 中, 注意到 $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ 是张量. 这是一个张量方程, 因此, 它在任何参考系中的任何时空点都成立, 不局限于短程线参考系. 于是式 (3.4.4) 右端第一项的被积式可写为

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}&=\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\{(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}-(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu}\}\\
&=\sqrt{-g}\{g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}-(g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu}\}\\
&=\sqrt{-g}\{(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda})-(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma})_{;,\lambda}\}\\
&=\sqrt{-g}V^{\lambda}_{;\lambda},
\end{aligned}\tag{3.4.6}
$$

式中

$$
V^{\lambda}=g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}.\tag{3.4.7}
$$

为一逆变矢量. 由此得到

$$
\int\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x=\int\frac{\partial(\sqrt{-g}V^{\lambda})}{\partial x^{\lambda}}\mathrm{d}^4x.\tag{3.4.8}
$$

此式由高斯定理化为沿系统边界面的面积分. 在系统边界面上 $\delta g^{\mu\nu}$(从而 $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$) 为零, 因此式 (3.4.8) 等于零

$$
\int\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x=0.\tag{3.4.9}
$$

式 (3.4.4) 右端第二项为

$$
\begin{aligned}
\int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\mathrm{d}x&=\int\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x+\int R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\\
&=\int\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x+\int R\delta\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x,
\end{aligned}\tag{3.4.10}
$$

其中右端第二项中 $\delta\sqrt{-g}$ 可由行列式性质得到

$$
\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.\tag{3.4.11}
$$

于是有

$$
\int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\mathrm{d}^4x=\int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x.\tag{3.4.12}
$$

将式 (3.4.12) 和 (3.4.9) 代入式 (3.4.4) 得

$$\delta I_{\mathrm{g}} = \delta\int\sqrt{-g}R\mathrm{d}^4x = \int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.13}$$

下面计算除引力场以外的其他场作用量 I_{f} 的变分 δI_{f}. 由式 (3.4.1) 和 (3.4.2) 知

$$\delta I_{\mathrm{f}} = -2k\delta\int\sqrt{-g}L_{\mathrm{f}}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.14}$$

由变分学可知, 对于泛函

$$I = \int F(q^\mu, q^\mu_{,\lambda}, q^\mu_{,\lambda,\lambda_1}, \cdots, q^\nu, q^\nu_{,\lambda}, q^\nu_{,\lambda,\lambda_1}, \cdots)\mathrm{d}^n x, \tag{3.4.15}$$

其变分表示为

$$\begin{aligned}\delta I = \int \bigg(&\frac{\delta F}{\delta q^\mu}\delta q^\mu + \frac{\delta F}{\delta q^\mu_{,\lambda}}\delta q^\mu_{,\lambda} + \frac{\delta F}{\delta q^\mu_{,\lambda,\lambda_1}}\delta q^\mu_{,\lambda,\lambda_1} + \cdots \\ &+ \frac{\delta F}{\delta q^\nu}\delta q^\nu + \frac{\delta F}{\delta q^\nu_{,\lambda}}\delta q^\nu_{,\lambda} + \frac{\delta F}{\delta q^\nu_{,\lambda,\lambda_1}}\delta q^\mu_{,\lambda,\lambda_1} + \cdots\bigg)\mathrm{d}^n x.\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

式中各变分导数表示为

$$\frac{\delta F}{\delta q^\mu} = \sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left(\frac{\partial F}{\partial q^\mu_{,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}}\right)_{,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}. \tag{3.4.17}$$

$$\frac{\delta F}{\delta q^\mu_{,\lambda}} = \sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left(\frac{\partial F}{\partial q^\mu_{,\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}}\right)_{,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}. \tag{3.4.18}$$

设式 (3.4.14) 中的 L_f 不含有 $g^{\mu\nu}$ 的高于一阶偏导数

$$L_f = L_f(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_{,\lambda})$$

代入式 (3.4.15)~(3.4.18) 得

$$\delta I_f = -2k\int\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}\right\}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.19}$$

式 (3.4.19) 右端被积式中第二项可写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda} = &\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}\right]_{,\lambda} \\ &-\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\right]_{,\lambda}\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

式 (3.4.20) 第一项代入式 (3.4.19) 化为沿系统边界面的面积分, 等于零 (因为边界面上 $\delta g^{\mu\nu}=0$). 将式 (3.4.20) 第二项代入式 (3.4.19) 得

$$\delta I_f = -2k\int\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\right]_{,\lambda}\right\}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.21}$$

定义能量–动量张量 $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\right]_{,\lambda}\right\}, \tag{3.4.22}$$

我们得到

$$\delta I_f = -k\int\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.23}$$

由式 (3.4.23) 和 (3.4.13) 可知作用量 I 的变分 δI 为

$$\delta I = \int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - kT_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.24}$$

令 $\delta I=0$, 考虑到 $\delta g^{\mu\nu}$ 的任意性, 得到

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}. \tag{3.4.25}$$

如果在作用量 I 中引入宇宙作用量

$$I_\lambda = c\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x, \tag{3.4.26}$$

式中 c 为一待定常数, 则有

$$\delta I_\lambda = \frac{c}{2}\int g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x.$$

此时由 $\delta(I_g+I_f+I_\lambda)=0$ 得

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \tag{3.4.27}$$

式中 $\lambda=\dfrac{c}{2}$, 此即含宇宙项的爱因斯坦引力场方程.

3.5 引力场中的 Maxwell 方程

根据广义协变原理, 我们可以将狭义相对论中四维形式的 Maxwell 方程推广到弯曲空间. 原则上讲, 只要将普通导数换为协变导数即可.

当电磁场存在时, 因为它属于引力场以外的物质场, 它应影响时空几何性质, 电磁场的能量–动量张量作为引力场方程中 $T_{\mu\nu}$ 的一个组成部分, 应以明显形式给出. 我们仍从变分原理出发.

如果除引力场之外只有电磁场存在, 则由狭义相对论推广到弯曲空间的情况, 式 (3.4.14) 中的 $L_{\rm f}$ 应具有形式

$$L_{\rm f} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c}J^{\mu}A_{\mu} + L_{\rm e}, \tag{3.5.1}$$

式中 J^{μ} 为四维电流密度, $L_{\rm e}$ 为电荷对 $L_{\rm f}$ 的单独贡献. 现在考虑纯电磁场的情况, 即式 (3.5.1) 后两项为零

$$L_{\rm f} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{3.5.2}$$

注意到 $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$, 可知 $(L_{\rm f}\sqrt{-g})$ 只是 g_{μ} 和 A_{μ} 的函数.

首先, 保持 A_{μ} 不变, 对 $g_{\mu\nu}$ 求变分. 此时 $F_{\mu\nu} = \text{const}$, 而 $F^{\mu\nu} \neq \text{cosnt}$. 我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{16\pi}F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma})}{\partial g^{\mu\nu}} \\
&= -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}\left\{g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} + \sqrt{-g}(g^{\alpha\rho}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + g^{\beta\sigma}\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\rho}_{\nu})\right\} \\
&= -\frac{1}{16\pi}\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} + 2\sqrt{-g}F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu}\right),
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

式中

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}. \tag{3.5.4}$$

最后得

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu}\right). \tag{3.5.5}$$

令

$$E_{\mu\nu} = T_{\mu\nu(e_m)} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu}\right). \tag{3.5.6}$$

此式正是狭义相对论中对应式的推广. 将式 (3.5.5) 代入 $\delta I = \delta(I_{\rm g} + I_{\rm f}) = 0$, 便得到 Einstein-Maxwell 方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kE_{\mu\nu}. \tag{3.5.7}$$

张量 E^{ν}_{μ} 是零迹的

$$E = E^{\lambda}_{\lambda} = g^{\lambda\sigma}E_{\lambda\sigma} = 0. \tag{3.5.8}$$

将式 (3.5.7) 缩并得 $R = -kE$, 所以 $R = 0$, 式 (3.5.7) 简化为

$$R_{\mu\nu} = kE_{\mu\nu}. \tag{3.5.9}$$

式 (3.5.9) 是只存在电磁场时的爱因斯坦引力场方程.

有电荷存在时, 作用量应增加一项. 对于电荷为 e 的单个粒子, 增加的一项为

$$I_{\rm e}=-e\int A_\mu {\rm d}x^\mu {\rm d}\tau=-e\int A_\mu u^\mu {\rm d}s{\rm d}\tau, \tag{3.5.10}$$

式中积分 $\mathrm{d}s$ 沿世界线.

为了避免奇点, 我们讨论带电物质连续分布的情况. 设每一物质元带有电荷. 在每一点 x^μ, 有速度矢量 u^μ(可有一因子与之相乘). 我们总可以确定一逆变矢量密度 $\mathscr{T}^\mu$, 它与 u^μ 同方向, 并使

$$\mathscr{T}^0{\rm d}x^1{\rm d}x^2{\rm d}x^3 \tag{3.5.11}$$

表示某一体元 d^3x 内的电荷, 而使

$$\mathscr{T}^1{\rm d}x^0{\rm d}x^2{\rm d}x^3 \tag{3.5.12}$$

表示时间间隔 $\mathrm{d}x^0$ 内通过面元 $\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 的电量. 由于电荷守恒, 于是有

$$\mathscr{T}^\mu_{,\mu}=0. \tag{3.5.13}$$

设一电荷元由位置 x^μ 移到位置 $x^\mu+h^\mu, h^\mu$ 为一阶小量. 我们要确定给定点 x^μ 处 $\mathscr{T}^\mu$ 的变化.

首先考虑 $h^0=0$ 的情况. 在一三维体积 V 内, 电荷的增量等于通过 V 的界面流出的电量的负值

$$\delta\int_V \mathscr{T}^0{\rm d}x^1{\rm d}x^2{\rm d}x^3=-\int_S \mathscr{T}^0h^i{\rm d}s_i. \tag{3.5.14}$$

式中 S 为 V 的界面. 根据高斯定理, 可以把式 (3.5.14) 右端的面积分换成体积分. 于是得到

$$\delta\mathscr{T}^0=-(\mathscr{T}^0h^i)_{,i}. \tag{3.5.15}$$

下面将式 (3.5.15) 推广到 $h^0\neq 0$ 的情况. 我们注意到, 如果 h^μ 正比于 $\mathscr{T}^\mu$, 则物质元沿其世界线移动, 从而 $\mathscr{T}^\mu$ 不变. 这样, 式 (3.5.15) 应推广为

$$\delta\mathscr{T}^0=(\mathscr{T}^ih^0-\mathscr{T}^0h^i)_{,i}. \tag{3.5.16}$$

这是因为当 $h^0=0$ 时式 (3.5.16) 与式 (3.5.15) 相合; 而当 h^μ 正比于 $\mathscr{T}^\mu$ 时, 式 (3.5.16) 给出 $\delta\mathscr{T}^0=0$. 对于 $\mathscr{T}^\mu$ 的其他分量有相应的式子, 所以可写为

$$\delta\mathscr{T}^\mu=(\mathscr{T}^\nu h^\mu-\mathscr{T}^\mu h\nu)_{,\nu}. \tag{3.5.17}$$

量 $\mathscr{T}^\mu$ 是连续带电物质流作用量中的基本变量. 经过变分和适当的分部积分运算后, 令 h^μ 的系数等于零, 便给出电荷的运动方程.

对于带电物质连续分布的情况, 带电粒子的作用量 (3.5.10) 应写为

$$I_e = -\int \mathscr{T}^0 A_\mu u^\mu \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}s. \tag{3.5.18}$$

引进度规时可令

$$\mathscr{T}^\mu = \rho_e u^\mu \sqrt{-g}, \tag{3.5.19}$$

式中 ρ_e 为一标量, 表征电荷密度. 于是式 (3.5.18) 变为

$$\begin{aligned} I_e &= -\int \rho_e A_\mu u^\mu \sqrt{-g} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}s \\ &= -\int A_\mu \mathscr{T}^\mu \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

由此得

$$\begin{aligned} \delta I_e &= -\int \{\mathscr{T}^\mu \delta A_\mu + A_\mu (\mathscr{T}^\nu h^\mu - \mathscr{T}^\mu h^\nu)_{,\nu}\} \mathrm{d}^4 x \\ &= \int \{-\rho_e u^\mu \sqrt{-g} \delta A_\mu + A_{\mu,\nu} (\mathscr{T}^\nu h^\mu - \mathscr{T}^\mu h^\nu)\} \mathrm{d}^4 x \\ &= \int \rho_e (-u^\mu \delta A_\mu + F_{\mu\nu} u^\nu h^\mu) \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x. \end{aligned} \tag{3.5.21}$$

代入变分原理

$$\delta_I = \delta(I_g + I_{em} + I_\lambda + I_e + I_m) = 0, \tag{3.5.22}$$

式中括号内各项分别表示引力场、电磁场、真空场、电荷和物质场的作用量, 我们可以得到上述各类场和引力场相互作用的方程. 为此, 将前面得到的 $\delta I_g, \delta I_{em}, \delta I_\lambda, \delta I_e$ 和 δI_f[即式 (3.4.23)] 代入式 (3.5.22), 并注意到式 (3.5.17), 然后分别令 $\delta g_{\mu\nu}, \delta A_\mu$ 和 h^μ 的系数为零.

(1) $\delta g_{\mu\nu}$ 的系数为零给出

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}). \tag{3.5.23}$$

这就是有电磁场和物质场存在时的 Einstein-Maxwell 方程, 右端的 $T_{\mu\nu}$ 表示物质场的能量-动量张量.

(2) δA_μ 的系数为零给出

$$-\rho_e u^\mu + F^{\mu\nu}_{\nu} = 0 \tag{3.5.24}$$

由式 (3.5.19) 可知 $\rho_e u^\mu = J^\mu$ 为电流密度矢量, 因此式 (3.5.24) 即为引力场中的 Maxwell 方程

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = J^\mu. \tag{3.5.25}$$

至于另一组 Maxwell 方程, 很容易由 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性得到. 实际上, 由 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ 和 $\Gamma^\mu_{\sigma\tau} = \Gamma^\mu_{\tau\sigma}$ 得到

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} + \Gamma^\rho_{\nu\mu}F_{\rho\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu}F_{\nu\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}F_{\rho\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\lambda}F_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}F_{\rho\mu} = 0.$$

将这三个等于零的式子与狭义相对论中对应的方程

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \tag{3.5.26}$$

相加, 便得到

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 0. \tag{3.5.27}$$

这就是另一组 Maxwell 方程 (在引力场中).

(3) 式 (3.5.23) 中的连续物质的 $T_{\mu\nu}$ 可由与引入 $\mathscr{T}^\mu$ 类似的过程引入 ρ^μ 而得到 (零压情况), 其结果为

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \tag{3.5.28}$$

此时 h^μ 的系数为零给出

$$\rho u_{\mu;\nu}u^\nu + \rho_e F_{\mu\nu}u^\nu = 0,$$

即

$$-\rho u_{\mu;\nu}u^\nu + F_{\mu\nu}J^\nu = 0, \tag{3.5.29}$$

式中第二项给出洛伦兹力, 它使物质元的运动偏离短程线.

方程 (3.5.29) 也可由守恒定律得到. 即由

$$(\rho u^\mu u^\nu + E^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \tag{3.5.30}$$

导出. 由于

$$\begin{aligned}E^{\mu\nu}_{;\nu} =& F^{\mu\alpha}F^\nu_{\alpha;\nu} + F^{\mu\alpha}_{;\nu}F^\nu_\alpha - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta;\nu}\\ =& F^{\mu\alpha}F^\nu_{\alpha;\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\rho}F^{\nu\sigma}(F_{\rho\sigma;\nu} - F_{\rho\nu;\sigma} - F_{\nu\sigma;\rho})\\ =& -F^{\mu\alpha}J_\alpha,\end{aligned}$$

我们得到

$$u^\mu(\rho u^\nu)_{;\nu} + \rho u^\mu u^\nu_{;\nu} - F^{\mu\alpha}J_\alpha = 0. \tag{3.5.31}$$

式 (3.5.31) 乘以 u_μ 缩并, 并注意

$$u_\mu u^\nu_{;\sigma} = 0, \tag{3.5.32}$$

得到

$$(\rho u^\nu)_{;\nu} = -F^{\mu\alpha} u_\mu J_\alpha = 0. \tag{3.5.33}$$

这里用了条件 $J_\alpha = \rho_e u_\alpha$, 即 J_α 与 u_α 同一方向. 将式 (3.5.33) 代入式 (3.5.31), 便得到式 (3.5.29).

在这里, 我们选择自然单位制 ($c = G=1$).

3.6 物质的运动方程和物质场的能量–动量张量

当电磁场不存在时, 爱因斯坦引力场方程可写为 (对于零压流体)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi\rho u_\mu u_\nu. \tag{3.6.1}$$

从方程 (3.6.1) 可以导出物质守恒方程和物质运动方程 —— 短程线方程. 为此, 将方程两端求协变散度, 得到

$$(\rho u^\mu u^\nu)_{;\nu} = 0,$$

即

$$u^\mu (\rho u^\nu)_{;\nu} + \rho u^\nu u^\mu_{;\nu} = 0. \tag{3.6.2}$$

式 (3.6.2) 乘以 u_μ 缩并, 注意到 $u_\mu u^\mu_{;\nu} = 0$, 得到

$$(\rho u^\nu)_{;\nu} = 0, \tag{3.6.3}$$

此即物质守恒方程. 将此式代回式 (3.6.2), 便得到短程线方程

$$u^\nu u^\mu_{;\nu} = 0. \tag{3.6.4}$$

这就是说, 对于一个物质元, 把真空引力场方程应用到该物质元的周围空间, 则其运动被约束在一短程线上.

由场方程可以导出场源的运动方程, 或者说, 场方程中包含了场源的运动方程, 这是引力场特有的性质.

电磁场不具有上述性质. 由电磁场方程

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = J^\mu$$

求协变散度, 注意到 $F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$, 得到

$$J^{\mu}_{;\mu}=0, \tag{3.6.5}$$

这是电荷守恒定律. 由此可见, 电磁场方程本身只包含场源的守恒律, 与场源的运动方程无关. 这表明, 在电动力学中, 可以在满足守恒律的条件下任意给定场源 (电荷) 的分布和运动来求解场方程. 而在引力理论中, 引力场源 (物质系统) 的运动方程必须与引力场方程同时求解.

下面我们给出几种场源物质的能量–动量张量的具体形式.

各向同性理想流体的能量–动量张量与狭义相对论中的形式相同

$$T_{\mu\nu}=(\rho+p)u_\mu u_\nu-pg_{\mu\nu}. \tag{3.6.6}$$

式中, ρ 表示随动坐标系中的能量密度, p 是压强. 如果以 ρ 表示质量密度, 还常加内能项 $\rho\pi$.

在随动坐标系中, 流体的动量和能量流均为零, 所以

$$T_{0\mu}=T_{\mu 0}=0. \tag{3.6.7}$$

由于压强各向同性, 故有

$$T^{\nu}_{\mu}=T\delta^{\nu}_{\mu}. \tag{3.6.8}$$

于是 $T_{\mu\nu}$ 具有简单形式

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & p\end{pmatrix}. \tag{3.6.9}$$

沿 x 轴正方向以光速运动的相对论粒子, 其能量–动量张量可写为

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\rho & \rho & 0 & 0\\ \rho & \rho & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.6.10}$$

上述粒子沿 x 轴反方向运动时, 其能量–动量张量可写为

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\rho & -\rho & 0 & 0\\ -\rho & \rho & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.6.11}$$

所有方向的粒子流叠加, 便得到相对论气体的能量–动量张量 ($p = \rho/3$).

在洛伦兹系中, 沿 $x^1 = x$ 方向的纯磁场 ($H_y = H_z = E_i = 0$) 的能量–动量张量可写为

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \tag{3.6.12}$$

此式是式 (3.5.6) 的特殊情况. 式中 $\rho = \dfrac{H^2}{8\pi}$ 为能量密度. 沿 x 轴方向作用有负压力 ($T_{11} = -\rho$), 沿 y 轴和 z 轴作用有正压力 (ρ). 如果场强不是沿着一个确定的轴, 而是任意的, 则 $T_{\mu\nu}$ 中会有不为零的对角元素. 但是它的迹 T_i^i(在直角坐标系中等于 $-T_{11} - T_{22} - T_{33}$) 保持不变.

对于纯磁场, 将能量–动量张量按最大不均匀程度取平均, 我们得到

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho/3 \end{pmatrix}. \tag{3.6.13}$$

即纯磁场平均地看类似于气体, 它具有特殊的态方程 $p = \rho/3$. 我们重新得到了前边的结果.

3.7 Lie 导数和时空的对称性

对于坐标变换 $x \to x'$, 度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 变为 $g'_{\mu\nu}(x')$. 如果 $g'_{\mu\nu}(x)$ 作为 x 的函数的形式与 $g'_{\mu\nu}(x')$ 作为 x' 的函数的形式相同, 则将 $g'_{\mu\nu}(x')$ 中的 x' 换为 x 时, 所得函数 $g'_{\mu\nu}(x)$ 便与 $g_{\mu\nu}(x)$ 相等了

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x). \tag{3.7.1}$$

如果对于所有点 x^μ, 式 (3.7.1) 均成立, 则称度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 对于坐标变换 $x \to x'$ 是**形式不变的**(注意上述条件与标量的变换条件不同).

在任一点 x^μ, 度规的变换式为

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\sigma}(x), \tag{3.7.2}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\lambda\sigma}(x'). \tag{3.7.3}$$

将式 (3.7.1) 代入得

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\lambda\sigma}(x'). \tag{3.7.4}$$

满足式 (3.7.4) 的变换称为**等度量变换**.

在时空中同一点, 可以用两个坐标系 x^{μ} 和 x'^{μ} 来描述. 例如, 在 Minkowski 时空中的每一点, 既可用 $x^{\mu}=(ct,x,y,z)$ 描述, 也可用球坐标 $x'^{\mu}=(ct,r,\theta,\phi)$ 描述. 两坐标之间有确定的变换关系. 本节中我们引入一种本质不同的坐标变换, 从而引入 Lie 导数的概念, 以便用来讨论时空的对称性.

条件 (3.7.4) 对函数 $x'^{\mu}=x'^{\mu}(x)$ 是一个很复杂的限制. 为了使其简化, 我们讨论特殊情况. 考虑一坐标变换

$$\tilde{x}^{\mu} = \tilde{x}^{\mu}(\varepsilon; x), \tag{3.7.5}$$

式中

$$x^{\mu} = \tilde{x}^{\mu}(0; x), \tag{3.7.6}$$

ε 为一参量. 方程 (3.7.5) 表示变换 $x \to \tilde{x}$ 的一个单参量族.

设时空中有一点 P, 以坐标 x^{μ} 标志; 同一时空中我们指定另一点 Q, 以坐标 $\tilde{x}^{\mu}$ 标志. $\tilde{x}^{\mu}$ 和 x^{μ} 属于同一坐标系. 因此, 变换 (3.7.5) 表示一个**时空映射**(**向自身的**).

再考虑方程 (3.7.5) 的一个特殊情况 —— 无穷小变换

$$\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu}(x), \quad |\varepsilon| \ll 1. \tag{3.7.7}$$

这便是一个**无穷小映射**. 式中 ε 是一个无穷小参量, $\xi^{\mu}(x)$ 是一个逆变矢量场. $\xi^{\mu}(x)$ 由下式确定:

$$\xi^{\mu}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{3.7.8}$$

考虑同一时空中一个张量场 $T(x)$. 在点 $Q(\tilde{x}^{\mu})$, 我们可以用两种不同的方法确定张量 T 的值. 首先, 有坐标系 x^{μ} 中, 有 T 的值 $T(\tilde{x})$. 其次, 用通常坐标变换的方法得到 $\tilde{x}^{\mu}$ 系中 T 的值 $\tilde{T}(\tilde{x})$. 这样, 在坐标为 $\tilde{x}^{\mu}$ 的点 Q, 张量 T 有两个不同的值. 二者之差便给出张量 T 的**Lie 导数**的概念.

下面分别给出标量场、矢量场和张量场的 Lie 导数.

1. **标量场** $\phi(x)$

在点 Q, ϕ 的值为 $\phi(\tilde{x})$. 可将 $\phi(\tilde{x})$ 在 x^{μ} 处按 ε 作无限小展开

$$\phi(\tilde{x}) = \phi(x+\varepsilon\xi) = \phi(x) + \varepsilon \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^{\alpha}} \xi^{\alpha}. \tag{3.7.9}$$

另一方面, 按定义, 标量函数 ϕ 在坐标变换下是不变的, 即

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x). \tag{3.7.10}$$

式中 $\tilde{\phi}$ 是定值在点 Q 的一个函数, 其坐标为 $\tilde{x}^{\mu}$; 而 ϕ 是定值在点 P 的, 其坐标为 x^{μ}.

标量函数的 Lie 导数记作 $\mathscr{L}_{\xi}\phi(x)$, 其定义为

$$\mathscr{L}_{\xi}\phi(x) = \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\tilde{x}) - \tilde{\phi}(\tilde{x})}{\varepsilon}. \tag{3.7.11}$$

将式 (3.7.9) 和 (3.7.10) 代入式 (3.7.11) 得到

$$\mathscr{L}_{\xi}\phi(x) = \xi^{\alpha}(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^{\alpha}}. \tag{3.7.12}$$

即函数 ϕ 的 Lie 导数恰为矢量 ξ^{α} 和 ϕ 的梯度的标量积.

还可以用另一途径给出标量函数 ϕ 的 Lie 导数. 我们认为所有函数都定值在点 P. 这时函数 $\tilde{\phi}(\tilde{x})$ 展开为

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\tilde{x}) =& \tilde{\phi}(x+\varepsilon\xi)\\ =& \tilde{\phi}(x) + \varepsilon\xi^{\alpha}(x)\frac{\partial\tilde{\phi}(x)}{\partial x^{\alpha}} + o(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{3.7.13}$$

将式 (3.7.10) 代入得

$$\phi(x) - \tilde{\phi}(x) = \varepsilon\xi^{\alpha}(x)\frac{\partial\tilde{\phi}(x)}{\partial x^{\alpha}} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.14}$$

于是有

$$\mathscr{L}_{\xi}\phi(x) = \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(x) - \tilde{\phi}(x)}{\varepsilon} = \xi^{\alpha}(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^{\alpha}}. \tag{3.7.15}$$

在引力场中, 我们应该用协变导数代替式 (3.7.15) 中的偏导数. 注意到 $\phi(x)$ 的是标量函数, 式 (3.7.15) 可直接写为

$$\mathscr{L}_{\xi}\phi(x) = \xi^{\alpha}(x)[\phi(x)]_{;\alpha}. \tag{3.7.16}$$

按照标量函数 Lie 导数的定义式, 一般张量 T 的 Lie 导数定义为

$$\mathscr{L}_{\xi}T(x) = \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{T(x) - \tilde{T}(x)}{\varepsilon}. \tag{3.7.17}$$

下面讨论矢量和二阶张量的 Lie 导数表示式.

2. 逆变矢量场 A^μ

对于无限小坐标变换 (3.7.7), 矢量 A^μ 按下式变换:

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha(x). \tag{3.7.18}$$

由式 (3.7.7) 得

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta^\mu_\alpha + \varepsilon \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.19}$$

代入式 (3.7.18) 得

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x) + \varepsilon A^\alpha(x) \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.20}$$

将 $\tilde{A}^\mu(\tilde{x})$ 在点 x^μ 展开

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = \tilde{A}(x) + \varepsilon \xi^\alpha(x) \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\alpha} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.21}$$

比较式 (3.7.21) 和 (3.7.20), 得到

$$\tilde{A}^\mu(x) = A^\mu(x) + \varepsilon \left(A^\alpha \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} - \xi^\alpha \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} \right) + o(\varepsilon^2), \tag{3.7.22}$$

式中所有函数都定值在 P 点. 由此得

$$\mathscr{L}_\xi A = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A^\mu(x) - \tilde{A}(x)}{\varepsilon} = \xi^\alpha \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} - A^\alpha \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.23}$$

式 (3.7.23) 中的偏导数可代之以协变导数

$$\mathscr{L}_\xi A^\mu = \xi^\alpha A^\mu_{;\alpha} - A^\alpha \xi^\mu_{;\alpha}. \tag{3.7.24}$$

3. 协变矢量场 A_μ

按照同样的方法, 我们有

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} A_\alpha(x). \tag{3.7.25}$$

将式 (3.7.7) 对 $\tilde{x}^\nu$ 求导得

$$\delta^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} + \varepsilon \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}.$$

代入式 (3.7.25), 得到

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = A_\mu(x) - \varepsilon A_\alpha(x) \frac{\partial \xi^\alpha(x)}{\partial x^\mu} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.26}$$

将 $\tilde{A}(\tilde{x})$ 在 P 点展开

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \tilde{A}_\mu(x) + \varepsilon\xi^\alpha(x)\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\alpha} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.27}$$

比较式 (3.7.26) 和 (3.7.27) 得

$$\tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) - \varepsilon\left(A_\alpha\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \xi^\alpha\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha}\right) + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.28}$$

按定义 (3.7.17) 有

$$\mathscr{L}_\xi A_\mu = \xi^\alpha\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} + A^\alpha\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}, \tag{3.7.29}$$

式中的偏导数可代之以协变导数, 我们最后得到协变矢量的 Lie 导数

$$\mathscr{L}_\xi A_\mu = \xi^\alpha A_{\mu;\alpha} + A_\alpha\xi^\alpha_{;\mu}. \tag{3.7.30}$$

4. 二阶张量场 $T_{\mu\nu}$ 和 $T^{\mu\nu}$

对于无限小坐标变换 (3.7.7), $T_{\mu\nu}$ 的变换式为

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = T_{\mu\nu}(x) - \varepsilon\left(T_{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu} + T_{\alpha\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.31}$$

另一方面, 将 $\tilde{T}_{\mu\nu}(\tilde{x})$ 按 x^μ 展开, 得到

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \tilde{T}_{\mu\nu}(x) + \varepsilon\xi^\alpha\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.32}$$

比较上二式, 得到

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x) - \varepsilon\left(\xi^\alpha\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + T_{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu} + T_{\alpha\gamma}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.33}$$

于是有

$$\mathscr{L}_\xi T_{\mu\nu} = \xi^\alpha\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + T_{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu} + T_{\alpha\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}. \tag{3.7.34}$$

对于二阶逆变张量 $T^{\mu\nu}$, 类似地可以得到

$$\mathscr{L}_\xi T^{\mu\nu} = \xi^\alpha\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - T^{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\alpha} - T^{\alpha\nu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.35}$$

我们可以将上二式中的偏导数代之以协变导数

$$\mathscr{L}_\xi T_{\mu\nu} = \xi^\alpha T_{\mu\nu;\alpha} + T_{\mu\alpha}\xi^\alpha_{;\nu} + T_{\alpha\nu}\xi^\alpha_{;\mu}, \tag{3.7.36}$$

$$\mathscr{L}_\xi T^{\mu\nu} = \xi^\alpha T^{\mu\nu}_{;\alpha} - T^{\mu\alpha}\xi^\nu_{;\alpha} - T^{\alpha\nu}\xi^\mu_{;\alpha}. \tag{3.7.37}$$

对于度规张量场, 由上二式可得

$$\mathscr{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\nu;\mu}, \tag{3.7.38}$$

$$\mathscr{L}_\xi g^{\mu\nu} = -(\xi^{\nu;\mu} + \xi^{\mu;\nu}) \tag{3.7.39}$$

$$(\nabla^\mu = g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha).$$

5. 矢量和张量的积

可以证明, 矢量和张量的积的 Lie 导数满足下式:

$$\mathscr{L}_\xi(AT) = A\mathscr{L}_\xi T + (\mathscr{L}_\xi A)T. \tag{3.7.40}$$

作为例子, 我们计算 $\mathscr{L}_\xi(A^\alpha T_{\alpha\rho})$.

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_\xi(A^\alpha T_{\alpha\rho}) = \xi^\beta(A^\alpha T_{\alpha\rho})_{;\beta} + A^\alpha T_{\alpha\beta}\xi^\beta_{e\rho}\\
=&\xi^\beta(A^\alpha T_{\alpha\rho;\beta} + T_{\alpha\rho}A^\alpha_{;\beta}) + A^\alpha T_{\alpha\beta}\xi^\beta_{;\rho}\\
=&A^\alpha(\xi^\beta T_{\alpha\rho;\beta} + T_{\alpha\rho}\xi^\beta_{;\rho} + T_{\beta\rho}\xi^\beta_{;\alpha}) + T_{\alpha\rho}(\xi^\beta A^\alpha_{;\beta} - A^\beta\xi^\alpha_{;\beta})\\
=&A^\alpha\mathscr{L}_\xi T_{\alpha\rho} + (\mathscr{L}_\xi A^\alpha)T_{\alpha\rho}.
\end{aligned}$$

6. 标量密度 ($W = +1$)

设 A 为标量, 则其密度为

$$\mathscr{A} = \sqrt{-g}A.$$

将 $\tilde{\mathscr{A}}(\tilde{x})$ 在点 x^μ 展开, 得到

$$\tilde{\mathscr{A}}(\tilde{x}) = \tilde{\mathscr{A}}(x+\varepsilon\xi) = \tilde{\mathscr{A}}(x) + \varepsilon\xi^\alpha\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial x^\alpha} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.41}$$

另一方面, 函数 $\mathscr{A}$ 的变换为

$$\tilde{\mathscr{A}}(\tilde{x}) = \sqrt{-\tilde{g}(\tilde{x})}\tilde{A}(\tilde{x}) = \sqrt{-\tilde{g}(\tilde{x})}A(x). \tag{3.7.42}$$

由 $\tilde{g} = \left|\dfrac{\partial x}{\partial\tilde{x}}\right|^2 g$, 可将式 (3.7.42) 写为

$$\tilde{\mathscr{A}}(\tilde{x}) = \left|\frac{\partial x}{\partial\tilde{x}}\right|\sqrt{-g(x)}A(x) = \left|\frac{\partial x}{\partial\tilde{x}}\right|\mathscr{A}(x). \tag{3.7.43}$$

又由式 (3.7.7) 可得

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu} = \delta^\mu_\nu - \varepsilon\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu} + o(\varepsilon^2), \tag{3.7.44}$$

从而有

$$\left|\frac{\partial x}{\partial\tilde{x}}\right| = 1 - \varepsilon\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\mu} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.45}$$

将式 (3.7.45) 代入式 (3.7.43) 得

$$\tilde{\mathscr{A}}(\tilde{x}) = \mathscr{A}(x) - \varepsilon\mathscr{A}(x)\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\mu} + o(\varepsilon^2). \tag{3.7.46}$$

比较式 (3.7.41) 和 (3.7.46), 得到

$$\tilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A} - \varepsilon\left(\xi^\alpha \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x^\alpha} + \mathscr{A}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) + o(\varepsilon^2),$$

$$\mathscr{L}_\xi \mathscr{A} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathscr{A}(x) - \tilde{\mathscr{A}}(x)}{\varepsilon} = \xi^\alpha \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x^\alpha} + \mathscr{A}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.47}$$

我们可以将式 (3.7.47) 中的偏导数改写为协变导数

$$\mathscr{L}_\xi \mathscr{A} = \xi^\alpha \mathscr{A}_{;\alpha} + \mathscr{A}\xi^\alpha_{;\alpha}. \tag{3.7.48}$$

3.8 Killing 矢量

从本节开始, 我们应用 Lie 导数的概念讨论度规张量的对称性, 即讨论时空的对称性.

3.7 节开头我们谈到了等度量变换 (3.7.2) 或 (3.7.1). 按照 Lie 导数的定义, 无穷小变换

$$\tilde{x} = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu \tag{3.8.1}$$

为等度量变换的条件即度规张量的 Lie 导数等于零. 此时由式 (3.7.38) 有

$$\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0. \tag{3.8.2}$$

度规张量 $g_{\mu;\nu}(x)$ 在变换 (3.8.1) 下是形式不变的, 这就是说时空映射为其自身. 这种映射称为**共形映射**.

可以看出, 方程 (3.8.2) 的解 $\xi_\mu(x)$ 存在, 是时空中存在共形映射的条件. 方程 (3.8.2) 称为 **Killing方程**; 它的解 $\xi_\mu(x)$ 称为 **Killing矢量**. 当然, 给定一时空, Killing 方程不一定有解. 没有对称性的时空, 此方程无解.

一般地说, 如果存在 Killing 矢量, 即 Killing 方程有解, 则对应的时空具有确定的对称性.

Killing 方程 (3.8.2) 是对时空的很强的约束条件. 由这一方程, 我们可以从 ξ_μ 和 $\xi_{\mu;\nu}$ 的给定值来决定整个函数 $\xi_\mu(x)$. 下面我们论证这一点.

矢量 ξ_μ 的两次协变导数的对易式为

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} = R^\tau_{\mu\rho\sigma}\xi_{;\tau}. \tag{3.8.3}$$

将式 (3.8.3) 脚标作两次循环, 并将所得二式与式 (3.8.3) 相加, 得到 ξ_μ 须满足的式子

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} + \xi_{\sigma;\mu;\rho} - \xi_{\rho;\mu;\sigma} + \xi_{\rho;\sigma;\mu} - \xi_{\sigma;\rho;\mu} = 0. \tag{3.8.4}$$

将 Killing 方程 (3.8.2) 代入式 (3.8.4) 得

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} - \xi_{\sigma;\rho;\mu} = 0. \tag{3.8.5}$$

于是式 (3.8.3) 可写为

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} = R^{\tau}_{\mu\rho\sigma}\xi_{\tau}. \tag{3.8.6}$$

此式表明, 在某一给定的点 $\bar{x}$, 一旦给出 $\xi_\tau(\bar{x})$ 和 $\xi_{\tau;\lambda}(\bar{x})$, 便可求得 $\xi_\tau(x)$ 在点 $\bar{x}$ 处的二阶导数值. 再对式 (3.8.6) 求导数, 可继续求得 $\xi^{\varsigma}_{\tau}(x)$ 在 $\bar{x}$ 的高阶导数值. 这样, $\xi_\tau(x)$ 在 $\bar{x}$ 点的各阶导数值均可表示为 $\xi_\tau(\bar{x})$ 和 $\xi_{\tau;\lambda}(\bar{x})$ 的线性组合. 于是在点 $\bar{x}$ 的邻域内可将函数 $\xi_\tau(x)$ 表示为 $(x^\lambda - \bar{x}^\lambda)$ 的泰勒级数. 即任一度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的 Killing 矢量 $\xi^n_\rho(x)$ 可以写为

$$\xi^n_\rho(x) = M^\lambda_\rho(x;\bar{x})\xi^n_\lambda(\bar{x}) + N^{\lambda\nu}_\rho(x;\bar{x})\xi^n_{\lambda;\nu}(\bar{x}), \tag{3.8.7}$$

式中 M^λ_ρ 和 $N^{\lambda\nu}_\rho$ 是度规和 $\bar{x}$ 的函数, 但不含有 $\xi_\lambda(\bar{x})$ 和 $\xi_{\lambda;\nu}(\bar{x})$, 因此它们对于所有的 Killing 矢量都是相同的. 这就是说, 所有 Killing 矢量 $\xi_\rho(x)$ 都可由任一给定点 $\bar{x}$ 处的 $\xi_\rho(\bar{x})$ 和 $\xi_{\rho;\lambda}(\bar{x})$ 值唯一确定.

下面我们讨论 N 维空间中最多能有多少个 Killing 矢量. 考虑一组 Killing 矢量 $\xi^n_\mu(x)$, 其中 n 表示序号, 从 1 取到 M(即共有 M 个矢量). 对于每一个 n, 显然有 N 个独立的 $\xi^n_\mu(\bar{x})$. 注意到式 (3.8.2), 知 $\xi^n_{\mu;\nu}(\bar{x})$ 和 $\xi^n_{\nu;\mu}(\bar{x})$ 不是独立的. 因此, 独立的量 $\xi^n_{\mu;\nu}(\bar{x})$ 的个数等于

$$\mathrm{C}^2_N = \frac{1}{2}N(N-1), \tag{3.8.8}$$

式中 C^2_N 表示从 N 个元素中任取两个的组合数. 这样, 在式 (3.8.7) 的右端有 $N + \frac{N}{2}(N-1) = \frac{1}{2}N(N+1)$ 个独立的项 $\xi^n_\mu(\bar{x})$ 和 $\xi^n_{\mu;\nu}(\bar{x})$; 只能组成 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个独立的 Killing 矢量 $\xi^n_\mu(x)$. 这里我们不妨把 $\xi^n_\mu(\bar{x})$ 和 $\xi^n_{\mu;\nu}(\bar{x})$ 看作这 M 个矢量在 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 维空间中的分量. 如果 $M > \frac{1}{2}N(N+1)$, 则这 M 个矢量不可能是线性独立的, 所以它们必须满足关系式

$$C_n\xi^n_\rho(\bar{x}) = C_n\xi^n_{\rho;\nu}(\bar{x}) = 0 \quad (C_n\text{为常数}); \tag{3.8.9}$$

由式 (3.8.7) 知 Killing 矢量 $\xi^n_\rho(x)$ 处处满足条件

$$C_n\xi^n_\rho(x) = 0, \tag{3.8.10}$$

所以它们不是独立的 Killing 矢量. 至此, 我们证明了一个定理: **在 N 维空间中最多能有 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个独立的 Killing 矢量**. 这里独立的矢量定义为不满足任何常

系数线性关系 (3.8.10) 的矢量.

根据这一定理, 四维时空最多能有 10 个 Killing 矢量. 下面我们将求出四维 Minkowski 平直时空的 Killing 矢量. 这时 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$,

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&&&0\\&-1&&\\&&-1&\\0&&&-1\end{pmatrix}. \tag{3.8.11}$$

将式 (3.8.11) 代入 Killing 方程 (3.8.2) 并取 $\mu,\nu=0,1,2,3$, 得到 4 个方程

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x^0}=\frac{\partial\xi_1}{\partial x^1}=\frac{\partial\xi_2}{\partial x^2}=\frac{\partial\xi_3}{\partial\xi^3}=0 \tag{3.8.12}$$

和另外 6 个方程

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x^i}=-\frac{\partial\xi_i}{\partial x^0}, \tag{3.8.13}$$

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial x^k}=-\frac{\partial\xi_k}{\partial x^i}. \tag{3.8.14}$$

方程 (3.8.12) 的解具有形式

$$\begin{aligned}&\xi_0=\xi_0(x^i),\quad \xi_1=\xi_1(x^0,x^2,x^3),\\&\xi_2=\xi_2(x^0,x^1,x^3),\quad \xi_3=\xi_3(x^0,x^1,x^2).\end{aligned} \tag{3.8.15}$$

方程 (3.8.13) 的左端不含 x^0, 而右端不含 $x^i(i=1$ 或 2, 3), 所以两端都必须等于常数. 同理, 式 (3.8.14) 两端也都必须等于常数. 于是式 (3.8.13) 和 (3.8.14) 的解具有形式

$$\xi_\mu(x)=\alpha_{\mu\nu}x^\nu+\zeta_\mu, \tag{3.8.16}$$

式中 $\alpha_{\mu\nu}$ 和 ζ_μ 为常数, 且 $\alpha_{\mu\nu}=-\alpha_{\nu\mu}$. 式 (3.8.16) 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}\xi_0\\\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\alpha_{01}&\alpha_{02}&\alpha_{03}\\-\alpha_{01}&0&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\-\alpha_{02}&-\alpha_{12}&0&\alpha_{23}\\-\alpha_{03}&-\alpha_{13}&-\alpha_{23}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\zeta_0\\\zeta_1\\\zeta_2\\\zeta_3\end{pmatrix}. \tag{3.8.17}$$

逆变分量为

$$\xi^\mu(x)=\eta^{\mu\nu}\xi_\mu(x)=\alpha^\mu_\lambda x^\lambda+\zeta^\mu, \tag{3.8.18}$$

式中

$$\alpha^\mu_\lambda=\eta^{\mu\nu}\alpha_{\nu\lambda},\quad \zeta^\mu=\eta^{\mu\nu}\zeta_\nu. \tag{3.8.19}$$

式 (3.8.19) 可写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} \\ \alpha_{01} & 0 & -\alpha_{12} & \alpha_{31} \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & 0 & -\alpha_{23} \\ \alpha_{03} & -\alpha_{31} & \alpha_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta^0 \\ \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \end{pmatrix}. \tag{3.8.20}$$

式 (3.8.20) 明显地给出了 Killing 矢量的几何意义. 矢量 ζ^μ 显然描述 Minkowski 空间中沿 x^μ 轴的平移. 它们是 Poincare 群之平移子群的无限小生成元, 是 Minkowski 平直空间的对称群. 另外 6 个参量 $\alpha_{\mu\nu}$ 显然描述平直空间中的 6 个 Lorentz 转动. 它们中每一个描述一个三维转动或者一个均匀的 Lorentz 变换 (缩短). 其中 α_{23}, α_{31} 和 α_{12} 分别描述绕 $x^i(i=1,2,3)$ 轴的三维转动, 可以用矩阵表示为

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.8.21}$$

$\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}$ 分别描述沿 x^i 轴的 Lorentz 缩短, 可用矩阵表示为

$$\alpha^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8.22}$$

利用上二式, 可将式 (3.8.20) 改写为

$$\begin{aligned}(\xi^\mu) =& [(\alpha_{23}\alpha^1 + \alpha_{31}\alpha^2 + \alpha_{12}\alpha^3) \\ &+ (\alpha_{01}\alpha^4 + \alpha_{02}\alpha^5 + \alpha_{03}\alpha^6)](x^\mu) + (\zeta^\mu).\end{aligned} \tag{3.8.23}$$

为了说明无限小 Lorentz 矩阵的确满足通常均匀 Lorentz 群的对易关系, 我们令

$$J_l = \mathrm{i}\alpha^l (l = 1, 2, 3),$$

$$K_l = \mathrm{i}\alpha^p (p=4,5,6\text{分别与}l=1,2,3\text{对应}). \tag{3.8.24}$$

此时容易得到 $(l,m,n=1,2,3)$

$$[J_l, J_m] = \mathrm{i}\varepsilon_{lmn} J_n, \tag{3.8.25a}$$

$$[K_l, K_m] = -\mathrm{i}\varepsilon_{lmn} J_n, \tag{3.8.25b}$$

$$[J_l, K_m] = \mathrm{i}\varepsilon_{lmn} K_n, \tag{3.8.25c}$$

式中 $[A,B] \equiv AB - BA$.

令

$$J_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{lmn} J_{mn}, \quad K_l = \mathrm{i}J_{ol}, \tag{3.8.26}$$

式中 J_{lm} 关于脚标具有和 ε_{lm} 相同的对称性. 此时可将 (3.8.25) 诸式合写为一个式子

$$[J_{l\lambda}, J_{\mu\nu}] = \mathrm{i}(\delta_{l\mu} J_{\lambda\nu} + \delta_{\lambda\nu} J_{l\mu} - \delta_{l\nu} J_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu} J_{l\nu}). \tag{3.8.27}$$

用无限小矩阵 $\alpha^l (l=1,2,\cdots,6)$ 可表示三维有限转动和有限 Lorentz 变换

$$\begin{aligned}\alpha^l(\psi) =& \exp(\psi\alpha^l)\\ =& I + \psi\alpha^l + \frac{\psi^2}{2!}(\alpha^l)^2 + \frac{\psi^3}{3!}(\alpha^l)^3 + \cdots,\end{aligned} \tag{3.8.28}$$

式中 I 为 4×4 单位矩阵. 当 $l=1$ 时, 容易得到

$$\begin{aligned}(\alpha^1)^{2m+1} =& (-1)^m \alpha^1, \quad (\alpha^1)^{2m} = (-1)^{m+1}(\alpha^1)^2,\\ m =& 1,2,\cdots,\end{aligned} \tag{3.8.29}$$

式中 α^1 已由式 (3.8.21) 给出, 而 $(\alpha^1)^2$ 可写为

$$(\alpha^1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.8.30}$$

将式 (3.8.30) 和 (3.8.29) 代入式 (3.8.28) 得

$$\begin{aligned}\alpha^1(\psi) =& I + \left(\psi - \frac{1}{3!}\psi^3 + \cdots\right)\alpha^1\\ &+ \left(\frac{1}{2!}\psi^2 - \frac{1}{4!}\psi^4 + \cdots\right)(\alpha^1)^2\\ =& I + \sin\psi\alpha^1 + (1-\cos\psi)(\alpha^1)^2.\end{aligned} \tag{3.8.31}$$

写成矩阵形式即

$$\alpha^1(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}. \tag{3.8.32a}$$

用同样方法可以得到

$$\alpha^2(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, \tag{3.8.32b}$$

$$\alpha^3(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.8.32c}$$

$$\alpha^4(\psi) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\psi & \mathrm{sh}\psi & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\psi & \mathrm{ch}\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.8.32d}$$

$$\alpha^5(\psi) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\psi & 0 & \mathrm{sh}\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\psi & 0 & \mathrm{ch}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.8.32e}$$

$$\alpha^6(\psi) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\psi & 0 & 0 & \mathrm{sh}\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sh}\psi & 0 & 0 & \mathrm{ch}\psi \end{pmatrix}. \tag{3.8.32f}$$

由式 (3.8.28) 可知

$$\alpha^l = \left.\frac{\mathrm{d}\alpha^l(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\right|_{\phi=0} \quad (l = 1, 2, \cdots, 6). \tag{3.8.33}$$

式 (3.8.32a)~(3.8.32c) 中的 ψ 表示转动前后两个 Lorentz 标架间的夹角，而式 (3.8.32d)~(3.8.32f) 中的 ψ 表示相互运动的两个 Lorentz 标架间的转动角.

我们可以证明, 如果两坐标系的相对速度为 v, 则 ψ 和 v 之间存在关系式

$$\text{sh}\psi = \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \text{ch}\psi = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{3.8.34}$$

设两个坐标系间的变换以式 (3.8.32d) 表示, 且设 $x^0 = ct, x_1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, 则

$$\begin{aligned} ct' &= ct\text{ch}\psi + x\text{sh}\psi, \\ x' &= ct\text{sh}\psi + x\text{ch}\psi, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{3.8.35}$$

对于 x^μ 系原点有 $x = 0$, 代入式 (3.8.25) 得

$$\frac{x'}{t'} = -v = c\text{th}\psi, \tag{3.8.36}$$

从而得式 (3.8.34).

将式 (3.8.34) 代入式 (3.8.35) 便得到沿 x 轴运动的 Lorentz 变换式

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{3.8.37}$$

用同样方法可以得到沿 y 轴和 z 轴运动的 Lorentz 变换式.

至此, 我们得到了 Minkowski 空间中 Killing 方程的全部解 ——10 个 Killing 矢量, 它们表示 Poincare 群的 10 个参量. 这是四维空间中 Killing 方程所能有的最多的解. 因此, Minkowski 空间是具有最大对称性的时空.

为了使问题的表述更加明显, 我们解与空间 $E(2)$ 中欧几里得群对应的 Killing 方程.

在 $E(2)$ 中度规可写为

$$g_{ab} = \delta_{ab} \quad (a, b = 1, 2), \tag{3.8.38}$$

Killing 方程为

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial x^b} + \frac{\partial \xi^b}{\partial x^a} = 0, \tag{3.8.39}$$

即

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \frac{\partial \xi^2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \xi^1}{\partial y} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x} = 0. \tag{3.8.40}$$

由此得到

$$\xi^1 = \xi^1(y), \quad \xi^2 = \xi^2(x), \tag{3.8.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi^2(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}\xi^1(y)}{\mathrm{d}y}. \tag{3.8.42}$$

式 (3.8.42) 两端必须都等于一常数, 以 ϕ 表之, 积分得

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \phi x + A, \\ \xi^1 &= -\phi y + B. \end{aligned} \tag{3.8.43}$$

式中 A 和 B 均为常数. 这表明有三个参量来描述 $E(2)$ 中的无限小运动群. 参量 A 和 B 对应于沿 x 轴和 y 轴的平移变换, 参量 ϕ 对应于绕原点的转动.

上面的结果也可以写成共形映射 (3.7.7) 的形式. 这只要将式 (3.8.43) 代入式 (3.7.7) 即可. 首先令 $\phi = 0$, 代入式 (3.7.7) 得

$$\tilde{x} = x + \varepsilon A, \quad \tilde{y} = y + \varepsilon B, \tag{3.8.44}$$

此即平移变换. 再令 $A = B = 0$, 代入式 (3.7.7) 得

$$\tilde{x} = x - \varepsilon\phi y, \quad \tilde{y} = y + \varepsilon\phi x, \tag{3.8.45}$$

写成矩阵形式即

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon\phi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\phi & -\sin\varepsilon\phi \\ \sin\varepsilon\phi & \cos\varepsilon\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.8.46}$$

式 (3.8.46) 描述绕原点的无限小转动 (转动角为 $\varepsilon\phi$).

3.9　引力场的对称性

1. 几个基本概念

引力场就是时空度规张量场. 因此, 讨论引力场的对称性实际上就是讨论四维时空的对称性. 广义相对论中所研究的时空都是度规空间. 下面我们给出关于空间对称性的几个基本概念.

如果在度规空间中任一点 $\bar{x}$, 存在无限小等度量变换 (3.7.7), 把 $\bar{x}$ 变到它的邻域内任意其他点, 即该度规可使 Killing 矢量在任意点取一切可能值, 则此空间称**为均匀的**. 例如, 在 N 维空间中, 可以选一组 (N 个)Killing 矢量 $\xi_\sigma^{(\mu)}(x;\bar{x})$, 使得 $\xi_\sigma^{(\mu)}(\bar{x};\bar{x}) = \delta_\sigma^\mu$. 这些矢量显然是独立的, 因为任何关系式 $C_\mu\xi_\nu^{(\mu)}(x;\bar{x}) = 0$ 在 $x = \bar{x}$ 有 $C_\mu = 0$.

如果存在无限小等度量变换 (3.7.7), 使点 $\bar{x}$ 固定、$\xi^\mu(\bar{x})=0$, 且使 $\xi_{\mu;\nu}(\bar{x})$ 除满足 Killing 方程以外可以取一切可能值, 则称此度规空间为关于给定点 **$\bar{x}$各向同性的**. 例如, 在 N 维空间中, 可以选一组 $N(N-1)/2$ 个 Killing 矢量 $\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})$, 且有

$$\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x}) \equiv -\,\xi_\sigma^{(\nu\mu)}(x;\bar{x}), \tag{3.9.1}$$

$$\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(\bar{x};\bar{x}) \equiv 0, \tag{3.9.2}$$

$$\begin{aligned}\xi_{\sigma;\lambda}^{(\mu\nu)}(\bar{x};\bar{x}) &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\bigg|_{x=\bar{x}} \\ &\equiv \delta_\sigma^\mu\delta_\lambda^\nu - \delta_\lambda^\mu\delta_\sigma^\nu.\end{aligned} \tag{3.9.3}$$

这些 Killing 矢量都是独立的, 因为任何关系式 $c_{\mu\nu}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})=0$ 且 $c_{\mu\nu}=-c_{\nu\mu}$ 在 $\bar{x}$ 点必导致 $c_{\mu\nu}-c_{\nu\mu}=2c_{\mu\nu}=0$($c_{\mu\nu}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}$ 对 μ 和 ν 不取和, 下同).

如果空间中存在 Killing 矢量 $\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})$ 和 $\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x}+\mathrm{d}\bar{x})$, 它们分别在点 $\bar{x}$ 和 $\bar{x}+\mathrm{d}\bar{x}$ 满足上面的初始条件, 则称此空间是**每点各向同性的**. 这些 Killing 矢量的任何线性组合也是 Killing 矢量, 所以 $\dfrac{\partial\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})}{\partial x^\lambda}$ 也是该度规的 Killing 矢量.

由式 (3.9.2) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\bar{x}^\lambda}\xi^{(\mu\nu)}(\bar{x},\bar{x}) = &\left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\right]_{x=\bar{x}} \\ &+\left[\frac{\partial}{\partial\bar{x}^\lambda}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\right]_{x=\bar{x}}=0.\end{aligned}$$

从而有

$$\left[\frac{\partial}{\partial\bar{x}^\lambda}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\right]_{x=\bar{x}} = -\delta_\sigma^\mu\delta_\lambda^\nu + \delta_\lambda^\mu\delta_\sigma^\nu. \tag{3.9.4}$$

显然可找到一矢量 $\xi_\sigma(x)$

$$\xi_\sigma(x) = \frac{\alpha_\nu}{N-1}\frac{\partial}{\partial\bar{x}^\lambda}\xi_\sigma^{(\lambda\nu)}(x;\bar{x}), \tag{3.9.5}$$

该矢量在点 $x=\bar{x}$ 可以取任意值 α_ν. 因此, 任意一个**每点各向同性的空间必是均匀的**.

如果一空间的度规具有最大数目 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量, 则此空间称为**最大对称的**. **一个均匀且于某点各向同性的空间必是最大对称的**. 实际上, 一个空间既是均匀的又是在某点各向同性的, 就要求有 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量 $\xi_\sigma^{(\mu)}(x;\bar{x})$ 和 $\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})$. 这些 Killing 矢量显然是独立的. 因为假设它们间有一线性关系

$$c_\mu\xi_\sigma^{(\mu)}(x;\bar{x}) + c_{\mu\nu}\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x}) = 0, \tag{3.9.6}$$

$$c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu},$$

则对 x^λ 求导后令 $x = \bar{x}$ 得 $c_{\sigma\lambda} = 0$; 将 $x = \bar{x}$ 直接代入得 $c_\sigma = 0$. 即 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量不可能是线性相关的, 必是独立的. 下面的定理是明显成立的: **每点各向同性的空间必是最大对称的**.

下面我们证明此定理的逆定理: **最大对称空间必是均匀且每点各向同性的**. 设有 $N(N+1)/2$ 个独立的 Killing 矢量 $\xi_\sigma^n(x)$. 我们可以把 $\xi_\rho^n(x)$、$\xi_{\lambda;\nu}^n(x)$ 排成一个方阵; 用 n 标明 $N(N+1)/2$ 行, 用 N 个 ρ 和 $N(N-1)/2$ 个 λ 与 $\nu(\lambda > \nu)$ 标明 $N(N+1)/2$ 列. 这个方阵的行列式一定不等于零. 因为假若有

$$c_n \xi_\rho^n(\bar{x}) = c_n \xi_{\lambda;\nu}^n(\bar{x}) = 0,$$

则考虑到式 (3.8.7), 可导致 $c_n \xi_\rho^n(x) = 0$, 这与假设 Killing 矢量 $\xi_\sigma^n(x)$ 独立相矛盾. 因此对于任何"行矢量", 方程组

$$\mathrm{d}_n \xi_\mu^\nu(\bar{x}) = a_\mu, \tag{3.9.7}$$

$$\mathrm{d}_n \xi_{\mu;\nu}^n(\bar{x}) = b_{\mu\nu} \tag{3.9.8}$$

必定有解, 式中 a_μ 和 $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$ 为"行矢量"的"分量". 很容易找到一个 Killing 矢量 $\xi_\mu(x)$

$$\xi_\mu(x) = \mathrm{d}_n \xi_\mu^n(x), \tag{3.9.9}$$

它在点 $\bar{x}$ 取值 $\xi_\mu(\bar{x}) = a_\mu$, 它的导数在 $\bar{x}$ 点取值 $\xi_{\mu;\nu}(\bar{x}) = b_{\mu\nu}$. 由于 a_μ 是任意的, 所以空间是均匀的. $b_{\mu\nu}$ 也是任意的 (只要满足 $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$), 因此空间对点 $\bar{x}$ 是各向同性的.

作为最大对称空间的例子, 我们在 3.8 节中讨论了四维平直空间, 求出了 $N(N+1)/2 = 10$ 个 Killing 矢量. 为了使问题更加明显, 我们还讨论了 $E(2)$ 空间. 现在我们证明, 一个曲率张量为零的 N 维空间 (N 维平直空间) 一定是最大对称空间.

适当选择坐标系 (如 Descartes 坐标), 可使 N 维平直空间度规张量各分量均为常数, 且仿射联络为零. 此时方程 (3.8.6) 简化为

$$\frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\mu} = 0, \tag{3.9.10}$$

它的解具有形式

$$\xi_\mu(x) = \alpha_{\mu\nu} x^\nu + b_\mu. \tag{3.9.11}$$

式中 $\alpha_{\mu\nu}$ 和 b_μ 为积分常数. 将式 (3.9.11) 代入 Killing 方程, 得到

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}. \tag{3.9.12}$$

因此, 我们可以选取 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量

$$\xi_\mu^{(\nu)}(x) \equiv \delta_\mu^\nu, \quad \xi_\mu^{(\nu\lambda)}(x) \equiv \delta_\mu^\nu x^\lambda - \delta_\mu^\lambda x^\nu. \tag{3.9.13}$$

而一般的 Killing 矢量为

$$\xi_\mu(x) = b_\nu \xi_\mu^{(\nu)}(x) + a_{\nu\lambda}\xi_\mu^{(\nu\lambda)}(x). \tag{3.9.14}$$

式 (3.9.14) 中 $b_\nu\xi_\mu^{(\nu)}$ 不对 ν 取和. N 个 Killing 矢量 $\xi_\mu^{(\nu)}(x)$ 描述平移, $N(N-1)/2$ 个矢量 $\xi_\mu^{(\nu\lambda)}$ 描述无限小旋转, 对于 Minkowski 空间表示 Lorentz 变换. 因此, 任一 N 维平直空间存在 $N(N+1)/2$ 个独立的 Killing 矢量, 所以是最大对称空间.

一确定的空间中, 独立的 Killing 矢量的个数与坐标系的选择无关. 这就是说, 独立的 Killing 矢量的个数是空间的内禀属性. 现在我们说明这一点. 设 $\xi^\mu(x)$ 是空间度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的 Killing 矢量. 在坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu$ 下, 度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 变为

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x). \tag{3.9.15}$$

不难看出, 矢量

$$\xi'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha(x) \tag{3.9.16}$$

在坐标系 x'^μ 中满足 Killing 方程, 即矢量 $\xi'^\mu(x')$ 是度规 $g'_{\mu\nu}(x')$ 的 Killing 矢量. 各 Killing 矢量 $\xi'^\mu(x')$ 是独立的, 因为否则各 Killing 矢量 $\xi^\mu(x)$ 也不是独立的 (由 $\xi^{\mu'}(x')$ 之间的线性关系将导致 $\xi^\mu(x)$ 之间的线性关系).

由上面的讨论可以得出结论: 给定空间的最大对称性是空间的内禀属性, 与坐标系选择无关. 例如, 曲率张量为零的空间必是最大对称空间 (注意其逆定理不成立).

容易发现, 空间的均匀性和各向同性也都与坐标系的选择无关.

2. 常曲率空间

由式 (3.8.3) 有

$$\xi_{\rho;\mu;\sigma;\nu} - \xi_{\rho;\mu;\nu;\sigma} = R^\lambda_{\rho\sigma\nu}\xi_{\lambda;\mu} + R^\lambda_{\mu\sigma\nu}\xi_{\rho;\lambda}. \tag{3.9.17}$$

式 (3.8.6) 满足式 (3.9.17) 的充分且必要条件是

$$\begin{aligned}&R^\lambda_{\nu\rho\mu}\xi_{\lambda;\sigma} - R^\lambda_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda;\nu} + (R^\lambda_{\nu\rho\mu;\sigma} - R^\lambda_{\sigma\rho\mu;\nu})\xi_\lambda\\ =&R^\lambda_{\rho\sigma\nu}\xi_{\lambda;\mu} + R^\lambda_{\mu\sigma\nu}\xi_{\rho;\lambda}.\end{aligned} \tag{3.9.18}$$

将 Killing 方程代入式 (3.9.18) 得

$$\begin{aligned}&(R^\lambda_{\rho\sigma\nu}\sigma^\alpha_\mu - R^\lambda_{\mu\sigma\nu}\delta^\alpha_\rho + R^\lambda_{\sigma\rho\mu}\delta^\alpha_\nu - R^\lambda_{\nu\rho\mu}\delta^\alpha_\sigma)\xi_{\lambda;\alpha}\\ =&(R^\lambda_{\nu\rho\mu;\sigma} - R^\lambda_{\sigma\rho\mu;\nu})\xi_\lambda.\end{aligned} \tag{3.9.19}$$

前面已经证明, 在最大对称空间中任一点 x^μ, 我们可以找到 Killing 矢量 ξ_μ, 使得 $\xi_\mu(x)=0$. 再考虑到 $\xi_{\lambda;\alpha}(x)$ 是任意反对称矩阵, 可知式 (3.9.19) 中 $\xi_{\lambda;\alpha}(x)$ 的系数必有等于零的反对称部分, 即

$$\begin{aligned}&R^\lambda_{\rho\sigma\nu}\delta^\alpha_\mu-R^\lambda_{\mu\sigma\nu}\delta^\alpha_\rho+R^\lambda_{\sigma\rho\mu}\delta^\alpha_\nu-R^\lambda_{\nu\rho\mu}\delta^\alpha_\sigma\\=&R^\alpha_{\rho\sigma\nu}\delta^\lambda_\mu-R^\alpha_{\mu\sigma\nu}\delta^\lambda_\rho+R^\alpha_{\sigma\rho\mu}\delta^\lambda_\nu-R^\alpha_{\nu\rho\mu}\delta^\lambda_\sigma.\end{aligned}\tag{3.9.20}$$

前面还证明了, 在最大对称空间中任一给定的点 x 存在 Killing 矢量 $\xi_\mu,\xi_\mu(x)$ 可取任意值. 这样, 由式 (3.9.20) 和 (3.9.19) 得

$$R^\lambda_{\nu\rho\mu;\sigma}=R^\lambda_{\sigma\rho\mu;\nu}.\tag{3.9.21}$$

实际上前面已经证明了, 一个每点各向同性 [因而满足式 (3.90.20)] 的空间必是均匀的, 所以必满足式 (3.9.21).

将式 (3.9.20) 中的 α 与 μ 缩并, 得到

$$\begin{aligned}&NR^\lambda_{\rho\sigma\nu}-R^\lambda_{\rho\sigma\nu}+R^\lambda_{\sigma\rho\nu}-R^\lambda_{\nu\rho\sigma}\\=&R^\lambda_{\rho\sigma\nu}-R_{\sigma\rho}\delta^\lambda_\nu+R_{\nu\rho}\delta^\lambda_\sigma.\end{aligned}\tag{3.9.22}$$

利用曲率张量 $R^\lambda_{\rho\sigma\nu}$ 的性质得

$$(N-1)R_{\lambda\rho\sigma\nu}=R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}.\tag{3.9.23}$$

式 (3.9.23) 对 λ 和 ρ 反对称, 于是有

$$R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}=-R_{\nu\lambda}g_{\rho\sigma}+R_{\sigma\lambda}g_{\rho\sigma}.$$

对 λ 和 ν 缩并, 得到

$$\begin{aligned}R_{\sigma\rho}-NR_{\sigma\rho}&=-R^\lambda_\lambda g_{\sigma\rho}+R_{\rho\sigma},\\R_{\sigma\rho}&=\frac{1}{N}R^\lambda_\lambda g_{\sigma\rho}.\end{aligned}\tag{3.9.24}$$

将式 (3.9.24) 代入式 (3.9.23), 得到曲率张量的表达式

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu}=\frac{R^\lambda_\lambda}{N(N-1)}(g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}).\tag{3.9.25}$$

在每点各向同性的空间中, 式 (3.9.24) 和 (3.9.25) 处处成立. 不难证明, **在三维或高于三维($N\neq 2$)的空间中, R^λ_λ 必为常数**. 实际上由式 (3.9.24) 得到

$$\left(R^\sigma_\rho-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\rho R^\lambda_\lambda\right)_{;\sigma}=0,$$

即

$$\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{2}\right)R^{\lambda}_{\lambda;\sigma}=0,$$
$$\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}R^{\lambda}_{\lambda}=0. \tag{3.9.26}$$

由此得 $R^{\lambda}_{\lambda}=\text{const}$. 引入常曲率 K 代替 R^{λ}_{λ} 更加方便

$$R^{\lambda}_{\lambda}\equiv -N(N-1)K. \tag{3.9.27}$$

此时式 (3.9.24) 和 (3.9.25) 改写为

$$R_{\sigma\rho}=-(N-1)Kg_{\sigma\rho}, \tag{3.9.28}$$
$$R_{\lambda\rho\sigma\nu}=K(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}-g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}). \tag{3.9.29}$$

具有上述性质的空间称为**常曲率空间**.

由式 (3.9.26) 可知, 当 $N=2$ 时无法判定 R^{λ}_{λ} 是否为常数. 我们可以由式 (3.9.21) 出发, 证明 $N=2$ 的最大对称空间确实为常曲率空间, 即式 (3.9.29) 中的 K 为常数. 这一工作读者可自己完成.

关于最大对称空间, 存在下述定理 (唯一性定理): 最大对称空间由曲率常数 K 和度规张量的正、负特征值个数唯一确定. 根据这一定理, 我们只要随便用任何方式构成一个具有任意常曲率 K 的空间, 了解了它, 便了解了最大对称空间的普遍性质. 我们这样构成一常曲率空间. 先考虑一个 $N+1$ 维平直空间, 其度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=C_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x_{\nu}+K^{-1}\mathrm{d}z^2, \tag{3.9.30}$$

式中 $C_{\mu\nu}=\text{const}, K=\text{const}; \mu,\nu=1,2,\cdots,N$. 即由 N 个量 x^{μ} 和一个量 z 确定一个 $N+1$ 维空间的点. 用条件

$$KC_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}+z^2=1 \tag{3.9.31}$$

把一个 N 维非欧几里得空间嵌入这个高一维的空间中. 上述条件相当于把变量 x^{μ} 和 z 限制在一伪球 (或球) 的表面上, 在这一 N 维空间中 (上述伪球面上), $\mathrm{d}z^2$ 可写为

$$\mathrm{d}z^2=\frac{K^2(C_{\mu\nu}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu})^2}{z^2}=\frac{K^2(C_{\mu\nu}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu})^2}{1-KC_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}}. \tag{3.9.32}$$

将式 (3.9.32) 代入式 (3.9.30) 得

$$\mathrm{d}s^2=C_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}+\frac{K(C_{\alpha\beta}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta})^2}{(1-KC_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu})}. \tag{3.9.33}$$

因此度规可写为

$$g_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu} + \frac{KC_{\mu\alpha}C_{\nu\beta}}{1 - KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma}x^\alpha x^\beta. \tag{3.9.34}$$

式 (3.9.34) 给出了最一般的最大对称空间度规. 当 K=0 时, 式 (3.9.34) 退化为平直空间度规.

由上述构造过程可知式 (3.9.34) 允许有 $N(N+1)/2$ 个参量的等度量变换群. 因为 $N+1$ 维线元 (3.9.30) 与嵌入条件 (3.9.31) 在 $N+1$ 维空间里的"转动"下是不变的. 这些变换是

$$x'^\mu = R^\mu_\nu x^\nu + R^\mu_z z, \tag{3.9.35}$$

$$z' = R^z_\mu z^\mu + R^z_z z. \tag{3.9.36}$$

式中 $R^\lambda_\sigma = \text{const}$, 且满足下列方程:

$$C_{\mu\nu}R^\mu_\rho R^\nu_\sigma + K^{-1}R^z_\rho R^z_\sigma = C_{\rho\sigma}, \tag{3.9.37}$$

$$C_{\mu\nu}R^\mu_\rho R^\nu_z + KR^z_\rho R^z_z = 0, \tag{3.9.38}$$

$$C_{\mu\nu}R^\mu_z R^\nu_z + K^{-1}(R^z_z)^2 = K^{-1}. \tag{3.9.39}$$

我们可以将满足上三式的变换分为两类:

(1) $R^\mu_z = R^z_\mu = 0, \quad R^z_z = 1.$ (3.9.40)

此时有

$$C_{\mu\nu}R^\mu_\rho R^\nu_\sigma = C_{\rho\sigma}, \tag{3.9.41}$$

$$x'^\mu = R^\mu_\nu x^\nu. \tag{3.9.42}$$

可见矩阵 R^μ_ν($N \times N$ 矩阵) 表示绕原点的刚性"旋转".

(2) $R^\mu_z = a^\mu, \quad R^z_\mu = -KC_{\mu\nu}a^\nu,$

$$R^z_z = (1 - KC_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta)^{1/2}, R^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - bKC_{\nu\sigma}a^\sigma a^\mu, \tag{3.9.43}$$

式中 a^μ 是任意的, b 的表达式为

$$b \equiv \frac{1 - (1 - KC_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta)^{1/2}}{KC_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta}; \tag{3.9.44}$$

R^z_z 为实数, 即

$$KC_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta \leqslant 1. \tag{3.9.45}$$

这些变换是"平移"

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu\{(1 - KC_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta)^{1/2} - bKC_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta\}, \tag{3.9.46}$$

把原点 $x^\alpha=0$ 变为 $x'^\mu=a^\mu$.

注意到 a^μ 的任意性, 变换 (3.9.46) 的存在便表明了空间是均匀的. 变换 (3.9.42) 的存在表明该空间对原点是各向同性的. 因为度规是均匀的, 又是对原点各向同性的, 所以它是每点各向同性的, 也是最大对称的.

为了确定度规中常数 K 的含义, 我们寻求曲率张量 $R_{\lambda\nu\rho\sigma}$ 的表达式. 为此, 由式 (3.9.34) 先求出 $\Gamma^\lambda_{v\sigma}$

$$\Gamma^\lambda_{v\sigma}=Kx^\lambda g_{v\sigma}. \tag{3.9.47}$$

由此得到

$$\begin{aligned}R_{\lambda\nu\rho\sigma}=&K(C_{\lambda\sigma}C_{\nu\rho}-C_{\lambda\rho}C_{\nu\sigma})\\&+K^2(1-KC_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta)^{-1}(C_{\lambda\sigma}x_\nu x_\rho-C_{\lambda\rho}x_\nu x_\sigma\\&+C_{\nu\rho}x_\lambda x_\sigma-C_{\nu\sigma}x_\rho x_\lambda),\end{aligned} \tag{3.9.48}$$

即

$$R_{\lambda\nu\rho\sigma}=K(g_{\rho\nu}g_{\lambda\sigma}-g_{\sigma\nu}g_{\lambda\rho}). \tag{3.9.49}$$

将此式与式 (3.9.29) 比较, 可知度规 (3.9.34) 中的常数 K 就是式 (3.9.27) 中引入的曲率常数. K 是不依坐标系选择的常数. 因此, 在坐标变换下, 不同的度规必具有和式 (3.9.34) 相同的 K 值. 变换后得到的度规应和式 (3.9.34) 形式相同, 只是 $C_{\mu\nu}$ 不同. 对于线性变换 $x^\mu=\alpha^\mu_\nu x'^\nu, C_{\mu\nu}$ 变为

$$C'_{\mu\nu}=\alpha^\alpha_\mu\alpha^\beta_\nu C_{\alpha\beta}. \tag{3.9.50}$$

Sylvester 定理指出, 矩阵 (张量) 的正的、负的或为零的本征值的数目在上述线性变换下分别保持不变. 因此, 通过变换 (3.9.50) 可以把 $C_{\mu\nu}$ 变为我们所需要的任何一个实对称张量, 只要保持它的正、负特征值的个数不变. 由于空间是均匀的, 所以 $C_{\mu\nu}$ 的特征值个数与 $g_{\mu\nu}$ 在 $x=0$ 点的相同.

一个 N 维度规允许引入局部欧几里得坐标系, 其所有的特征值都是正的, 故当 $K\neq0$ 时可以取 $C_{\mu\nu}=\dfrac{\delta_{\mu\nu}}{|K|}$. 此时式 (3.9.33) 可改写为

$$\mathrm{d}s^2=\begin{cases}\dfrac{1}{K}\left(\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x^\mu+\dfrac{(x_\alpha\mathrm{d}x^\alpha)^2}{1-x_\mu x^\mu}\right), & K>0, \quad (3.9.51)\\ -\dfrac{1}{K}\left(\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x^\mu-\dfrac{(x_\alpha\mathrm{d}x^\alpha)^2}{1+x_\mu x^\mu}\right), & K<0, \quad (3.9.52)\\ \mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x^\mu. & K=0, \quad (3.9.53)\end{cases}$$

式中 $\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x^\mu=\delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$.

对于 $K>0$ 的情况, 将 $C_{\mu\nu}=\dfrac{\delta_{\mu\nu}}{|K|}$ 代入式 (3.9.30) 和 (3.9.31), 得到

$$\mathrm{d}s^2=\frac{1}{K}(\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x^\mu+\mathrm{d}z^2)\quad(\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x^\mu=\delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu)\tag{3.9.54}$$

和

$$x_\mu x^\mu+z^2=1\quad(x_\mu x^\mu=\ \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu).\tag{3.9.55}$$

因此, 式 (3.9.51) 可解释为嵌入平直空间 (3.9.54) 中的曲面 (3.9.55). 为了更加明显, 令 $x'^\mu=\dfrac{1}{\sqrt{K}}x^\mu, z'=\dfrac{1}{\sqrt{K}}z$, 则上面二式成为 (变换后去掉一撇号)

$$\mathrm{d}s^2=\delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu+\mathrm{d}z^2,\tag{3.9.54a}$$

$$\delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu=\frac{1}{K}.\tag{3.9.55a}$$

显然, 式 (3.9.51) 描述 $N+1$ 维欧几里得空间 (3.9.54a) 中半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$ 的球面. 对于 $(N+1)=3$ 的三维平直空间 (3.9.54a), 我们可以引入角坐标 θ,ϕ 和径坐标 r, 使

$$x^1=\sin\theta\cos\phi,\quad x^2=\sin\theta\sin\phi,\quad z=r.\tag{3.9.56}$$

此时曲面方程 (3.9.55) 化为

$$r^2=\cos^2\theta;\tag{3.9.57}$$

代入三维平直度规 (3.9.54), 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\frac{1}{K}(\mathrm{d}x^{1^2}+\mathrm{d}x^{2^2}+\mathrm{d}^{z^2})\\=&\frac{1}{K}-(\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2+\mathrm{d}\theta^2),\end{aligned}\tag{3.9.58}$$

这正是熟知的二维球面线元, 球面半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$.

现在我们讨论四维最大对称时空度规, 特征值取为一正三负. 令

$$C_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu},\tag{3.9.59}$$

则线元 (3.9.33) 可写为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j+\frac{K(t\mathrm{d}t-\delta_{ij}x^i\mathrm{d}x^j)^2}{1-K(t^2-\delta_{ij}x^ix^j)}.\tag{3.9.60}$$

令 $\boldsymbol{r}=(x^1,x^2,x^3)$, 则式 (3.9.60) 可写为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-(\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2+\frac{K(t\mathrm{d}t-\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2}{1-K(t^2-\boldsymbol{r}^2)}.\tag{3.9.61}$$

对于 $K>0$, 引入新坐标 $t', \boldsymbol{r}'$

$$\begin{aligned} t =&\frac{1}{\sqrt{K}}\left\{\frac{K{r'}^2}{2}\cosh(\sqrt{K}t')+\left(1+\frac{K{r'}^2}{2}\right)\cdot\sinh(\sqrt{K}t')\right\}, \\ \boldsymbol{r} =&\boldsymbol{r}'\exp(\sqrt{K}t'), \end{aligned} \tag{3.9.62}$$

度规 (3.9.61) 变换为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}{t'}^2-\exp(2\sqrt{K}t')(\mathrm{d}\boldsymbol{r}')^2. \tag{3.9.63}$$

再作一次坐标变换可以得到与时间无关的度规. 这一变换为

$$\begin{aligned} t''&=t'-\frac{1}{2\sqrt{K}}\ln[1-K{\boldsymbol{r}'}^2\exp(2\sqrt{K}t')], \\ \boldsymbol{r}''&=\boldsymbol{r}'\exp(\sqrt{K}t'); \end{aligned} \tag{3.9.64}$$

度规变为 (去掉 $t'', \boldsymbol{r}''$ 中的两撇号):

$$\mathrm{d}s^2=(1-Kr^2)\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}r^2-\frac{K(\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2}{1-Kr^2}. \tag{3.9.65}$$

度规 (3.9.63) 和 (3.9.65) 在处理稳恒态宇宙模型时是有用的, 它们曾为 de Sitter 研究过.

3. 最大对称子空间

在许多情况下, 整个时空不是最大对称的, 但它可以分解为一些最大对称的子空间族. 设 N 维空间中有一些 M 维的最大对称子空间. 我们可以用 $N-M$ 个坐标记号 v^α 来标记这些子空间, 用 M 个坐标 u^i 标记每个子空间中的点.

定理 在上述 N 维空间中, 总可以选择 M 个 u^i 坐标, 使这个 N 维空间的度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2=g_{ab}(v)\mathrm{d}v^a\mathrm{d}v^b+f(v)\tilde{g}_{ij}(u)\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j, \tag{3.9.66}$$

式中 $\tilde{g}_{ij}(u)$ 是 M 维最大对称空间的度规, $g_{ab}(v)$ 和 $f(v)$ 都只是 v 坐标的函数.

我们假设整个空间可以分解为一些每点各向同性的子空间. 这一假设在很多有物理意义的情况下都会满足. 这时在任一点 (v,u^0) 有 $\xi^{i(a)}=0$, 且有 $\xi_{i;j}$ 为任意反对称张量, $\xi^{(a)}$ 为整个 N 维空间的 Killing 矢量. 我们可以找到 $M(M-1)/2$ 个 Killing 矢量 $\xi^{(lm)}(u,v;u^0)$, 它们满足条件

$$\xi^{a(lm)}(u,v;u^0)=0, \tag{3.9.67}$$

$$\xi^{i(lm)}(u,v;u^0)=-\xi^{i(ml)}(u,v;u^0); \tag{3.9.68}$$

$$\xi^{(lm)}_{i;j}(u^0,v;u^0)\equiv g_{ij}(u^0,v)\left[\frac{\partial\xi^{k(lm)}(u,v;u^0)}{\partial u^j}\right]_{u=u^0}$$

$$=\delta_i^l\delta_j^m-\delta_i^m\delta_j^l. \tag{3.9.69}$$

又由 (1) 中的讨论可知, 整个空间的 Killing 矢量

$$\xi^{\mu(l)}(u,v;u^0)\equiv\frac{\partial}{\partial u^{0m}}\xi^{\mu(lm)}(u,v;u^0) \tag{3.9.70}$$

满足

$$\xi^{a(l)}(u,v;u^0)=0 \tag{3.9.71}$$

和

$$\xi^{i(l)}(u,v;u^0)=-\frac{1}{N-1}\tilde{g}^{il}(u^0,v). \tag{3.9.72}$$

Killing 矢量 $\xi^{\mu(lm)}$ 和 $\xi^{\mu(l)}$ 是独立的, 它们的总个数为 $M(M+1)/2$. 这就证明了上述 M 维空间是最大对称的.

在引力理论中, 最大子空间不是**时空**, 而是**空间**. 此时我们可以利用式(3.9.51)~(3.9.53) 来求出 $\tilde{g}_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$ 的形式. 这样, 考虑到式 (3.9.66), 我们得到

$$\mathrm{d}s^2=g_{ab}\mathrm{d}v^a\mathrm{d}v^b+f(v)\left[\mathrm{d}\boldsymbol{u}^2+\frac{k(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u})^2}{1-k\boldsymbol{u}^2}\right], \tag{3.9.73}$$

$$f(v)<0,[f(v)\text{代替}|K|^{-1}f(v)]$$
$$k=\begin{cases}+1, & \text{当 } M \text{ 空间的}K>0,\\ -1, & \text{当 } M \text{ 空间的}K<0,\\ 0, & \text{当 } M \text{ 空间的}K=0.\end{cases} \tag{3.9.74}$$

对于**球对称空间**, 设 $N=3, M=2$. 设 v 坐标为 r; u 坐标为 θ,ϕ. 定义

$$u^1=\sin\theta\cos\phi,\quad u^2=\sin\theta\sin\phi. \tag{3.9.75}$$

代入式 (3.9.73), 取 $k=+1$, 得

$$\mathrm{d}s^2=g(r)\mathrm{d}r^2+f(r)(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{3.9.76}$$

式中 $g(r)<0, f(r)<0$.

对于**球对称时空**, 设 $N=4$, 度规特征值为一正三负; $M=2$. 于是 v 坐标有 $N-M=2$ 个, 记为 r 和 t; u 坐标有 $M=2$ 个, 仍记为 θ 和 ϕ, u^1 和 u^2 的定义同式 (3.9.75). 将它们代入式 (3.9.73), 取 $k=+1$, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&g_{tt}(r,t)\mathrm{d}t^2+2g_{rt}(r,t)\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\&+g_{rr}(r,t)\mathrm{d}r^2+f(r,t)(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2),\end{aligned} \tag{3.9.77}$$

式中 $f(r,t)<0$.

对于**均匀球对称时空**, 设 $N=4$, 其度规特征值为一正三负, $M=3$. 此时有一个 v 坐标和三个 u 坐标. 由式 (3.9.73) 得

$$\mathrm{d}s^2=g(v)\mathrm{d}v^2+f(v)\left[\mathrm{d}\boldsymbol{u}^2+\frac{K(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u})^2}{1-K\boldsymbol{u}^2}\right], \tag{3.9.78}$$

式中 $g(v)>0, f(v)<0$. 定义

$$\begin{aligned}t&\equiv\int\sqrt{g(v)}\mathrm{d}v,\\ u^1&=r\sin\theta\cos\phi,\\ u^2&=r\sin\theta\sin\phi,\\ u^3&=r\cos\theta,\end{aligned} \tag{3.9.79}$$

则度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-R^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2}+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right), \tag{3.9.80}$$

式中 $R^2(t)=-f(v)$.

度规 (3.9.80) 是著名的 Robertson-Walker 度规. 由于它描述的时空是均匀、各向同性的, 因此在宇宙学中有重要意义. 对于球对称恒星的引力场, 采用随动坐标系, 可以由爱因斯坦引力场方程的严格解给出度规 (3.9.80).

4. 稳恒引力场

下面讨论两种基本类型的、具有特殊对称性的引力场. 在引力场 $g_{\mu\nu}$ 中, 如果允许有一类时 Killing 矢量场 ξ^μ 存在, 即如果 Killing 方程

$$\xi_{\nu;\mu}+\xi_{\mu;\nu}=0,\quad \xi^\mu\xi_\mu>0 \tag{3.9.81}$$

的解存在, 则这一引力场称为**稳恒引力场**, 或者称时空 $g_{\mu\nu}$ 为**稳恒时空**. 现在说明这一定义的物理含义.

考虑矢量场 $\xi^\mu(x)$ 的一条无限短的世界线 PQ. 我们建立一个坐标系 x^μ, 使 x^0 轴的方程沿着 PQ, 如图 3-1 所示. 沿着这条世界线 PQ 只有时间坐标发生变化, 而空间坐标 x^i 保持不变. 这是做得到的, 因为 ξ^μ 是类时 Killing 矢量. 我们还可以适当选择坐标轴上的长度单位, 使 $\xi^0=1$, 即

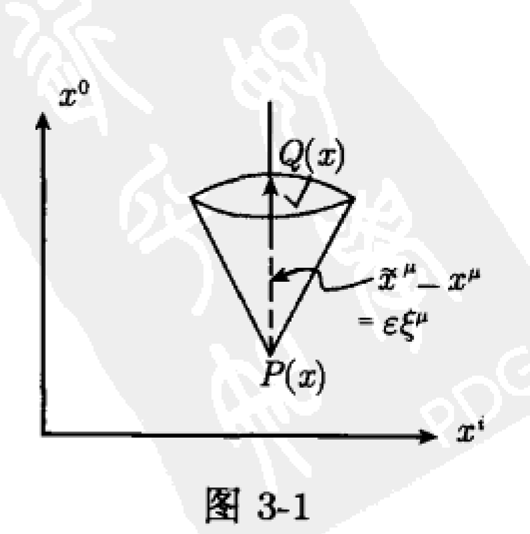


图 3-1

$$\xi^\mu=(1,0,0,0). \tag{3.9.82}$$

Killing 方程还可以写为

$$\xi^a_{;\nu}g_{\alpha\mu} + \xi^\alpha_{;\mu}g_{\alpha\nu} = 0,$$

即

$$\xi^\alpha_{,\nu}g_{\alpha\mu} + \xi^\alpha_{,\mu}g_{\alpha\nu} + (\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\xi^\sigma g_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\xi^\sigma_{\alpha\nu}) = 0.$$

由 $g_{\mu r;\sigma} = 0$ 知上式左端后一括号为 $\xi^\sigma g_{\mu\nu,\sigma}$, 从而有

$$\xi^\alpha g_{\mu\nu;\alpha} + g_{\mu\alpha}\xi^\alpha_{,\nu} + g_{\alpha\nu}\xi^\alpha_{,\mu} = 0. \tag{3.9.83}$$

将式 (3.9.82) 代入式 (3.9.83), 得到

$$g_{\mu\nu,0} = 0. \tag{3.9.84}$$

这样, 在我们所选定的坐标系中, **度规张量的所有分量 $g_{\mu\nu}$ 均不含时间坐标**.

我们指出, 满足式 (3.9.84) 的坐标系不止一个. 作变换

$$x'^0 = x^0 + f(x^i), \tag{3.9.85}$$

$$x'^i = x^i.$$

式中 $f(x^i)$ 为一任意形式的函数. 此时度规张量的变换式为

$$g'_{00} = g_{00}, g'_{0i} = g_{0i} - g_{00}\frac{\partial f}{\partial x^i},$$

$$g'_{ik} = g_{ik} - g_{0i}\frac{\partial f}{\partial x^k} - g_{0k}\frac{\partial f}{\partial x^i} + g_{00}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{3.9.86}$$

由此得到

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^0} = \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} = \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta^\alpha_0 = \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}. \tag{3.9.87}$$

将式 (3.9.86) 和 (3.9.84) 代入式 (3.9.87), 得到

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^0} = 0. \tag{3.9.88}$$

变换 (3.9.85) 表明, 在时空中可以任意选择时间的起点, 即 x^0 可以附加一个任意常数.

但是当改变 x^0 的符号时, 所得到的两个方向对于稳恒引力场是不等效的, 这是由于 $g_{0i} \neq 0$ 的缘故. 例如, Kerr 度规的情况. 当 $x^0 \to -x^0$ 时角速度的方向也要改变.

作为稳恒引力场的特殊情况, 当 Killing 矢量 ξ^μ 的世界线与超曲面族正交时, 这个稳态引力场称为**静态引力场**, 或称时空 $g_{\mu\nu}$ 为**静态时空**. 下面我们证明, 在静态引力场中一定存在一个坐标系, 使其中 $g_{0i} = 0$.

按定义, Killing 矢量 ξ^μ 和超曲面正交, 即

$$\xi^\mu(x) = \phi(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}, \tag{3.9.89}$$

式中 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 均为标量函数. 由此可得

$$\xi_{\tau,\nu} = \phi_{,\nu}\psi_{,\tau} + \phi\psi_{,\tau\nu}, \tag{3.9.90}$$

$$\xi_\mu\varepsilon_{\tau,\nu} = \phi\psi_{,\mu}(\phi_{,\nu}\psi_{,\tau} + \phi\psi_{,\tau\nu}). \tag{3.9.91}$$

由式 (3.9.91) 可得

$$\xi_{[\mu}\xi_{\tau,\nu]} \equiv \xi_\mu\xi_{\tau,\nu} + \xi_\nu\xi_{\mu,\tau} + \xi_\tau\xi_{\nu,\mu} - \xi_\nu\xi_{\tau,\mu} - \xi_\mu\xi_{\nu,\tau} - \xi_\tau\xi_{\mu\nu} = 0. \tag{3.9.92}$$

式 (3.9.92) 中的偏导数可代之以协变导数

$$\xi_{[\mu}\xi_{\tau;\nu]} = 0, \tag{3.9.93}$$

因为其中含 $\Gamma^\tau_{\alpha\beta}$ 的项互相抵消了.

将 Killing 方程代入式 (3.9.93), 得到

$$\xi_\mu\xi_{\tau;\nu} + \xi_\nu\xi_{\mu;\tau} + \xi_\tau\xi_{\nu;\mu} = 0. \tag{3.9.94}$$

将式 (3.9.94) 乘以 ξ^τ 缩并, 令 $\xi_\alpha\xi^\alpha \equiv \xi^2$, 得到

$$\xi_\mu\xi^\tau\xi_{\tau;\nu} - \xi_\nu\xi^\tau\xi_{\tau;\mu} + \xi^2\xi_{\nu;\mu} = 0 \tag{3.9.95}$$

和

$$\xi_\mu\xi_\tau\xi_{\tau;\nu} - \xi_\nu\xi_\tau\xi_{\tau;\mu} - \xi^2\xi_{\mu;\nu} = 0. \tag{3.9.96}$$

将式 (3.9.95) 和 (3.9.96) 相加, 得到

$$(\xi_\mu\xi^2_{;\nu} - \xi_\nu\xi^2_{;\mu}) + \xi^2(\xi_{\nu;\mu} - \xi_{\mu;\nu}) = 0. \tag{3.9.97}$$

在式 (3.9.97) 中, 由于含 $\Gamma^\tau_{\alpha\beta}$ 项互相抵消, 所以可将协变导数写为偏导数形式

$$(\xi_\mu\xi^2_{,\nu} - \xi_\nu\xi^2_{,\mu}) + \xi^2(\xi_{\nu,\mu} - \xi_{\mu,\nu}) = 0. \tag{3.9.98}$$

此式又可写成

$$\left(\frac{\xi_\nu}{\xi^2}\right)_{,\mu} - \left(\frac{\xi_\mu}{\xi^2}\right)_{,\nu} = 0. \tag{3.9.99}$$

此方程的解为

$$\frac{\xi_\mu}{\xi^2} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\mu}, \tag{3.9.100}$$

式中 $\psi(x)$ 为标量函数.

比较式 (3.9.100) 和 (3.9.89), 得 $\phi(x)=\xi^2(x)$. 选择一坐标系, 使 $\xi^\alpha=\delta_0^\alpha$, 则式 (3.9.100) 给出

$$\xi_\mu=\xi^2\psi_{,\mu}=g_{\mu\nu}\xi^\nu=g_{\mu 0}. \tag{3.9.101}$$

又因为

$$\xi^2=g_{\mu\nu}\delta_0^\mu\delta_0^\nu=g_{00}, \tag{3.9.102}$$

故有

$$g_{\mu 0}=g_{00}\psi_{,\mu}. \tag{3.9.103}$$

在式 (3.9.103) 中代入 $\mu=0$, 得到

$$\begin{aligned}&\psi_{,0}=1,\\&\psi(x)=x^0+f(x^i).\end{aligned} \tag{3.9.104}$$

选择一个坐标系 x'^μ, 使得

$$x'^0=x^0+f(x^i),\quad x'^k=x^k, \tag{3.9.105}$$

则有

$$g'_{0k}=g_{0k}-g_{00}f_{,k}. \tag{3.9.106}$$

将式 (3.9.104) 代入得

$$g'_{0k}=g_{0k}-g_{00}\psi_{,k}, \tag{3.9.107}$$

由式 (3.9.103) 知

$$g'_{0k}=0. \tag{3.9.108}$$

我们证明了, 在静态引力场中, 一定存在一个坐标系, 在其中, 引力场同时满足稳恒条件和时轴正交条件

$$g_{\mu\nu,0}=0,\quad g_{i0}=0. \tag{3.9.109}$$

3.10　引力场方程的正交标架形式

对于时空中同一点, 可以引入一局部惯性系 X^μ 和一任意坐标系 x^μ. 其线元分别表示为

$$\mathrm{d}s^2=\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}X^\mu\mathrm{d}X^\nu \tag{3.10.1}$$

和

$$\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu. \tag{3.10.2}$$

平直时空度规 $\eta_{\mu\nu}$ 和任意坐标的度规 $g_{\mu\nu}$ 之间有关系式

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}. \tag{3.10.3}$$

令

$$h^\alpha_\mu \equiv \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}, \quad h^\beta_\nu \equiv \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}, \tag{3.10.4}$$

则有

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}h^\alpha_\mu h^\beta_\nu = h_{\beta\mu}h^\beta_\nu, \tag{3.10.5}$$

式中 $h_{\beta\mu} \equiv \eta_{\alpha\beta}h^\alpha_\mu.h^\alpha_\mu$ 的指标由 $\eta_{\alpha\beta}$ 或 $\eta^{\alpha\beta}$ 进行下移或上移. 此时线元可写为

$$\mathrm{d}s^2 = h_{\beta\mu}h^\beta_\nu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{3.10.6}$$

此即**标架表象**. 脚标 α, β, γ 称为 Lorentz 脚标; 它们的上移和下移由 $\eta_{\alpha\beta}$ 和 $\eta^{\alpha\beta}$ 进行. 脚标 μ, ν, τ 等为协变脚标, 它们的上移和下移仍由 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 进行.

由式 (3.10.5) 可以得到行列式 $|h_{\alpha\mu}|$ 和 g 之间的关系

$$\begin{aligned} g = &|g_{\mu\nu}| = |\eta^{\beta\alpha}| \cdot |h_{\alpha\mu}| \cdot |h_{\beta\nu}| \\ = &- |h_{\alpha\mu}|^2, \end{aligned}$$

或者

$$|h_{\alpha\mu}| = \sqrt{-g}. \tag{3.10.7}$$

按定义, $h^\mu_\alpha \equiv g^{\mu\nu}h_{\alpha\nu}$, 由此可得

$$h^\alpha_\mu h^\nu_\alpha = \delta^\nu_\mu. \tag{3.10.8}$$

又由

$$g^{\mu\sigma} = \frac{A^{\mu\sigma}}{g} = \frac{A^{\mu\alpha}A^\sigma_\alpha}{h^2} \quad (h \equiv |h_{\alpha\mu}|), \tag{3.10.9}$$

式中 $A^{\mu\alpha}$ 和 A^σ_α 分别表示行列式 $|h_{\alpha\mu}|$ 中元素 $h_{\mu\alpha}$ 和 $h_{\alpha\sigma}$ 的代数余子式. 我们有

$$h^{\mu\alpha} = g^{\mu\sigma}h^\alpha_\sigma = \frac{A^{\mu\beta}A^\sigma_\beta}{h^2}h^\alpha_\sigma. \tag{3.10.10}$$

而

$$h^{\mu\alpha} = \frac{A^{\mu\alpha}}{h}, \tag{3.10.11}$$

所以有

$$\frac{A^\sigma_\beta}{h}h^\alpha_\sigma = \delta^\alpha_\beta, \tag{3.10.12}$$

即

$$h_{\mu}^{\alpha}h_{\beta}^{\mu}=\delta_{\beta}^{\alpha}. \tag{3.10.13}$$

式 (3.10.13) 和 (3.10.8) 表明, h_{μ}^{α} 无论对于协变脚标还是对于 Lorentz 脚标, 都是正交归一的, 故称**正交标架**.

考虑标架空间的一个仿射正交变换

$$\begin{aligned} h'_{\alpha\mu} &= \lambda_{\alpha}^{\beta}h_{\beta\mu}, \\ \lambda_{\alpha}^{\beta}\lambda_{\beta}^{\nu} &= \delta_{\alpha}^{\nu}. \end{aligned} \tag{3.10.14}$$

此时度规张量的变换式为

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} =&h'_{\alpha\mu}h_{\nu}^{\prime\alpha} = \lambda_{\alpha}^{\beta}\lambda_{\tau}^{\alpha}h_{\beta\mu}h_{\nu}^{\tau} \\ =&\delta_{\tau}^{\beta}h_{\beta\mu}h_{\nu}^{\tau} = h_{\tau\mu}h_{\nu}^{\tau} = g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.10.15a}$$

此式表明, **对于标架空间的仿射正交变换,** $g_{\mu\nu}$ **是一个不变量**.

设标架不动, 坐标变换 $x^{\mu}\to x'^{\mu}$, 此时有

$$h_{\mu}^{\prime\alpha}=\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}=\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}h_{\nu}^{\alpha}. \tag{3.10.15b}$$

这就是说, $h_{\alpha\mu}$**在坐标空间中是一协变矢量**.

现在我们给出曲率张量的正交标架形式. 和在坐标空间的情况类似, 由 $h_{\alpha\mu}$ 的协变导数不可对易便可给出曲率张量的表达式. 我们定义 $R_{\tau\mu\nu}^{\lambda}$

$$h_{\alpha\tau;\mu\nu}-h_{\alpha\tau;\nu\mu}=R_{\tau\mu\nu}^{\lambda}h_{\alpha\lambda}, \tag{3.10.16}$$

即

$$R_{\tau\mu\nu}^{\lambda}=h^{\alpha\lambda}(h_{\alpha\tau;\mu\nu}-h_{\alpha\tau;\nu\mu}). \tag{3.10.17}$$

由 $g_{,\lambda}^{\mu\nu}=0$ 可得

$$h_{\alpha;\lambda}^{\mu}h^{\alpha;\nu}+h_{\alpha}^{\mu}h_{;\lambda}^{\alpha\nu}=0.$$

从而有

$$\begin{aligned} (h_{\alpha}^{\nu}h_{;\lambda}^{\alpha\mu})_{;\nu} =&h_{\alpha;\nu}^{\nu}h_{;\lambda}^{\alpha\mu}+h_{\alpha}^{\nu}h_{;\lambda\nu}^{\alpha\mu} \\ =&-(h_{\alpha;\nu}^{\mu}h_{;\lambda}^{\alpha\nu}+h_{\alpha}^{\mu}h_{;\lambda\nu}^{\alpha\nu}), \end{aligned} \tag{3.10.18}$$

或者写成

$$h_{\alpha}^{\nu}h_{;\lambda\nu}^{\alpha\mu}=-(h_{\alpha;\nu}^{\nu}h_{;\lambda}^{\alpha\mu}+h_{\alpha\nu;}^{\mu}h_{;\lambda}^{\alpha\nu}+h_{\alpha}^{\mu}h_{;\lambda\nu}^{\nu\alpha}). \tag{3.10.19}$$

由式 (3.10.19) 和 (3.10.17), 得到

$$R_{\lambda}^{\mu}=h^{\alpha\nu}(h_{\alpha;\nu\lambda}^{\mu}-h_{\alpha;\lambda\nu}^{\mu})$$

$$=h^{\alpha\nu}_{;\nu}h^{\mu}_{\alpha;\lambda}+h^{\alpha\mu}_{;\nu}h^{\nu}_{\alpha;\lambda}+h^{\alpha\mu}h^{\nu}_{\alpha;\lambda\nu}+h^{\alpha\nu}h^{\mu}_{\alpha;\nu\lambda},\tag{3.10.20a}$$

再缩并得

$$R=h^{\alpha\nu}_{;\nu}h^{\mu}_{\alpha;\mu}+h^{\alpha\nu}_{;\mu}h^{\mu}_{\alpha;\nu}+2h^{\alpha\nu}h^{\mu}_{\alpha;\nu\mu}.\tag{3.10.20b}$$

由式 (3.10.20b) 可见, 无论在坐标空间还是在标架空间, R 都是标量.

下面我们给出引力场方程的正交标架形式. 引力场的拉格朗日 $L=L(g_{\mu\nu},g_{\mu\nu,\lambda})$, 而

$$g_{\mu\nu}=h^{\alpha}_{\mu}h_{\alpha\nu}.$$

现在对标架进行变分

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu}=&h^{\alpha}_{\mu}\delta h_{\alpha\nu}+(\delta h^{\alpha}_{\mu})h_{\alpha\nu}\\=&h^{\alpha}_{\mu}\delta h_{\alpha\nu}+h^{\alpha}_{\nu}\delta h_{\alpha\mu}\\=&h^{\alpha}_{\mu}\delta(g_{\rho\nu}h^{\rho}_{\alpha})+h^{\alpha}_{\nu}\delta(g_{\rho\mu}h^{\rho}_{\alpha})\\=&2\delta g_{\mu\nu}+(h^{\alpha}_{\mu}g_{\rho\nu}+h^{\alpha}_{\nu}g_{\rho\mu})h^{\rho}_{\alpha},\end{aligned}\tag{3.10.21}$$

即

$$\delta g_{\mu\nu}=-(h^{\alpha}_{\mu}g_{\rho\nu}+h^{\alpha}_{\tau}g_{\rho\mu})\delta h^{\rho}_{\alpha}.\tag{3.10.22}$$

将式 (3.10.22) 代入式 (3.4.13), 得到

$$\delta I_g=\int\sqrt{-g}(R^{\mu}_{\rho}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}R)h^{\alpha}_{\mu}\delta h^{\rho}_{\alpha}\mathrm{d}^4x.\tag{3.10.23}$$

此时式 (3.4.21) 和 (3.4.22) 为

$$\delta I_f=-k\int\sqrt{-g}T^{\mu}_{\rho}h^{\alpha}_{\mu}\delta h^{\rho}_{\alpha}\mathrm{d}^4x.\tag{3.10.24}$$

将式 (3.10.23) 和 (3.10.24) 代入 $\delta(I_{\rm g}+I_{\rm f})=0$, 得到

$$(R^{\mu}_{\rho}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}R)h^{\alpha}_{\mu}=kT^{\mu}_{\rho}h^{\alpha}_{\mu},\tag{3.10.25}$$

即

$$R^{\alpha}_{\rho}-\frac{1}{2}Rh^{\alpha}_{\rho}=kT^{\alpha}_{\rho}.\tag{3.10.26}$$

此即正交标架形式的 Einstein 引力场方程. 两端乘以 $h_{\alpha\lambda}$ 便得到坐标形式的场方程.

3.11 引力场方程的零标架形式

Einstein 引力场方程除了通常的张量形式外, 还常以其他形式给出, 其中一种很有用的形式是 Newman 和 Penrose 给出的零标架形式, 常称为 Newman-Penrose 方程.

1. 零标架

在四维时空中每一点, 引入一组矢量 l_μ, n_μ, m_m 和 $\bar{m}_\mu$ 构成一标架. 其中 l_μ 和 n_μ 为实的零矢量, m_μ 和 $\bar{m}_\mu$ 为一对复的零矢量. m_μ 由两个实的正交矢量 a_μ 和 b_μ 构成

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\mu - \mathrm{i}b_\mu). \tag{3.11.1}$$

标架 $(l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu)$ 满足准正交条件

$$\begin{aligned} &l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = l_\mu \bar{m}^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0, \\ &l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0, \\ &l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1. \end{aligned} \tag{3.11.2}$$

引入零标架符号

$$Z_{m\mu} = (l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu), \quad m = 1,2,3,4. \tag{3.11.3}$$

零标架指标 m 的升降由平直时空度规 η^{mn} 进行, η^{mn} 的形式为

$$\eta^{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \eta_{mn}. \tag{3.11.4}$$

度规张量 $g_{\mu\nu}$ 可表示为

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} =& Z_{m\mu} Z_{n\nu} \eta^{mn} \\ =& l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu n_\nu, \end{aligned} \tag{3.11.5}$$

$$\eta_{mn} = Z_{m\mu} Z_{n\nu} g^{\mu\nu}. \tag{3.11.6}$$

2. 旋系数

由这一标架可以定义复的 Ricci 旋系数 γ^{mnp}

$$\gamma^{mnp} = Z^m_{\mu;\nu} Z^{n\mu} Z^{p\nu}. \tag{3.11.7}$$

γ^{mnp} 具有反对称性

$$\gamma^{mnp} = -\gamma^{nmp}. \tag{3.11.8}$$

12 个旋系数表示为

$$\kappa = \gamma_{131} = l_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu, \tag{3.11.9a}$$

$$\rho = \gamma_{134} = l_{\mu;\nu} m^{\mu} \bar{m}^{\nu}, \tag{3.11.9b}$$

$$\sigma = \gamma_{133} = l_{\mu;\nu} m^{\mu} m^{\nu}, \tag{3.11.9c}$$

$$\tau = \gamma_{132} = l_{\mu;\nu} m^{\mu} n^{\nu}, \tag{3.11.9d}$$

$$\nu = -\gamma_{242} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^{\mu} n^{\nu}, \tag{3.11.9e}$$

$$\mu = -\gamma_{243} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^{\mu} m^{\nu}, \tag{3.11.9f}$$

$$\lambda = -\gamma_{244} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^{\mu} \bar{m}^{\nu}, \tag{3.11.9g}$$

$$\pi = -\gamma_{241} = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^{\mu} l^{\nu}, \tag{3.11.9h}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{124} - \gamma_{344}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^{\mu} \bar{m}^{\nu} - m_{\mu;\nu} \bar{m}^{\mu} \bar{m}^{\nu}), \tag{3.11.9i}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma_{123} - \gamma_{343}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^{\mu} m^{\nu} - m_{\mu;\nu} \bar{m}^{\mu} m^{\nu}), \tag{3.11.9j}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{122} - \gamma_{342}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^{\mu} n^{\nu} - m_{\mu;\nu} \bar{m}^{\mu} n^{\nu}), \tag{3.11.9k}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{121} - \gamma_{341}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^{\mu} l^{\nu} - m_{\mu;\nu} \bar{m}^{\mu} l^{\nu}). \tag{3.11.9l}$$

3. 张量和方向导数

任一张量 $T_{\mu\nu\cdots}$ 的标架分量定义为

$$T_{mn\cdots} = T_{\mu\nu\cdots} Z^{\mu}_{m} Z^{\nu}_{n} \cdots . \tag{3.11.10}$$

在坐标空间中 Weyl 张量表示为

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\rho\mu} R_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} R_{\sigma\mu} - g_{\sigma\mu} R_{\rho\nu} + g_{\sigma\nu} R_{\rho\mu}) - \frac{1}{6}(g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu} - g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu}) R.$$

在零标架中具有形式

$$C_{mnpq} = R_{mnpq} - \frac{1}{2}(\eta_{mp} R_{nq} - \eta_{mq} R_{np} - \eta_{np} R_{mq} + \eta_{nq} R_{mp}) - \frac{1}{6}(\eta_{mq} \eta_{np} - \eta_{mp} \eta_{nq}). \tag{3.11.11}$$

利用 Weyl 张量的无迹性和恒等式

$$\eta^{mn} C_{mpqn} = C_{1pq2} + C_{2pq1} - C_{3pq4} - C_{4pq3} = 0,$$
$$C_{1234} + C_{1423} + C_{1342} = 0,$$

我们得到

$$C_{1314} = C_{1413} = C_{2324} = C_{2423} = C_{1323} = C_{1424} = 0,$$

$$C_{1313} = \bar{C}_{1414}, \quad C_{1213} = C_{1343} = \bar{C}_{1434} = \bar{C}_{1214},$$
$$C_{1242} = C_{2434} = \bar{C}_{1232} = \bar{C}_{2343}, \quad C_{2424} = C_{2323},$$
$$C_{1342} = \frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = \frac{1}{2}(C_{3434} - C_{1234}).$$

Weyl 张量的 5 个独立分量可写为

$$\Psi_0 = -C_{1313} = -C_{\mu\nu\tau\lambda} l^\mu m^\nu l^\tau m^\lambda, \tag{3.11.11a}$$

$$\Psi_1 = -C_{1213} = -C_{\mu\nu\tau\lambda} l^\mu n^\nu m^\nu m^\lambda, \tag{3.11.11b}$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = -\frac{1}{2} C_{\mu\nu\tau\lambda} l^\mu n^\nu (l^\tau n^\lambda - m^\tau \bar{m}^\lambda), \tag{3.11.11c}$$

$$\Psi_3 = -C_{1242} = -C_{\mu\nu\tau\lambda} \bar{m}^\mu n^\nu l^\tau n^\lambda, \tag{3.11.11d}$$

$$\Psi_4 = -C_{2424} = -C_{\mu\nu\tau\lambda} \bar{m}^\mu n^\nu \bar{m}^\tau n^\lambda. \tag{3.11.11e}$$

Ricci 张量的 6 个独立分量为

$$\Phi_{00} = -\frac{1}{2} R_{11} = \bar{\Phi}_{00}, \tag{3.11.12a}$$

$$\Phi_{11} = -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}), \tag{3.11.12b}$$

$$\Phi_{01} = -\frac{1}{2} R_{13} = \bar{\Phi}_{10}, \tag{3.11.12c}$$

$$\Phi_{12} = -\frac{1}{2} R_{23}, \tag{3.11.12d}$$

$$\Phi_{10} = -\frac{1}{2} R_{14} = \bar{\Phi}_{01}, \tag{3.11.12e}$$

$$\Phi_{21} = -\frac{1}{2} R_{24}, \tag{3.11.12f}$$

$$\Phi_{02} = -\frac{1}{2} R_{33} = \bar{\Phi}_{20}, \tag{3.11.12g}$$

$$\Phi_{22} = -\frac{1}{2} R_{22}, \tag{3.11.12h}$$

$$\Phi_{20} = -\frac{1}{2} R_{44}, \tag{3.11.12i}$$

标曲率为

$$\Lambda = \frac{R}{24}. \tag{3.11.12j}$$

任意标量的方向导数定义为

$$D\phi = \phi_{;\mu} l^\mu = \phi_{,\mu} l^\mu, \tag{3.11.13a}$$

$$\Delta\phi = \phi_{;\mu} n^\mu = \phi_{,\mu} n^\mu, \tag{3.11.13b}$$

$$\delta\phi = \phi_{;\mu} m^\mu = \phi_{,\mu} m^\mu, \tag{3.11.13c}$$

$$\bar{\delta}\phi = \phi_{;\mu}\bar{m}^{\mu} = \phi_{,\mu}\bar{m}^{\mu}, \tag{3.11.13d}$$

或者写为

$$\begin{aligned} D = & \quad l^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \quad \Delta = n^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \\ \delta = & \quad m^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \quad \bar{\delta} = \bar{m}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}. \end{aligned} \tag{3.11.13}$$

4. Newman-Penrose 方程

应用前面定义的符号, 可以把 Einstein 引力场方程写成零标架形式, 这就是 Newman-Penrose 方程. 这是一组一阶偏微分方程, 含有 5 个 Weyl 张量的标架分量, 6 个独立的 Einstein 张量分量, 标曲率 Λ 和 12 个复的旋系数.

Newman-Penrose 方程分为三组: 对易关系, Ricci 恒等式和 Bianchi 恒等式.

1) 对易关系

按定义有

$$\phi^{;m} = \phi_{;\mu}Z^{m\mu}, \tag{3.11.14}$$

于是可以得到 $\phi^{;m;n}$ 和 $\phi^{;n;m}$ 的表达式

$$\phi^{;m;n} = (\phi_{;\mu}Z^{m\mu})_{;\nu}Z^{n\nu} = \phi_{;\mu\nu}Z^{m\mu}Z^{n\tau} + \phi^{;l}\gamma_{l}^{mn}, \tag{3.11.15}$$

$$\phi^{;n;m} = (\phi_{;\nu}Z^{n\nu})_{;\mu}Z^{m\mu} = \phi_{;\nu\mu}Z^{m\mu}Z^{n\nu} + \phi^{;l}\gamma_{l}^{nm}.$$

由式 (3.11.15) 得

$$\phi^{;m;n} - \phi^{;n;m} = \phi^{;l}(\gamma_{l}^{mn} - \gamma_{l}^{nm}). \tag{3.11.16}$$

在此式中取 $(m,n) = (1,2),(2,4),(1,4),(3,4)$, 得到

$$(\Delta D - D\Delta)\phi = [(\gamma + \bar{\gamma})D + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Delta - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta} - (\bar{\tau} + \pi)\delta]\phi, \tag{3.11.17a}$$

$$(\delta D - D\delta)\phi = [(\bar{\alpha} + \beta - \pi)D + \kappa\Delta - \sigma\bar{\delta} - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\delta]\phi, \tag{3.11.17b}$$

$$(\delta\Delta - \Delta\delta)\phi = [-\bar{\nu}D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + \bar{\lambda}\bar{\delta} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta]\phi, \tag{3.11.17c}$$

$$(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})\phi = [(\bar{\mu} - \mu)D + (\bar{\rho} - \rho)\Delta - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\delta} - (\bar{\beta} - \alpha)\delta]\phi. \tag{3.11.17d}$$

2) Ricci 恒等式和旋系数方程

根据 Ricci 恒等式

$$Z_{m\mu;[\nu\rho]} = \frac{1}{2}Z_{m\sigma}R^{\sigma}_{\nu\mu\rho}, \tag{3.11.18}$$

可得 Riemann 张量的标架形式

$$R^{mnpq} = \gamma^{mnp;q} - \gamma^{mnq;p} + \gamma_{l}^{mq}\gamma^{lnp} - \gamma_{l}^{mp}\gamma^{lnq}$$

$$+\gamma^{mnl}(\gamma_l^{pq}-\gamma_l^{qp}). \tag{3.11.19}$$

将式 (3.11.11) 代入式 (3.11.19), 得到

$$\begin{aligned}&\gamma_{mn[p;q]}+\gamma_{lmq}\gamma^l_{np}-\gamma_{lmp}\gamma^l_{nq}+\gamma^l_{mn}(\gamma_{lpq}-\gamma_{lqp})\\&=C_{mnpq}-\frac{1}{2}(\eta_{mp}R_{nq}-\eta_{mq}R_{np}+\eta_{nq}R_{mp}-\eta_{np}R_{mq})\\&\quad-\frac{1}{6}R(\eta_{mq}\eta_{np}-\eta_{mp}\eta_{nq}).\end{aligned} \tag{3.11.20}$$

在式 (3.11.20) 中取

$(m,n,p,q)=(1,3,4,1),(1,3,3,1),(1,3,2,1),[(1,2,4,1)-(3,4,4,1)],[(1,2,3,1,)-(3,4,3,1)],[(1,2,2,1)-(3,4,2,1)],(2,4,4,1),(2,4,3,1),(2,4,2,1),(2,4,4,2),(1,3,4,3),[(1,2,4,3)-(3,4,4,3)],(2,4,4,3),(2,4,2,3,),[(1,2,2,3)-(3,4,2,3)],(1,3,2,3),(1,3,4,2),[(1,2,4,2)-(3,4,4,2)]$, 注意到旋系数、Weyl 张量和 Ricci 张量的标架表达式, 我们得到下面一组方程:

$$D\rho-\bar{\delta}\kappa=(\rho^2+\sigma\bar{\sigma})+(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\rho-\bar{\kappa}\tau-\kappa(3\alpha+\bar{\beta}-\pi)+\Phi_{00}, \tag{3.11.21a}$$

$$D\sigma-\delta\kappa=(\rho+\bar{\rho})\sigma+(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})\sigma-(\tau-\pi+\bar{\alpha}+3\beta)\kappa+\Psi_0, \tag{3.11.21b}$$

$$D\tau-\Delta\kappa=(\tau+\bar{\pi})\rho+(\bar{\tau}+\pi)\sigma+(\varepsilon-\bar{\varepsilon})\tau-(3\gamma+\bar{\gamma})\kappa+\Psi_1+\Phi_{01}, \tag{3.11.21c}$$

$$D\alpha-\bar{\delta}\varepsilon=(\rho+\bar{\varepsilon}-2\varepsilon)\alpha+\beta\bar{\sigma}-\bar{\beta}\varepsilon-\kappa\lambda-\bar{\kappa}\gamma+(\varepsilon+\rho)\pi+\Phi_{10}, \tag{3.11.21d}$$

$$D\beta-\delta\varepsilon=(\alpha+\pi)\sigma+(\bar{\rho}-\bar{\varepsilon})\beta-(\mu+\gamma)\kappa-(\bar{\alpha}-\bar{\pi})\varepsilon+\Psi_1, \tag{3.11.21e}$$

$$D\gamma-\Delta\varepsilon=(\tau+\bar{\pi})\alpha+(\bar{\tau}+\pi)\beta-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\gamma-(\gamma+\bar{\gamma})\varepsilon+\tau\pi-\nu\kappa+\Psi_2-\Lambda+\Phi_{11}, \tag{3.11.21f}$$

$$D\lambda-\bar{\delta}\pi=(\rho\lambda+\bar{\sigma}\mu)+\pi^2+(\alpha-\bar{\beta})\pi-\nu\bar{\kappa}-(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})\lambda+\Phi_{20}, \tag{3.11.21g}$$

$$D\mu-\delta\pi=(\bar{\rho}\mu+\sigma\lambda)+\pi\bar{\pi}-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\mu-\pi(\bar{\alpha}-\beta)-\nu\kappa+\Psi_2+2\Lambda, \tag{3.11.21h}$$

$$D\nu-\Delta\pi=(\pi+\bar{\tau})\mu+(\bar{\pi}+\tau)\lambda+(\gamma-\bar{\gamma})\pi-(3\varepsilon+\bar{\varepsilon})\nu+\Psi_3+\Phi_{21}, \tag{3.11.21i}$$

$$D\lambda-\bar{\delta}\nu=-(\mu+\bar{\mu})\lambda-(3\gamma-\bar{\gamma})\lambda+(3\alpha+\bar{\beta}+\pi-\bar{\tau})\nu-\Psi_4, \tag{3.11.21j}$$

$$\delta\rho-\bar{\delta}\sigma=\rho(\bar{\alpha}+\beta)-\sigma(3\alpha-\bar{\beta})+(\rho-\bar{\rho})\tau+(\mu-\bar{\mu})\kappa-\Psi_1+\Phi_{10}, \tag{3.11.21k}$$

$$\delta\alpha-\bar{\delta}\beta=(\mu\rho-\lambda\sigma)+\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-2\alpha\beta+\gamma(\rho-\bar{\rho})+\varepsilon(\mu-\bar{\mu})-\Psi_2+\Lambda+\Phi_{11}, \tag{3.11.21l}$$

$$\delta\lambda-\bar{\delta}\mu=(\rho-\bar{\rho})\nu+(\mu-\bar{\mu})\pi+\mu(\alpha+\bar{\beta})+\lambda(\bar{\alpha}-3\beta)-\Psi_3+\Phi_{21}, \tag{3.11.21m}$$

$$\delta\nu-\Delta\mu=(\mu^2+\lambda\bar{\lambda})+(\gamma+\bar{\gamma})\mu+\bar{\nu}\pi+(\tau-3\beta-\bar{\alpha})\nu+\Phi_{22}, \tag{3.11.21n}$$

$$\delta\gamma-\Delta\beta=(\tau-\bar{\alpha}-\beta)\gamma+\mu\tau-\sigma\nu-\varepsilon\bar{\nu}-\beta(\gamma-\bar{\gamma}-\mu)+\alpha\bar{\lambda}+\Phi_{12}, \tag{3.11.21o}$$

$$\delta\tau-\Delta\sigma=(\mu\sigma+\bar{\lambda}\rho)+(\tau+\beta-\bar{\alpha})\tau-(3\gamma-\bar{\gamma})\sigma-\kappa\bar{\nu}+\Phi_{02}, \tag{3.11.21p}$$

$$\Delta\rho-\bar{\delta}\tau=-(\rho\bar{\mu}+\sigma\lambda)+(\bar{\beta}-\alpha-\bar{\tau})\tau+(\gamma+\bar{\gamma})\rho+\nu\kappa-\Psi_2-2\Lambda, \tag{3.11.21q}$$

$$\Delta\alpha-\bar{\delta}\gamma=(\rho+\varepsilon)\nu-(\tau+\beta)\lambda+(\bar{\gamma}-\bar{\mu})\alpha+(\bar{\beta}-\bar{\tau})\gamma-\Psi_3. \tag{3.11.21r}$$

3) Bianchi 恒等式

Bianchi 恒等式 $R_{\mu\nu\{\tau\lambda;\sigma\}}=0$ 在零标架中具有形式

$$\begin{aligned}&R_{mn\{pq;r\}}-(\gamma^l_{mr}R_{pqln}+\gamma^1_{mp}R_{qrln}+\gamma^l_{mq}R_{rpln}-\gamma^l_{nr}R_{pqlm}\\&-\gamma^l_{np}R_{qrlm}-\gamma^l_{nq}R_{rplm}+2R_{mnlp}\gamma^l_{rq}+2R_{mnlr}\gamma^l_{qp}+2R_{mnlq}\gamma^l_{pr})=0.\end{aligned}\tag{3.11.22}$$

在式 (3.11.22) 中, 取 $(m,n,p,q,r)=(1,3,1,3,4),(1,3,4,2,1),(1,3,1,3,2),[(2,1,1,3,2)-(2,3,1,3,4)],[(1,2,2,4,1)-(1,4,2,4,3)],(2,4,3,1,2),(2,4,2,4,1),(2,4,2,4,3),\{[4,3,1,3,4)+(1,2,3,4,1)]+2(1,3,4,2,1)\},\{[(2,1,1,3,2)-(2,3,1,3,4)]-(1,3,4,2,3)\},\{[(3,4,2,4,3)+(2,1,4,3,2)]+(2,4,3,1,2)\}$, 注意 Riemann 张量的标架表达式, 我们得到下面一组方程:

$$\begin{aligned}&\bar{\delta}\Psi_0-D\Psi_1+D\Phi_{01}-\delta\Phi_{00}\\&=(4\alpha-\pi)\Psi_0-2(2\rho+\varepsilon)\Psi_1+3\kappa\Psi_2+(\bar{\pi}-2\bar{\alpha}-2\beta)\Phi_{00}\\&\quad+2(\varepsilon+\bar{\rho})\Phi_{01}+2\sigma\Phi_{10}-2\kappa\Phi_{11}-\bar{\kappa}\Phi_{02},\end{aligned}\tag{3.11.23a}$$

$$\begin{aligned}&\Delta\Psi_0-\delta\Psi_1+D\Phi_{02}-\delta\Phi_{01}\\&=(4\gamma-\mu)\Psi_0-2(2\tau+\beta)\Psi_1+3\sigma\Psi_2-\bar{\lambda}\Phi_{00}+2(\bar{\pi}-\beta)\Phi_{01}\\&\quad+2\sigma\Phi_{11}+(2\varepsilon-2\bar{\varepsilon}+\bar{\rho})\Phi_{02}-2\kappa\Phi_{12},\end{aligned}\tag{3.11.23b}$$

$$\begin{aligned}&3(\bar{\delta}\Phi_1-D\Phi_2)+2(D\Phi_{11}-\delta\Phi_{10})+\bar{\delta}\Phi_{01}-\Delta\Phi_{00}\\&=3\lambda\Psi_0-9\rho\Psi_2+6(\alpha-\pi)\Psi_1+6\kappa\Psi_3+(\bar{\mu}-2\mu-2\gamma-2\bar{\gamma})\Phi_{00}\\&\quad+(2\alpha+2\pi+2\bar{\tau})\Phi_{01}+2(\tau-2\bar{\alpha}+\bar{\pi})\Phi_{10}+2(2\bar{\rho}\\&\quad-\rho)\Phi_{11}+2\sigma\Phi_{20}-\bar{\delta}\Phi_{02}-2\kappa\bar{\Phi}_{12}-2\kappa\Phi_{21},\end{aligned}\tag{3.11.23c}$$

$$\begin{aligned}&3(\Delta\Psi_1-\delta\Psi_2)+2(D\Phi_{12}-\delta\Phi_{11})+(\bar{\delta}\Phi_{02}-\Delta\Phi_{01})\\&=3\nu\Psi_0+6(\gamma-\mu)\Psi_1-9\tau\Psi_2+6\delta\Psi_3-\bar{\nu}\Phi_{00}\\&\quad+2(\bar{\mu}-\mu-\gamma)\Phi_{01}-2\bar{\lambda}\Phi_{10}+2(\tau+2\bar{\pi})\Phi_{11}\\&\quad+(2\alpha+2\pi+\bar{\tau}-2\bar{\beta})\Phi_{02}+(2\bar{\rho}-2\rho-4\bar{\varepsilon})\Phi_{12}\\&\quad+2\sigma\Phi_{21}-2\kappa\Phi_{22},\end{aligned}\tag{3.11.23d}$$

$$\begin{aligned}&3(\bar{\delta}\Psi_2-D\Psi_3)+D\Phi_{21}-\delta\Phi_{20}+2(\bar{\delta}\Phi_{11}-\Delta\Phi_{10})\\&=6\lambda\Psi_1-9\pi\Psi_2+6(\varepsilon-\rho)\Psi_3+3\kappa\Psi_4-2\nu\Phi_{00}+2\lambda\Phi_{01}\\&\quad+2(\bar{\mu}-\mu-2\bar{\gamma})\Phi_{10}+(2\pi+4\bar{\tau})\Phi_{11}+(2\beta+2\tau+\bar{\pi}\\&\quad-2\bar{\alpha})\Phi_{20}-2\bar{\sigma}\Phi_{12}+2(\bar{\rho}-\rho-\varepsilon)\Phi_{21}-\bar{\kappa}\Phi_{22},\end{aligned}\tag{3.11.23e}$$

$$
\begin{aligned}
&3(\Delta\Psi_2-\delta\Psi_3)+D\Phi_{22}-\delta\Phi_{21}+2(\bar{\delta}\Phi_{12}-\Delta\Phi_{11})\\
=&6\nu\Psi_1-9\mu\Psi_2+6(\beta-\tau)\Psi_3+3\sigma\Psi_4-2\nu\Phi_{01}-2\bar{\nu}\Phi_{10}\\
&+2(2\bar{\mu}-\mu)\Phi_{11}+2\lambda\Phi_{02}-\bar{\lambda}\Phi_{20}+2(\pi+\bar{\tau}-2\beta)\Phi_{12}\\
&+2(\beta+\tau+\bar{\pi})\Phi_{21}+(\bar{\rho}-2\varepsilon-2\bar{\varepsilon}-2\rho)\Phi_{22},
\end{aligned}
\tag{3.11.23f}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{\delta}\Psi_3-D\Psi_4+\bar{\delta}\Phi_{21}-\Delta\Phi_{20}\\
=&3\lambda\Psi_2-2(\alpha+2\pi)\Psi_3+(4\varepsilon-\rho)\Psi_4-2\nu\Phi_{10}+2\lambda\Phi_{11}\\
&+(2\gamma-2\bar{\gamma}+\bar{\mu})\Phi_{20}+2(\bar{\tau}-\alpha)\Phi_{21}-\bar{\sigma}\Phi_{22},
\end{aligned}
\tag{3.11.23g}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta\Psi_3-\delta\Psi_4+\bar{\delta}\Phi_{22}-\Delta\Phi_{21}\\
=&3\nu\Psi_2-2(\gamma+2\mu)\Psi_3+(4\beta-\tau)\Psi_4-2\nu\Psi_{11}-\bar{\nu}\Phi_{10}\\
&+2\lambda\Phi_{12}+2(\gamma+\bar{\mu})\Phi_{21}+(\bar{\tau}-2\beta-2\alpha)\Phi_{22},
\end{aligned}
\tag{3.11.23h}
$$

$$
\begin{aligned}
&D\Phi_{11}-\delta\Phi_{10}-\bar{\delta}\Phi_{01}+\Delta\Phi_{00}+3D\Lambda\\
=&(2\gamma-\mu+2\bar{\gamma}-\bar{\mu})\Phi_{00}+(\pi-2\alpha-2\bar{\tau})\Phi_{01}+(\bar{\pi}-2\bar{\alpha}\\
&-2\tau)\Phi_{10}+2(\rho+\bar{\rho})\Phi_{11}+\bar{\sigma}\Phi_{02}+\sigma\Phi_{20}-\bar{\kappa}\Phi_{12}-\kappa\Phi_{21},
\end{aligned}
\tag{3.11.23i}
$$

$$
\begin{aligned}
&D\Phi_{21}-\delta\Phi_{11}-\bar{\delta}\Phi_{02}+\Delta\Phi_{01}+3\delta\Lambda\\
=&(2\gamma-\mu-2\bar{\mu})\Phi_{01}+\bar{\nu}\Phi_{00}-\bar{\lambda}\Phi_{01}+(2\bar{\pi}-\tau)\Phi_{11}+(\pi\\
&+2\bar{\beta}-2\alpha-\bar{\tau})\Phi k_{02}+(2\rho+\bar{\rho}-2\bar{\varepsilon})\Phi_{12}+\sigma\Phi_{21}-\kappa\Phi_{22},
\end{aligned}
\tag{3.11.23j}
$$

$$
\begin{aligned}
&D\Phi_{22}-\delta\Phi_{21}-\bar{\delta}\Phi_{12}+\Delta\Phi_{11}+3\Delta\Lambda\\
=&\nu\Phi_{01}+\bar{\nu}\Phi_{10}-2(\mu+\bar{\mu})\Phi_{11}-\lambda\Phi_{02}-\bar{\lambda}\Phi_{20}+(2\pi-\bar{\tau}\\
&+2\bar{\beta})\Phi_{12}+(2\beta-\tau+2\bar{\pi})\Phi_{21}+(\rho+\bar{\rho}-2\varepsilon-2\bar{\varepsilon})\Phi_{22}.
\end{aligned}
\tag{3.11.23k}
$$

方程 (3.11.17), (3.11.21) 和 (3.11.23) 即为 Einstein 场方程的 Newman-Penrose 形式.

4) 速度场

速度 u^μ 的协变导数可构成一个与 u^μ 正交的表达式 $\mu_{\mu;\nu}+u_{\mu;\lambda}u^\lambda u_\nu$. 此式可分解为反对称部分、对称无迹部分和它的迹

$$u_{\mu;\nu}+u_{\mu;\lambda}u^\lambda u_\nu=\omega_{\mu\nu}+\sigma_{\mu\nu}+\theta h_{\mu\nu}/3,$$

即

$$u_{\mu;\nu}=-\dot{u}_\mu u_\nu+\omega_{\mu\nu}+\sigma_{\mu\nu}+\theta h_{\mu\nu}/3. \tag{3.11.24}$$

式中

$$\dot{u}_\mu = u_{\mu;\nu}u^\nu = \frac{Du_\mu}{Ds},$$

$$\omega_{\mu\nu} = u_{[\mu;\nu]} + \dot{u}_{[\mu}u_{\nu]}, \tag{3.11.25a}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = u_{(\mu;\nu)} + \dot{u}_{(\mu}u_{\nu)} - \theta h_{\mu\nu}/3, \tag{3.11.25b}$$

$$\theta = u^\mu_{;\mu}, \tag{3.11.25c}$$

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu; \tag{3.11.25d}$$

$$\dot{u}_\mu u^\mu = 0, \quad \omega_{\mu\nu}u^\nu = 0, \quad \sigma_{\mu\nu}u^\nu = 0, \quad h_{\mu\nu}u^\nu = 0. \tag{3.11.25e}$$

速度场的性质包含在这些量中, $\dot{u}_\mu$ 称为加速度, $\omega_{\mu\nu}$ 称为**扭或旋速度**, $\sigma_{\mu\nu}$ 称为**切变速度**, θ 称为**膨胀速度**. 现在我们来说明这些量的几何意义.

设物质元的世界线簇 (流线簇) 为

$$x^\mu = x^\mu(y^i, \tau),$$

速度场为

$$u^\mu(x^\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}.$$

沿着每条世界线有 $y^i = \text{const.}$ 当 τ 不变时, 由世界线 y^i 到邻近的世界线 $(y^i + \delta y^i)$ 有增量

$$\delta x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\delta y^i.$$

由于

$$\frac{D}{D\tau}\delta x^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta x^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\delta x^\beta = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau\partial y^i}\delta y^i + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha\delta x^\beta$$
$$= \frac{\partial u^\mu}{\partial y^i}\delta y^i + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha\delta x^\beta = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha\delta x^\beta,$$

所以沿世界线有

$$(\delta x^\mu)^\cdot = u^\mu_{;\nu}\delta x^\nu.$$

对于随动系中的观测者, 邻近体元的位移应是 δx^μ 向它的三维空间的投影

$$\delta_\perp x^\mu = (g^\mu_\nu + u^\mu u_\nu)\delta x^\nu = h^\mu_\nu\delta x^\nu.$$

根据以上二式, 注意到 $(\delta_\perp x^\mu)u_\mu = 0$, 得到相应的速度

$$\frac{D}{D\tau}(\delta_\perp \dot{x}^\mu) - (\delta_\perp x^\nu)(u^\mu\dot{u}_\nu - \dot{u}^\mu u_\nu) = (\delta_\perp x^\nu)\cdot h^\mu_\nu.$$

将式 (3.11.25) 代入上式, 得到

$$\begin{aligned}(\delta_\perp x^\nu)^{\cdot} h^\mu_\nu =&(u^\mu_{;\nu} + \dot{u}^\mu u_\nu)\delta_\perp x^\nu \\ =&(\omega^\mu_\nu + \sigma^\mu_\nu + \theta\delta^\mu_\nu/3)\delta_\perp x^\nu.\end{aligned}$$

由上式可以发现, 膨胀速度 θ 为径向速度, 其大小和方向无关. 当 $\theta > 0$ 时物质元的体积膨胀, 当 $\theta < 0$ 时收缩. 根据式 (3.1.1), 可将反对称张量 $\omega_{\mu\nu}$ 变换为旋速度矢量 ω^μ

$$\omega^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\tau}u_\nu\omega_{\lambda\tau}, \quad \omega_{\lambda\tau} = \varepsilon_{\lambda\tau\alpha\beta}\omega^\alpha u^\beta.$$

由 ω^μ 描述的速度场具有形式

$$(\delta_\perp x^\nu)^{\cdot} h^\mu_\nu = \varepsilon^\mu_{\nu\lambda\tau}\omega^\lambda u^\tau \delta_\perp x^\nu,$$

可见速度垂直于位移 $\delta_\perp x^\mu$, 也垂直于旋速度 ω^μ. 所以, $\omega_{\mu\nu}$ 表征绕轴 ω^μ 旋转. 关于切变速度, 由于迹 $\sigma^\mu_\nu = 0$, 所以 $\sigma_{\mu\nu}$ 表征物质元由球变为椭球的等体积形变.

由零标架矢量 l_μ 的协变导数可以构成与式 (3.11.25) 对应的三个标量场. 定义 $l^\mu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \nu}, \nu$ 是沿着固定短程线的仿射参量. 这三个标量可以写为

$$\theta = -\frac{1}{2}l^\mu_{;\mu}, \tag{3.11.26a}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}l_{[\mu;\nu]}l^{\mu;\nu}}, \tag{3.11.26b}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu} - \theta^2}. \tag{3.11.26c}$$

由式 (3.11.9) 可以得到

$$\begin{aligned}l_{\mu;\nu} =&(\gamma+\bar{\gamma})l_\mu l_\nu + (\varepsilon+\bar{\varepsilon})l_\mu n_\nu - (\alpha+\bar{\beta})l_\mu m_\nu - (\bar{\alpha}+\beta)l_\mu \bar{m}_\nu \\ &- \bar{\tau}m_\mu l_\nu - \tau\bar{m}_\rho n_\nu - \bar{\kappa}m_\mu n_\nu - \kappa\bar{m}_\mu n_\nu + \bar{\sigma}m_\mu m_\nu \\ &+ \sigma\bar{m}_\mu\bar{m}_\nu + \bar{\rho}m_\mu\bar{m}_\nu + \rho\bar{m}_\mu m_\nu.\end{aligned} \tag{3.11.27}$$

我们可以沿上述零曲线族中每一条短程线引入一仿射参量, 从而使 $\varepsilon+\bar{\varepsilon}=0$. 进而, 因 l_μ 为短程线的切线, 故有 $\kappa = 0$. 采用式 (3.11.27), 可将标量场 θ, ω 和 $|\sigma|$ 用旋系数表示出来

$$\theta = \frac{1}{2}(\rho+\bar{\rho}), \tag{3.11.28}$$

$$\omega = \frac{1}{2}|\rho+\bar{\rho}|, \tag{3.11.29}$$

$$|\sigma| = \sqrt{\sigma\bar{\sigma}}. \tag{3.11.30}$$

5) Maxwell 方程

在零标架形式中, Maxwell 方程可写为

$$\eta^{pq}(F_{mp;q} - F_{lp}\gamma^{l}_{mq} - F_{ml}\gamma^{l}_{pq}) = J_m. \tag{3.11.31}$$

在式 (3.11.31) 中取 m=1, 2, 3, 4, 得到

$$D\Phi_1 - \bar{\delta}\Phi_0 = (\pi - 2\alpha)\Phi_0 + 2\rho\Phi_1 - \kappa\Phi_2 + J_1, \tag{3.11.32a}$$

$$D\Phi_2 - \bar{\delta}\Phi_1 = -\lambda\Phi_0 + 2\pi\Phi_1 + (\rho - 2\varepsilon)\Phi_2 + J_4, \tag{3.11.32b}$$

$$\delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1 = -\nu\Phi_0 + 2\mu\Phi_1 + (\tau - 2\beta)\Phi_2 + J_2, \tag{3.11.32c}$$

$$\delta\Phi_1 - \Delta\Phi_0 = (\mu - 2\gamma)\Phi_0 + 2\tau\Phi_1 - \sigma\Phi_2 + J_3. \tag{3.11.32d}$$

式中

$$\Phi_0 = F_{\mu\nu}l^{\mu}m^{\nu}, \tag{3.11.33a}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(l^{\mu}n^{\nu} + \bar{m}^{\mu}m^{\nu}), \tag{3.11.33b}$$

$$\Phi_2 = F_{\mu\nu}\bar{m}^{\mu}n^{\nu}; \tag{3.11.33c}$$

$$J_m = J_{\mu}Z^{\mu}_{m},$$

J_μ 为四维电流密度矢量.

方程组 (3.11.32) 即 Maxwell 方程的零标架形式.

$F_{\mu\nu}$ 可用零标架表示为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = & -4\mathrm{Re}(\Phi_1)l_{[\mu}n_{\nu]} + 4i\mathrm{Im}(\Phi_1)m_{[\mu}\bar{m}_{\nu]} + 2\Phi_2 l_{[\mu}m_{\nu]} \\ & + 2\Phi_2 l_{[\mu}\bar{m}_{\nu]} - 2\Phi_0 n_{[\mu}m_{\nu]} - 2\Phi_0 n_{[\mu}\bar{m}_{\nu]}. \end{aligned} \tag{3.11.34}$$

将式 (3.11.34) 代入电磁场能量–动量张量表达式

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu}\right), \tag{3.11.35}$$

得到相应的标架表示形式

$$\begin{aligned} 4\pi E_{\mu\nu} = & 2\{|\Phi_2|^2 l_\mu l_\nu + |\Phi_0|^2 n_\mu n_\nu + \bar{\Phi}_0\Phi_2 m_\mu m_\nu \\ & + \Phi_0\bar{\Phi}_2\bar{m}_\mu\bar{m}_\nu\} + 4|\Phi_1|^2\{l_{(\mu}n_{\nu)} + m_{(\mu}\bar{m}_{\nu)}\} \\ & - 4\Phi_1\Phi_2 l_{(\mu}m_{\nu)} - 4\Phi_1\bar{\Phi}_2 l_{(\mu}\bar{m}_{\nu)} - 4\bar{\Phi}_0\Phi_1 n_{(\mu}m_{\nu)} \end{aligned}$$

$$- 4\Phi_0\bar{\Phi}_1 n_{(\mu}\bar{m}_{\nu)}. \tag{3.11.36}$$

如果能够解方程 (3.11.32) 求得 Φ_0, Φ_1 和 Φ_2, 则可以代入式 (3.11.34) 和 (3.11.35), 得到 Maxwell 张量和电磁场能量–动量张量的协变分量 (坐标分量).

如果 Ricci 张量和 Maxwell 张量成正比, 即

$$\Phi_{mn} = \kappa\Phi_m\Phi_n \quad (m, n = 0, 1, 2). \tag{3.11.37}$$

取 $\kappa = 1$, Bianchi 恒等式成为

$$\begin{aligned}
&(\delta - \tau + 4\beta)\Psi_4 - (\Delta + 2\gamma + 4\mu)\Psi_3 + 3\nu\Psi_2 \\
=&\bar{\Phi}_1\Delta\Phi_2 - \bar{\Phi}_2\bar{\delta}\Phi_2 + 2(\bar{\Phi}_1\Phi_1\nu - \bar{\Phi}_2\Phi_1\lambda - \bar{\Phi}_1\Phi_2\gamma + \bar{\Phi}_2\Phi_2\alpha), \quad (3.11.38\text{a})\\
&(\delta - 2\tau + 2\beta)\Psi_3 + \sigma\Psi_4 - (\Delta + 3\mu)\Psi_2 + 2\nu\Psi_1 \\
=&\bar{\Phi}_1\delta\Phi_2 - \bar{\Phi}_2 D\Phi_2 + 2(\bar{\Phi}_1\Phi_1\mu - \bar{\Phi}_2\Phi_1\pi - \bar{\Phi}_1\Phi_2\beta + \bar{\Phi}_2\Phi_2\varepsilon), \quad (3.11.38\text{b})\\
&(\delta - 3\tau)\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 - (\Delta - 2\gamma + 2\mu)\Psi_1 + \nu\Psi_0 \\
=&\bar{\Phi}_1\Delta\Phi_0 - \bar{\Phi}_2\delta\Phi_0 + 2(\bar{\Phi}_1\Phi_0\gamma - \bar{\Phi}_2\Phi_0\alpha - \bar{\Phi}_1\Phi_1\tau + \bar{\Phi}_2\Phi_1\rho), \quad (3.11.38\text{c})\\
&(\delta - 4\tau - 2\beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 - (\Delta - 4\gamma + \mu)\Psi_0 \\
=&\bar{\Phi}_1\delta\Phi_0 - \bar{\Phi}_2 D\Phi_0 + 2(\bar{\Phi}_1\Phi_0\beta - \bar{\Phi}_2\Phi_0\varepsilon - \bar{\Phi}_1\Phi_1\sigma + \bar{\Phi}_2\Phi_1\kappa), \quad (3.11.38\text{d})\\
&(D + 4\varepsilon - \rho)\Psi_4 - (\bar{\delta} + 4\pi + 2\alpha)\Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 \\
=&\bar{\Phi}_0\Delta\Phi_2 - \bar{\Phi}_1\bar{\delta}\Phi_2 + 2(\bar{\Phi}_0\Phi_\nu - \bar{\Phi}_1\Phi_1\lambda - \bar{\Phi}_0\Phi_2\gamma + \bar{\Phi}_1\Phi_2\alpha). \quad (3.11.38\text{e})
\end{aligned}$$

3.12 共形 Ricci 平直理想流体的场方程

将理想流体的能量–动量张量

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p \tag{3.12.1}$$

代入守恒方程

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \tag{3.12.2}$$

可以得到

$$u^\nu\varepsilon_{,\nu} + (\varepsilon + p)u^\nu_{;\nu} = 0, \tag{3.12.3}$$

$$(\varepsilon + p)u^\nu u^\mu_{;\nu} - (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)_{,\nu} = 0. \tag{3.12.4}$$

设 $\hat{g}_{\mu\nu}$ 表示真空度规, $g_{\mu\nu}$ 表示理想流体引力场的度规; 此时有 (取 $k = 1$)

$$\hat{R}_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{Ricci平直}), \tag{3.12.5}$$

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=(\varepsilon+p)u_\mu u_\nu-pg_{\mu\nu}.$$

如果存在一个标量 ϕ, 使式

$$\hat{g}_{\mu\nu}=\mathrm{e}^{2\phi}g_{\mu\nu} \tag{3.12.6}$$

成立, 则称流体 $(g_{\mu\nu},\varepsilon,p)$ 为共形 Ricci 平直理想流体. 共形变换 (3.12.6)、Riemann 张量、Weyl 张量和 Ricci 张量满足下列方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2\phi}\hat{R}_{\mu\nu\alpha\beta}=&R_{\mu\nu\alpha\beta}+g_{\mu\beta}(\phi_{;\nu\alpha}-\phi_{,\nu}\phi_{,\alpha}+g_{\nu\alpha}(\phi_{;\mu\beta}\\&-\phi_{,\mu}\phi_{,\beta})-g_{\mu\alpha}(\phi_{;\nu\beta}-\phi_{,\nu}\phi_{,\beta})-g_{\nu\beta}(\phi_{;\mu\alpha}\\&-\phi_{,\mu}\phi_{,\alpha})+(g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta})g^{\tau\sigma}\phi_{,\tau}\phi_{,\sigma},\end{aligned} \tag{3.12.7}$$

$$\begin{aligned}C^\lambda_{\mu\nu\tau}=&R^\lambda_{\mu\nu\tau}-\frac{1}{2}(\delta^\lambda_\tau R_{\mu\nu}-\delta^\lambda_\nu R_{\mu\tau}+g_{\mu\nu}R^\lambda_\tau-g_{\mu\tau}R^\lambda_\nu)\\&-\frac{1}{6}R(\delta^\lambda_\tau g_{\mu\nu}-\delta^\lambda_\nu g_{\mu\tau}),\end{aligned} \tag{3.12.8}$$

$$\hat{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}+2(\phi_{;\mu\nu}-\phi_{,\mu}\phi_{,\nu})+g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\phi_{;\alpha\beta}-\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}). \tag{3.12.9}$$

用 $\hat{g}^{\mu\mu'}\hat{g}^{\nu\nu'}=\mathrm{e}^{4\phi}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}$ 乘式 (3.12.7), 然后去掉脚标的撇号, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2\phi}\hat{R}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}=&R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}+\delta^\mu_\beta(\phi^{;\nu}_{;\alpha}-\phi^{,\nu}\phi_{,\alpha})+\delta^\nu_\alpha(\phi^{;\mu}_{;\beta}-\phi^{,\mu}\phi_{,\beta})\\&-\delta^\mu_\alpha(\phi^{;\nu}_{;\beta}-\phi^{,\nu}\phi_{,\beta})-\delta^\nu_\beta(\phi^{;\mu}_{;\alpha}-\phi^{,\mu}\phi_{,\alpha}\\&+(\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha-\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta)\phi^{,\tau}\phi_{,\tau}\\=&R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}+Y^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta+Y^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha-Y^\nu_\beta\delta^\mu_\alpha-Y^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta,\end{aligned} \tag{3.12.10}$$

式中

$$Y^\mu_\alpha\equiv\phi^{;\mu}_{;\alpha}-\phi^{;\mu}\phi^{,\alpha}+\frac{1}{2}\delta^\mu_\alpha\phi^{,\tau}\phi_{,\tau}. \tag{3.12.11}$$

将此式代入式 (3.12.9), 得到

$$\hat{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-2Y_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}Y^\sigma_\alpha. \tag{3.12.12}$$

考虑到式 (3.12.5), 式 (3.12.12) 成为

$$R_{\mu\nu}=2Y_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}Y^\alpha_\alpha, \tag{3.12.13}$$

$$Y^\alpha_\alpha=\frac{1}{6}R. \tag{3.12.14}$$

将场方程 (3.12.6) 缩并, 并注意 $u^\mu u_\mu=1$, 得到

$$R=-\varepsilon+3p. \tag{3.12.15}$$

由式 (3.12.6) 和 (3.12.13)~(3.12.15) 可得

$$2Y_{\mu\nu}=(\varepsilon+p)u_\mu u_\nu-\frac{1}{3}\varepsilon g_{\mu\nu}. \tag{3.12.16}$$

式 (3.12.16) 中 ϕ 存在, 要求下式成立:

$$2Y_{\mu[\nu;\tau]}=C^{\lambda}_{\mu\nu\tau}\phi_{,\lambda}, \tag{3.12.17}$$

此式称为**可积极性条件**.

下面我们将上述诸方程以零标架形式给出.

适当选择零标架, 使其中四维速度表示为

$$u^1=u^2=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad u^3=u^4=0\quad [\text{取}x^\mu=(x^1,x^2,x^3,x^4)]. \tag{3.12.18}$$

将式 (3.12.11) 代入式 (3.12.16), 得到

$$\phi_{;\mu\nu}=\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}+\frac{1}{2}(\varepsilon+p)u_\mu u_\nu-\frac{1}{6}\varepsilon g_{\mu\nu}. \tag{3.12.19}$$

式 (3.12.19) 的零标架形式为

$$\begin{aligned}\phi_{;mn}=&\phi_{,m}\phi_{,n}+\phi_{,p}\gamma^p_{mn}-\eta_{mn}(D\phi\Delta\phi-\delta\phi\bar{\delta}\phi)+\frac{1}{2}(\varepsilon\\&+p)u_m u_n-\frac{1}{6}\eta_{mn}\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.12.20}$$

此式用旋系数给出, 得到下面一组独立方程:

$$D^2\phi-(D\phi)^2-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})D\phi+\bar{\kappa}\delta\phi+\kappa\bar{\delta}\phi=\frac{1}{4}(\varepsilon+p), \tag{3.12.21a}$$

$$\Delta^2\phi-(\Delta\phi)^2+(\gamma+\bar{\gamma})\Delta\phi-\nu\sigma\phi-\bar{\nu}\bar{\delta}\phi=\frac{1}{4}(\varepsilon+p), \tag{3.12.21b}$$

$$\delta^2\phi-\bar{\delta}D\phi+\sigma\Delta\phi+(\bar{\alpha}-\beta)\delta\phi-(\delta\phi)^2=0, \tag{3.12.21c}$$

$$D\Delta\phi+(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\Delta\phi-\pi\delta\phi-\bar{\pi}\bar{\delta}\phi-\delta\phi\bar{\delta}\phi=\frac{1}{12}(\varepsilon+3p), \tag{3.12.21d}$$

$$D\delta\phi-\bar{\pi}D\phi+\kappa\Delta\phi+(\varepsilon-\bar{\varepsilon})\delta\phi-D\phi\delta\phi=0, \tag{3.12.21e}$$

$$\Delta\delta\phi-\bar{\nu}D\phi+\tau\Delta\phi-(\gamma-\bar{\gamma})\delta\phi-\Delta\phi\delta\phi=0, \tag{3.12.21f}$$

$$\delta\bar{\delta}\phi-\mu D\phi+\bar{\rho}\Delta\phi+(\beta-\bar{\alpha})\bar{\delta}\phi-D\phi\Delta\phi=\frac{1}{6}\varepsilon, \tag{3.12.21g}$$

$$(\Delta D-D\Delta)\phi=(\gamma+\bar{\gamma})D\phi+(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\Delta\phi-(\tau+\bar{\pi})\bar{\delta}\phi-(\bar{\tau}+\pi)\delta\phi, \tag{3.12.21h}$$

$$(\delta D-D\delta)\phi=(\bar{\alpha}+\beta-\pi)D\phi+\kappa\Delta\phi-\sigma\bar{\delta}\phi-(\bar{\rho}+\varepsilon-\bar{\varepsilon})\delta\phi, \tag{3.12.21i}$$

$$(\delta\Delta-\Delta\delta)\phi=-\bar{\nu}D\phi+(\tau-\bar{\alpha}-\beta)\Delta\phi+\bar{\lambda}\bar{\delta}\phi+(\mu-\gamma+\bar{\gamma})\delta\phi, \tag{3.12.21j}$$

$$(\bar{\delta}\delta-\delta\bar{\delta})\phi=(\bar{\mu}-\mu)D\phi+(\bar{\rho}-\rho)\Delta\phi-(\bar{\alpha}-\beta)\bar{\delta}\phi+(\alpha-\bar{\beta})\delta\phi. \tag{3.12.21k}$$

由式 (3.12.6) 和 (3.12.16)、(3.11.12), 得到

$$R_{11} = R_{22} = \frac{1}{2}(\varepsilon + p), \tag{3.12.22}$$

$$R_{12} = p, \quad R_{34} = \frac{1}{2}(\varepsilon - p),$$

$$\phi_{00} = \phi_{22} = -\frac{1}{4}(\varepsilon + p), \tag{3.12.23}$$

$$\phi_{11} = \frac{-1}{8}(\varepsilon + p).$$

式 (3.12.3) 和 (3.12.4) 的零标架形式为

$$u_n \varepsilon_{,m} \eta^{mn} + (\varepsilon + p) u_{m,n} \eta^{mn} - (\varepsilon + p) u_p \gamma^p_{mn} \eta^{mn} = 0, \tag{3.12.24}$$

$$(\varepsilon + p) u_k u_{p,q} \delta^p_m \eta^{kq} - (\varepsilon + p) u_k u_q \gamma^q_{pn} \delta^p_m \eta^{kn} - p_{;p} \delta^p_m + u_p u_k p_{;q} \delta^p_m \eta^{kq} = 0. \tag{3.12.25}$$

将上二式用旋系数表示, 我们得到

$$D\varepsilon + \Delta\varepsilon = (\varepsilon + p)(\gamma + \bar{\gamma} - \varepsilon - \bar{\varepsilon} + \rho + \bar{\rho} - \mu - \bar{\mu}), \tag{3.12.26a}$$

$$Dp - \Delta p = -(\varepsilon + p)(\gamma + \bar{\gamma} + \varepsilon + \bar{\varepsilon}). \tag{3.12.26b}$$

$$\delta p = \frac{1}{2}(\varepsilon + p)(\kappa + \tau - \bar{\pi} - \bar{\nu}). \tag{3.12.26c}$$

下面我们将方程 (3.12.16) 以零标架形式给出. 将方程 (3.12.16) 代入可积性条件 (3.12.17), 得到

$$\begin{aligned} 2C_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\tau} \phi_{,\tau} = &(\varepsilon + p)_{;\beta} u_\nu u_\alpha + (\varepsilon + p)(u_{\nu;\beta} u_\alpha + u_\nu u_{\alpha;\beta} \\ &- \frac{1}{3} g_{\nu\alpha} \varepsilon_{;\beta} - (\varepsilon + p)_{;\alpha} u_\nu u_\beta + \frac{1}{3} g_{\nu\beta} \varepsilon_{;\alpha} \\ &- (\varepsilon + p)(u_{\nu;\alpha} u_\beta + u_\nu u_{\beta;\alpha}). \end{aligned} \tag{3.12.27}$$

式 (3.12.27) 在零标架中的形式为

$$\begin{aligned} 2C_{qmnp} \phi_{,k} \eta^{kq} = &(\varepsilon + p)_{,p} u_m u_n - (\varepsilon + p)_{,n} u_m u_p \\ &- \frac{1}{3}(\varepsilon_{,p} \eta_{mn} - \varepsilon_{,n} \eta_{mp}) + (\varepsilon + p)(u_n u_{m,p} \\ &+ u_m u_{n,p}) - (\varepsilon + p)(u_t u_{m;n} + u_n u_{p;m}) \\ &- (\varepsilon + p)(u_m u_q \gamma^p_{np} + u_n u_q \gamma^q_{mp} - u_p u_q \gamma^q_{mn} \\ &- u_m u_q \gamma^q_{pn}). \end{aligned} \tag{3.12.28}$$

注意到 Weyl 张量的零标架形式, 可将上式写为

$$\bar{\Psi}_4 D\phi - \bar{\Psi}_3 \delta\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon + p)(\bar{\lambda} - \sigma), \tag{3.12.29a}$$

$$\Psi_0 \Delta\phi - \Psi_1 \delta\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon + p)(\bar{\lambda} - \sigma), \tag{3.12.29b}$$

$$\bar{\Psi}_2 D\phi - \Psi_1 \bar{\delta}\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon + p)(\rho - \bar{\mu}) - \frac{1}{6} D\varepsilon, \tag{3.12.29c}$$

$$\Psi_2 \Delta\varphi - \bar{\Psi}_3 \bar{\delta}\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon + p)(\rho - \bar{\mu}) - \frac{1}{6} \Delta\varepsilon, \tag{3.12.29d}$$

$$\bar{\Psi}_3 D\phi + \Psi_1 \Delta\phi - (\Psi_2 + \bar{\Psi}_2)\delta\phi = -\frac{1}{6}\delta\varepsilon, \tag{3.12.29e}$$

$$\bar{\Psi}_3 D\phi - \Psi_1 \Delta\phi + (\Psi_2 - \bar{\Psi}_2)\delta\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon + p)(\bar{\pi} - \kappa - \bar{\nu} + \tau). \tag{3.12.29f}$$

如果对零标架作变换

$$l^\mu \leftrightarrow n^\mu, \quad m^\mu \leftrightarrow \bar{m}^\mu, \tag{3.12.30}$$

则相应地有

$$D \leftrightarrow \Delta, \quad \delta \leftrightarrow \bar{\delta}; \tag{3.12.31a}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon \leftrightarrow -\gamma, \quad \mu \leftrightarrow -\rho, \\ &\tau \leftrightarrow -\pi, \quad \alpha \leftrightarrow -\beta, \\ &\kappa \leftrightarrow -\nu, \quad \sigma \leftrightarrow -\lambda; \end{aligned} \tag{3.12.31b}$$

$$\begin{aligned} &\Psi_0 \leftrightarrow \Psi_4, \quad \Psi_1 \leftrightarrow \Psi_3, \\ &\Psi_2 \leftrightarrow \Psi_2; \end{aligned} \tag{3.12.31c}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_{00} \leftrightarrow \Phi_{22}, \quad \Phi_{01} \leftrightarrow \Phi_{21}, \\ &\Phi_{02} \leftrightarrow \Phi_{20}, \quad \Phi_{11} \leftrightarrow \Phi_{11}; \end{aligned} \tag{3.12.31d}$$

$$\Lambda \leftrightarrow \Lambda; \tag{3.12.31e}$$

$$\Phi_0 \leftrightarrow \Phi_2, \quad \Phi_1 \leftrightarrow \Phi_1. \tag{3.12.31f}$$

不难证明, 在上述变换下 Newman-Penrose 方程 (即 Einstein 方程的 Newman-Penrose 形式) 是不变的.

3.13 能量–动量赝张量

在狭义相对论中, 物质系统或电磁场的能量–动量守恒定律表示为 $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$. 将 $T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0$ 对三维空间积分便得到能量–动量守恒定律. 上式的零分量积分为

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int T_0^0 \mathrm{d}^3 x = -\int \frac{\partial T_0^i}{\partial x^i} \mathrm{d}^3 x = -\int T_0^i \mathrm{d}S_i. \tag{3.13.1}$$

右端由高斯定理化为沿系统边界面的面积分. 式 (3.13.1) 表明, 系统能量的增量等于进入边界面的能量–动量流. 守恒定律的这一表述形式在引力场不存在时是有效

的. 在有引力场时, $T^{\mu\nu}$ 的普通散度推广为协变散度, 守恒定律应推广为具有协变形式的 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$. 由于 $T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}$, 上式即

$$T^{\nu}_{\mu;\nu}=(-g)^{-1/2}\left(T^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g}\right)_{,\nu}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}T^{\alpha\beta}=0. \tag{3.13.2}$$

由于式 (3.13.2) 中除了普通散度以外还有一项 $-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}T^{\alpha\beta}$, 所以这个推广后的守恒定律不能直接给出狭义相对论中的物理图像. 如果度规依赖于时间, 则对于 $\mu=0$, 式 (3.13.2) 第二项表示引力场和其他场之间的能量–动量交换. 为了将式 (3.13.2) 写成普通散度的形式, 对于时空中一点 P, 我们采用短程线坐标系. 在短程线坐标系中, 度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的所有一阶导数都等于零. 所以式 (3.13.2) 的第二项等于零, 而且第一项中的 $\sqrt{-g}$ 可以提到微分号外边来. 于是此式化为

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=0. \tag{3.13.3}$$

按照 Landau-Lifshitz 的表述形式, 式 (3.13.3) 中的量 $T^{\mu\nu}$ 可写为一个张量 $S^{\mu\nu\smile\tau}$ 的微商 ($S^{\mu\nu\smile\tau}$ 关于 $\nu\tau$ 是反对称的)

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial S^{\mu\nu\smile\alpha}}{\partial x^{\alpha}}. \tag{3.13.4}$$

由爱因斯坦方程可得

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{k}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right). \tag{3.13.5}$$

在点 P, 由于 $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}=0$, 所以有

$$R^{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\sigma\tau}(g_{\alpha\sigma,\beta\tau}+g_{\beta\tau,\alpha\sigma}-g_{\alpha\beta;\sigma\tau}-g_{\sigma\tau,\alpha\beta}). \tag{3.13.6}$$

代入式 (3.13.5) 得到

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left\{\frac{1}{2k}\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\tau\alpha}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\tau})]\right\}. \tag{3.13.7}$$

将式 (3.13.7) 与式 (3.13.4) 比较, 可知 $S^{\mu\nu\smile\alpha}$ 可以选为式 (3.13.7) 右边的表达式 $\{\quad\}$. 在 P 点, 可将 $(-g)^{-1}$ 从微分号下提到外面来. 引入量

$$h^{\mu\nu\smile\alpha}=\frac{1}{2k}\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\tau\alpha}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\tau})], \tag{3.13.8}$$

式 (3.13.7) 可写为

$$(-g)T^{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}h^{\mu\nu\smile\alpha}. \tag{3.13.9}$$

我们采用了一个特殊坐标系 (短程线坐标系) 得到了式 (3.13.9). 在任意坐标系中, 式 (3.13.9) 的左端和右端不再相等, 将两端之差以 $(-g)t^{\mu\nu}$ 表示, 式 (3.13.9) 变为

$$(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}h^{\mu\nu\alpha}. \tag{3.13.10}$$

因为式 (3.13.10) 中各项都是对称的, 故量 $t^{\mu\nu}$ 是对称的

$$t^{\mu\nu}=t^{\nu\mu}. \tag{3.13.11}$$

将 $T^{\mu\nu}$ 的具体形式 (用 $\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$ 表示的展开式) 写出来, 再与式 (3.13.8) 一起代入式 (3.13.10), 便得到 $t^{\mu\nu}$ 的具体形式

$$\begin{aligned}t^{\mu\nu}=&\frac{1}{2k}[(2\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\tau\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\rho}_{\tau\rho})(g^{\mu\beta}g^{\nu\tau}-g^{\mu\alpha}g^{\beta\tau})\\&+g^{\mu\beta}g^{\tau\alpha}(\Gamma^{\nu}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\tau\alpha}+\Gamma^{\nu}_{\tau\alpha}\Gamma^{\rho}_{\beta\rho}-\Gamma^{\nu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\tau}-\Gamma^{\nu}_{\beta\tau}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho})\\&+g^{\nu\beta}g^{\tau\alpha}(\Gamma^{\mu}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\tau\alpha}+\Gamma^{\mu}_{\tau\alpha}\Gamma^{\rho}_{\beta\rho}-\Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\tau}-\Gamma^{\mu}_{\beta\tau}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}\\&+g^{\beta\tau}g^{\alpha\rho}(\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\Gamma^{\nu}_{\tau\rho}-\Gamma^{\mu}_{\beta\tau}\Gamma^{\nu}_{\alpha\rho})].\end{aligned} \tag{3.13.12}$$

由式 (3.13.12) 可知, $t^{\mu\nu}$ 是描述引力场性质的量; 又由式 (3.13.10) 可知 $t^{\mu\nu}$ 不是张量. $t^{\mu\nu}$ 和物质场的能量–动量张量 $T^{\mu\nu}$ 一起, 满足守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}[(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})]=0, \tag{3.13.13}$$

所以 $t^{\mu\nu}$ 称为**引力场的能量–动量赝张量**.

由方程 (3.13.13) 可知, 量

$$P^{\mu}=\int(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})\mathrm{d}S_{\nu} \tag{3.13.14}$$

是守恒量. 当 $t^{\mu\nu}=0$ 时式 (3.13.14) 退化为 $\int(-g)T^{\mu\nu}\mathrm{d}S_{\nu}$, 这是狭义相对论中的四维动量. 所以我们可以把式 (3.13.14) 确定的 P^{μ} 看作是整个物理系统 (引力场和物质场) 的四维动量. 式中的积分可在任意三维超曲面上进行.

取式 (3.13.14) 中的积分曲面为 $x^0=\mathrm{const}$, 则有

$$P^{\mu}=\int(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})\mathrm{d}^3x, \tag{3.13.15}$$

因此量 $(-g)(T^{00}+t^{00})$ 可解释为物理系统的能量密度, 量 $(-g)(T^{0i}+t^{0i})$ 解释为系统的动量密度或能流密度; 量 $(-g)(T^{ij}+t^{ij})$ 解释为动量流密度. 在没有物质场存在时, $T^{\mu\nu}=0$, 所以**引力场的能量密度和动量密度**分别是 $(-g)t^{00}$ 和 $(-g)t^{0i}$.

类似地, 也可以得到角动量的守恒定律. 角动量表示为

$$
\begin{aligned}
J^{\mu\nu} &= \int (x^{\mu}\mathrm{d}p^{\nu} - x^{\mu}\mathrm{d}p^{\mu}) \\
&= \int (-g)[x^{\mu}(T^{\nu\alpha} + t^{\nu\alpha}) - x^{\nu}(t^{\mu\alpha} + t^{\mu\alpha})]\mathrm{d}S_{\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.13.16}
$$

显然, 物理系统的总角动量守恒定律在引力场存在时仍然成立.

关于引力场的能量表述, 除本节采用的 Landau-Lifshitz 方案以外, 还有许多其他方案, 但都没有解决下述疑难问题:

(1) 由于 $t^{\mu\nu}$ 不是广义协变张量, 所以总可以在引力场中一点处引入一局部惯性系, 使 $t^{\mu\nu}$ 全部等于零. 这表明引力场能量-动量赝张量 $t^{\mu\nu}$ 是不可定域化的.

(2) 引力场的能量密度 t^{00} 不是处处为正的.



第 4 章　引力场的分类

场的分类问题与描述具体场的严格解有密切联系，通过场的分类可以对引力场的性质有更深入的理解.

4.1　Petrov 分类

所谓 Petrov 分类，就是根据 Weyl 张量

$$C_{\mu\nu}^{\rho\sigma}=R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}-\frac{1}{2}(g_{\mu}^{\rho}R_{\nu}^{\sigma}-g_{\nu}^{\rho}R_{\mu}^{\sigma}+g_{\nu}^{\sigma}R_{\mu}^{\rho}-g_{\mu}^{\sigma}R_{\nu}^{\rho})-\frac{1}{6}(g_{\nu}^{\rho}g_{\mu}^{\sigma}-g_{\nu}^{\sigma}g_{\mu}^{\rho}) \tag{4.1.1}$$

的代数性质对黎曼空–时 (引力场) 进行的分类.

要确定曲率张量的所有代数性质，只讨论共形 Weyl 张量是不够的. 由引力场方程可知，所要了解的曲率张量的性质由 Ricci 张量或能量–动量张量给出. 但是在真空场的情况下，Weyl 张量便与曲率张量完全一致. 因此，Petrov 分类实际上是根据曲率张量的代数性质对真空引力场的分类.

张量场 $F_{\mu\nu}$ 的本征方程表示为

$$F_{\mu\nu}S^{\nu}=\lambda S_{\mu}. \tag{4.1.2}$$

式中 S_{μ} 为本征矢，λ 为本征值. 如果张量场 $F_{\mu\nu}$ 是反对称的，则式 (4.1.2) 用 S^{μ} 缩并可以发现，要么本征值 $\lambda=0$，要么本征矢 S_{μ} 为零矢量. 由 3.11 节中引入的零标架矢量 $(l^{\mu},n^{\mu},m^{\mu},\bar{m}^{\mu})$ 可以构成所有的二阶反对称张量 (双矢). 其中，零标架矢量的组合

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu}&\equiv 2l_{[\mu}n_{\nu]}+2\bar{m}_{[\mu}m_{\nu]},\\
V_{\mu\nu}&\equiv 2l_{[\mu}\bar{m}_{\nu]},\\
U_{\mu\nu}&\equiv 2n_{[\mu}m_{\nu]}
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

称为**自对偶双矢**. 在对偶变换下，式 (4.1.3) 中各双矢变为自身 (只差一个因子 i)

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{\mu\alpha}&\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}M^{\alpha\beta}=\mathrm{i}M_{\mu\nu},\\
\tilde{V}_{\mu\nu}&=\mathrm{i}V_{\mu\nu},\qquad \tilde{U}_{\mu\nu}=\mathrm{i}U_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

式中符号 $\sim$ 表示对偶.

由零标架性质可以证明

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}n^{\nu}m^{\alpha}\bar{m}^{\beta}=\mathrm{i}. \tag{4.1.5}$$

根据定义 (4.1.3) 和零矢量的性质, 可以得到自对偶双矢“标量积”的性质

$$\begin{aligned}&M_{\mu\nu}V^{\mu\nu}=M_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=U_{\mu\nu}V^{\mu\nu}=U_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=0,\\&M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}=-4,\quad V_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=2.\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

反对称实场张量 $F_{\mu\nu}$ 不是自对偶的, 也不可能直接用自对偶双矢 (4.1.3) 展开. 但是我们可以用 $F_{\mu\nu}$ 构成一个复的场张量 $\varPhi_{\mu\nu}$

$$\varPhi_{\mu\nu}\equiv F_{\mu\nu}-\mathrm{i}\tilde{F}_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\sigma\beta}. \tag{4.1.7}$$

注意到 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$, 我们有

$$\tilde{\varPhi}_{\mu\nu}=\tilde{F}_{\mu\nu}+\mathrm{i}F_{\mu\nu}=\mathrm{i}\varPhi_{\mu\nu}. \tag{4.1.8}$$

这表明场张量 $\varPhi_{\mu\nu}$ 是自对偶的. 将 $\varPhi_{\mu\nu}$ 用式 (4.1.3) 中的双矢展开

$$\varPhi_{\mu\nu}=\phi_0U_{\mu\nu}+\phi_1M_{\mu\nu}+\phi_2V_{\mu\nu}. \tag{4.1.9}$$

展开式系数 ϕ_i 可由原来的实场张量 $F_{\mu\nu}$ 表示出来:

$$\begin{aligned}\phi_0&=\frac{1}{2}\varPhi_{\mu\nu}V^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}V^{\mu\nu},\\\phi_1&=-\frac{1}{4}\varPhi_{\mu\nu}M^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}M^{\mu\nu},\\\phi_2&=\frac{1}{2}\varPhi_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}U^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

对应于二阶反对称张量 $F_{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量, 式 (4.1.10) 给出三个独立的复系数.

下面首先讨论电磁场的分类, 然后用形式上相同的方法讨论引力场的分类.

4.2 电磁场的分类

设 $F_{\mu\nu}$ 表示 Maxwell 张量, 则式 (4.1.10) 具体表示为

$$\begin{aligned}\phi_0&=B_y-E_x+\mathrm{i}(E_y+B_x),\\\phi_1&=E_z-\mathrm{i}B_z,\\\phi_2&=E_x+B_y+\mathrm{i}(E_y-B_x).\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

1. 第一种分类方案

把坐标系变至对称张量的主轴系时, 对称张量的形式变得特别简单. 反对称张量也类似. 适当选择零标架矢量 l^μ 的方向, 可使展开式 (4.1.9) 简化.

设 l^μ 转至 l'^μ 的变换表示为

$$
\begin{aligned}
& l'^\mu = l^\mu - E^2 n^\mu + E m^\mu + \bar{E}\bar{m}^\mu, \\
& n'^\mu = n^\mu, \quad m'^\mu = m^\mu - \bar{E} n^\mu.
\end{aligned} \tag{4.2.2}
$$

式中 E 为复参量, 自对偶双矢的变换为

$$
\begin{aligned}
& M'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} - 2EU_{\mu\nu}, \\
& V'_{\mu\nu} = V_{\mu\nu} - EM_{\mu\nu} + E^2 U_{\mu\nu}, \\
& U'_{\mu\nu} = U_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.2.3}
$$

由式 (4.2.3) 可以得到展开式系数 ϕ_i 的变换关系

$$
\begin{aligned}
& \phi_0 = \phi'_0 - 2E\phi'_1 + E^2\phi'_2, \\
& \phi_1 = \phi'_1 - E\phi'_2, \quad \phi_2 = \phi'_2.
\end{aligned} \tag{4.2.4}
$$

适当选择参量 E, 即适当选择 l'^μ 的方向, 可使 ϕ'_0 或 ϕ'_1 等于零, 从而简化展开式 (4.1.9). 将带撇的量和不带撇的量对换, 然后令

$$
\phi_0 - 2E\phi_1 + E^2\phi_2 = 0. \tag{4.2.5}
$$

把方程 (4.2.5) 看作关于 E 的二次代数方程, 根据这一方程根的个数可以把电磁场分为两类. 满足条件

$$
\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 \neq 0 \tag{4.2.6}
$$

的电磁场称为**非退化场**. 这类场存在两个不同的 l'^μ 方向使 $\phi'_0 = 0$.

满足条件

$$
\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 0 \tag{4.2.7}
$$

的电磁场称为**退化场或零场**. 这类场只有一个 l'^μ 的方向使 $\phi_0 = 0$.

由式 (4.1.6) 和 (4.1.9) 可知,

$$
\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = -4\Phi_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu} = -2(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \mathrm{i}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}). \tag{4.2.8}
$$

表达式 $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0$ 只与电磁场张量有关. 由此可以清楚地看到, 上面的分类与零标架的选择无关, 与双矢展开式也无关. 式 (4.2.8) 使上述分类方案的表述更加简单:

电磁场是退化 (或零场) 的充分且必要条件是

$$
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{4.2.9}
$$

2. 第二种分类方案

我们可以用本征方程和本征矢的语言来表述电磁场的分类. 由 (4.1.9) 和 (4.1.3) 可知, $\phi_0 = 0$ 等效于

$$\Phi_{\mu\nu}l^\nu = \left(F_{\mu\nu} - \mathrm{i}\tilde{F}_{\mu\nu}\right)l^\nu = \phi_1 l_\mu. \tag{4.2.10}$$

因此, 对于非退化场, 本征方程 (4.2.9) 或者

$$L_{[\mu}F_{\nu]\tau}l^\tau = l_{[\mu}\tilde{F}_{\nu]\tau}l^\tau = 0 \tag{4.2.11}$$

有两个不同的零本征矢 l^μ.

退化场或零场 ($\phi_0 = \phi_1 = 0$) 则只有一个零本征矢. 退化场张量 (4.1.9) 具有简单的形式 $\Phi_{\mu\nu} = \phi_2 V_{\mu\nu}$, 即

$$F_{\mu\nu} = l_\mu p_\nu - l_\nu p_\mu, \quad p_\mu l^\mu = p_\mu n^\mu = 0. \tag{4.2.12}$$

3. 物理意义

零电磁场最简单的例子是 Minkowski 空间的平面波

$$\begin{aligned} A_\mu &= \mathrm{Re}[p_\mu \exp(\mathrm{i}\kappa_\sigma x^\sigma)], \\ F_{\mu\nu} &= \mathrm{Re}[\mathrm{i}(p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu)\exp(\mathrm{i}k_\sigma x^\sigma)]. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

式中

$$p_\mu k^\mu = k_\mu k^\mu = 0.$$

很容易证明上式满足零场的充分且必要条件 (4.2.9).

在远离孤立荷电系统的地方, 可将系统 (源) 发出的引力辐射看作平面波. 此时四维势用源参量表示为推迟势 ($c = 1$)

$$A_\mu(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{j_\mu(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}\mathrm{d}^3x'. \tag{4.2.14}$$

场张量按 r^{-1} 展开为

$$F_{\mu\nu} = F^{(1)}_{\mu\nu}r^{-1} + F^{(2)}_{\mu\nu}r^{-2} + \cdots, \tag{4.2.15}$$

由此可知 $F^{(1)}_{\mu\nu}$ 具有形式

$$F^{(1)}_{\mu\nu} = p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu, \tag{4.2.16}$$

式中

$$p_\mu = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int j_\mu(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|)\mathrm{d}^3x',$$

$$\kappa_\nu = -(t - |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|), \nu = \left(\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}, \quad -1 \right) \approx (\hat{\boldsymbol{r}} - 1),$$
$$k_\mu k^\mu = 0, \quad A^\mu_{,\mu} \approx p^\mu k_\mu = 0. \tag{4.2.17}$$

零场的能量-动量张量具有简单的形式

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F^\sigma_\mu F_{\sigma\nu} = \frac{1}{4\pi} p_\sigma p^\sigma k_\mu k_\nu. \tag{4.2.18}$$

在局部洛伦兹系中, 能流密度 $S^i = T^{0i}$ 和能量密度 $w = T^{00}$ 之间的关系为 $|\mathbf{S}| = w$. 可见零电磁场是纯辐射场.

零电磁场的场张量 $\Phi_{\mu\nu} = \phi_2 V_{\mu\nu}$, 场方程可化为

$$\begin{aligned}\Phi^{\mu\nu}_{;\nu} &= [\phi_2(l^\mu \bar{m}^\nu - l^\mu \bar{m}^\mu)]_{;\nu} \\ &= (\phi_2 l^\mu)_{;\nu} \bar{m}^\nu + \phi_2 l^\mu \bar{m}^\nu_{;\nu} - (\phi_2 l^\nu)_{;\nu} \bar{m}^\mu - \phi_2 l^\nu \bar{m}^{\mu\nu}_{;} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

用 l_μ 乘以式 (4.2.19), 缩并, 并注意到 $l^\mu l_{\mu;\nu} = 0$, $l_\mu \bar{m}^\mu_{;\nu} = -l_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu$, 我们得到

$$l_{\mu;\nu} l^\nu \bar{m}^\mu = 0, \tag{4.2.20}$$

即

$$l_{\mu;\nu} l^\nu = \lambda l_\mu. \tag{4.2.21}$$

由此可得

$$l_{[\mu} l_{\tau];\nu} l^\nu = 0. \tag{4.2.22}$$

总能找到一个 λ 值, 使下式成立:

$$(\lambda l_{\mu;\nu} - \lambda_{,\nu}) l^\nu = 0, \tag{4.2.23}$$

或写成

$$(\lambda l)_{\mu;\nu} (\lambda l)^\nu = 0. \tag{4.2.24}$$

将式 (4.2.24) 与短程线方程

$$u_{\mu;\nu} u^\nu = 0, \quad u^\mu \equiv \mathrm{d}x^\mu / \mathrm{d}s$$

比较, 可知 $u^\mu = \lambda l^\mu$. 这就是说, 退化电磁场的零本征矢量场 l^μ 是短程线矢量场.

将式 (4.2.20) 两边乘以 $\bar{m}^\mu$ 缩并, 得到

$$l_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu = 0. \tag{4.2.25}$$

由此可知**世界线汇的剪切度 σ 等于零** [式 (3.11.30) 和 (3.11.27)].

综上所述, 零场 (退化电磁场) 是平面波的推广; 它的零本征矢量场是无切的短程线矢量场.

4.3 引力场的分类

跟构成复电磁场张量 $\Phi_{\mu\nu}$ 类似, 可以用 Weyl 张量构成复引力场张量 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\Phi_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv C_{\mu\nu\alpha\beta} - \mathrm{i}\tilde{C}_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv C_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\tau\sigma}C^{\tau\sigma}_{\mu\nu}. \tag{4.3.1}$$

由此可得

$$\tilde{\Phi}_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\tau\lambda}\Phi^{\tau\lambda}_{\mu\nu} = \mathrm{i}\,\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{4.3.2a}$$

即 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$ 关于后两个指标是自对偶的. 由 Weyl 张量的定义 (4.1.1) 得到 $C^{\mu\nu}_{\mu\lambda} = 0$. 由此可以证明,

$$\tilde{C}_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\tau\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}C^{\tau\sigma\lambda\rho} = -C_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{4.3.2b}$$

此式表明张量 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$ 对于前两个指标也是自对偶的. 于是与 (4.1.9) 类似, 可以将 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$ 用自对偶双矢 (4.1.3) 展开:

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu\nu\alpha\beta} =&\phi_1 V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta} + \phi_2(V_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta}M_{\mu\nu}) + \phi_3(V_{\mu\nu}U_{\alpha\beta}\\ &+ V_{\alpha\beta}U_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}) + \phi_4(U_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}M_{\mu\nu})\\ &+ \phi_5 U_{\mu\nu}U_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

此式含有 5 个复系数, 张量 Φ 有 10 个独立分量.

1. 引力场的第一种分类方案

采用零标架和自对偶双矢, 使展开式 (4.3.3) 简化, 重复由 (4.1.9)→(4.2.4) 的过程, 然后令 $\phi'_5 = 0$, 即

$$\phi'_5 = \phi_5 - 4\phi_4 E + 6\phi_3 E^2 - 4\phi_2 E^3 + \phi_1 E^4 = 0. \tag{4.3.4}$$

这一四次代数方程的 4 个根对应于本征矢 l^μ 的 4 个方向, 根据这 4 个根的重复情况, 可将引力场 (Rieman 空–时) 分为 Petrov I 型 ~O 型.

I 型: 4 个不同的根;

II 型: 3 个不同的根, 其中 1 个为二重根;

D 型: 2 个不同的根, 均为二重根;

III型: 2 个不同的根, 其中 1 个为三重根;

N 型: 1 个四重根;

O 型: Weyl 张量恒为零, 全部 $\phi'_A = 0$. (4.3.5)

2. 引力场的第二种分类方案

采用式 (4.3.1) 和 (4.1.4), 可直接用 Weyl 张量和零标架矢量的乘积来表示系数 ϕ_A:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{4}C_{\mu\nu\alpha\beta}U^{\mu\nu}U^{\alpha\beta} = 2C_{\mu\nu\alpha\beta}n^\mu n^\nu m^\alpha m^\beta,\\ \phi_2 &= -\frac{1}{4}C_{\mu\nu\alpha\beta}U^{\mu\nu}M^{\alpha\beta}\\ &= -C_{\mu\nu\alpha\beta}n^\mu m^\nu(l^\alpha n^\beta + \bar{m}^\alpha m^\beta),\\ \phi_3 &= \frac{1}{2}C_{\mu\nu\alpha\beta}U^{\mu\nu}V^{\alpha\beta} = 2C_{\mu\nu\alpha\beta}n^\mu m^\nu l^\alpha \bar{m}^\beta,\\ \phi_4 &= -\frac{1}{4}C_{\mu\nu\alpha\beta}V^{\mu\nu}M^{\alpha\beta}\\ &= -C_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu \bar{m}^\nu(l^\alpha n^\beta + \bar{m}^\alpha m^\beta),\\ \phi_5 &= \frac{1}{2}C_{\mu\nu\alpha\beta}V^{\mu\nu}V^{\alpha\beta} = 2C_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu l^\nu \bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta.\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

对于零本征矢 $l^\mu, \phi_5 = 0$; 由此可知实对称张量

$$S_{\mu\nu} \equiv C_{\mu\alpha\beta\nu}l^\alpha l^\beta \tag{4.3.7}$$

不含有 $m^\alpha m^\nu$ 和 $\bar{m}^\alpha \bar{m}^\nu$ 的项, 再应用 Weyl 张量的对称性, 可得

$$S_{\mu\nu}l^\nu = 0, \quad S^\mu_\mu = C^\mu_{\nu\alpha\mu}l^\nu l^\alpha = -C_{\nu\alpha}l^\nu l^\alpha = 0. \tag{4.3.8}$$

由此可将 $S_{\mu\nu}$ 用零标架矢量表示出来

$$S_{\mu\nu} \equiv \alpha l_\mu l_\nu + \mathrm{Re}[\beta(l_\mu \bar{m}_\nu + l_\nu \bar{m}_\mu)]. \tag{4.3.9}$$

所以, Weyl 张量的本征矢 l^μ 具有如下性质:

$$L_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta[\tau}l_{\sigma]}l^\alpha l^\beta = 0 \leftrightarrows \phi_5 = 0, \tag{4.3.10}$$

这时引力场为 I 型.

如果两个本征矢重合 [$E=0$ 是方程 (4.3.4) 的二重根], 则必有 $\phi_5 = \phi_4 = 0$. 此时由式 (4.3.6) 可得

$$l_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta\tau}l^\alpha l^\beta = 0 \leftrightarrows \phi_5 = \phi_4 = 0, \tag{4.3.11}$$

这时引力场为 II 型. 继续讨论可得到 D 型 ~O 型系数 ϕ_A 为零的个数和 Weyl 张量满足的条件. 按所得的结果, 分类如表 4-1 所示:

表 4-1 引力场的分类

	不同零本征矢个数	为零系数	$C_{\mu\nu\alpha\beta}$ 满足条件
I 型	4	ϕ_5	$L_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta[\tau}l_{\sigma]}l^\alpha l^\beta=0$
II 型	3	ϕ_5,ϕ_4	$l_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta\tau}l^\alpha l^\beta=0$
D 型	2	ϕ_5,ϕ_4	
III型	2	ϕ_5,ϕ_4,ϕ_3	$l_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta\tau}l^\alpha=0$
N 型	1	$\phi_5,\phi_4,\phi_3,\phi_2$	$C_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu=0$
O 型	0	全部 ϕ_A	$C_{\mu\nu\alpha\beta}=0$

Penrose 图给出了退化的情况：每个箭头表示一个附加的退化.

经过零标架旋转 (l^μ 固定)

$$l'^\mu=Al^\mu, \tag{4.3.12}$$

$$n'^\mu=A^{-1}n^\mu-AB\bar{B}l^\mu+Bm^\mu+\bar{B}\bar{m}^\mu,$$

$$m'^\mu=\mathrm{e}^{\mathrm{i}C}m^\mu-\mathrm{e}^{\mathrm{i}C}A\bar{B}l^\mu, \tag{4.3.13}$$

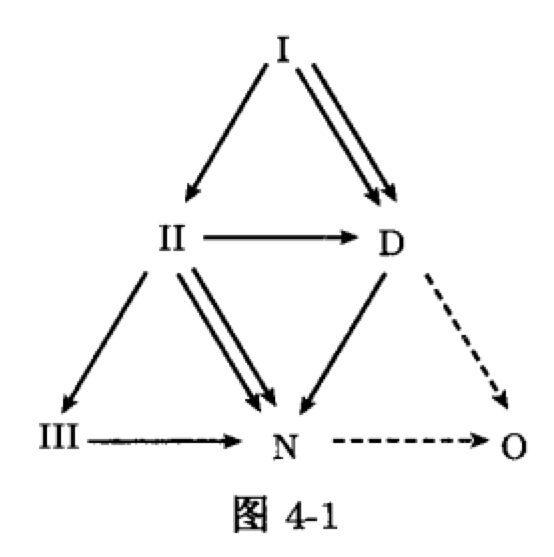


图 4-1

式中 $A>0,C$ 是实的, B 是复的, 适当选择 A,B,C, 还可以使 I 型的 $\phi_3=0$; 使 D 型的 $\phi_1=\phi_2=0$; 使 II 型的 $\phi_2=0$; 使III型的 $\phi_1=0$ (见图 4-1).

对于真空引力场, Weyl 张量和曲率张量相等, 所以上面的讨论对曲率张量也成立.

退化真空引力场最简单的例子是平面引力波, 与电磁场的情况相似. 由于 $R_{\mu\nu\alpha\beta}l^\beta=0$, $l^\mu l_\mu=0$, 所以是 Petrov N 型的.

由毕安基恒等式, 可以导出退化场零本征矢 l^μ 的两个简单性质. 用上面对 Weyl 张量用过的符号, 毕安基恒等式可写为

$$\tilde{R}^{\alpha\beta}_{\mu\nu;\beta}=0 \text{ 和 } \varPhi^{\mu\nu\alpha\beta}(R)_{;\beta}=0. \tag{4.3.14}$$

先讨论II型和 D 型 ($\phi_5=\phi_4=0,\phi_3\neq 0$) 的情况. 由于

$$V_{\mu\nu;\alpha}M^{\mu\nu}=4l_{\mu;\alpha}\bar{m}^\mu, \tag{4.3.15}$$

代入式 (4.3.3) 和 (4.3.14), 得到

$$\begin{aligned}0=\varPhi^{\mu\nu\alpha\beta}_{;\beta}V_{\mu\nu}&=(\varPhi^{\mu\nu\alpha\beta}V_{\mu\nu})_{;\beta}-\varPhi^{\mu\nu\alpha\beta}V_{\mu\nu;\beta}\\&=2(\phi_3V^{\alpha\beta})_{;\beta}-4\phi_2V^{\alpha\beta}l_{\mu;\beta}\bar{m}^\mu-\phi_3U^{\mu\nu}V^{\alpha\beta}V_{\mu\nu;\beta}\\&\quad-4\phi_3M^{\alpha\beta}l_{\mu;\beta}\bar{m}^\mu.\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

用 l_α 乘以式 (4.3.16) 并缩并, 我们得到

$$V^{\alpha\beta}_{;\beta} l_\alpha + 2l_{\alpha;\beta}\bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta = 3l_{\alpha;\beta}\bar{m}^\alpha l^\beta = 0, \tag{4.3.17}$$

此即 (4.2.19) 式. 所以, **退化场的零本征矢量场 l^μ 是短程线矢量场**. 用 $\bar{m}_\alpha$ 乘以式 (4.3.16) 并缩并, 得到

$$V^{\alpha\beta}_{;\beta} \bar{m}_\alpha + 2l_{\alpha;\beta}\bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta = 3l_{\alpha;\beta}\bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta = 0, \tag{4.3.18}$$

此即式 (4.2.25). 此式表明**零本征矢量场 l^μ** 是无切的 ($\sigma = 0$).

我们对于 $\phi_5 = \phi_4 = 0$ (II 型和 D 型) 退化真空引力场证明了定理: 退化真空引力场的零本征矢构成无切的短程线汇. 其他类型的退化场可用类似方法证明. 这一定理的逆定理 (Goldberg-Sachs 定理) 是: 如果有一个无切的短程线汇真空解 (引力场), 则这个解一定是退化的, 且线汇是本征线汇.



第二篇　广义相对论宇宙学

在迄今为止人们所知道的各种力中, 引力是唯一不可屏蔽的长程力. 对于分布于大范围空-时中的大量物质和空-时本身, 引力应是起决定作用的力. 因此, 引力决定宇宙动力学, 从而决定宇宙的演化; 任何定量的宇宙学理论必须以引力理论为基础.

每种引力理论都有相应的模型, 如标量引力理论、FSG 理论等. 本篇只研究建立在爱因斯坦引力理论基础上的宇宙模型.





第1章　宇宙学原理和 Robertson-Walker 度规

宇宙学是论述整个宇宙的, 而人类对宇宙的观测只涉及宇宙的一小部分. 对这一小部分的观测又只有很短的历史. 对行星系的观测有几千年, 对其他星系的观测只有 100 年. 尽管如此, 人们以观测资料为基础, 根据爱因斯坦的引力理论, 已构成一幅宇宙演化的图像. 可以证明, 这一图像是自洽的, 与至今为止的观测资料相符合. 按照下面要介绍的宇宙学原理, 人们没有必要知道尚未观测到的空间区域的任何情况.

1.1　宇宙学原理

按照现代的观测技术, 可观测区域已扩展到 3×10^9 光年. 为了以这一观测区域的信息为基础来研究宇宙的总体结构, 需要有一些假设. 在可观测到的区域内发现, 在宇观尺度上, 星系分布、射电源数目和微波背景辐射等基本上都是均匀的、各向同性的. 人们假设: 在宇观尺度上, 任何时刻三维宇宙空间是均匀的和各向同性的, 这就是**宇宙学原理**. 根据这一原理, 宇宙中一切位置都是等同的. 这样一来, 在宇宙中没有优越的位置和优越的方向, 当然也就没有必要知道尚未观测到的区域的情况. 宇宙中每一个星系或者星系团都是构成宇宙的平等元素. 根据宇宙学原理, 宇宙中任一点和任一方向都不可能用任一物理量的不同来区分. 但是同一点的物理量在不同时刻却可以有不同的值. 所以宇宙学原理允许宇宙随时间变化. 为了研究宇宙随时间的变化, 不同位置的观察者之间要能够比较他们的观测结果, 于是就必须有一共同的时间标准, 这一时间称为**宇宙时**. 宇宙时的存在也是宇宙学原理成立的前提.

1.2　Robertson-Walker 度规

宇宙学原理用几何术语表述为: 三维空间应是具有最大对称性的空间, 即一个具有常曲率但曲率可以随时间变化的空间. 根据第二篇的讨论, 满足上述要求的四维空-时一定具有 Robertson-Walker 度规

$$ds^2=dt^2-R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\right].\tag{1.2.1}$$

因此, 这个均匀宇宙模型的度规实际上已经由对称性要求所确定. 式中 $R(t)$ 是时间的未知函数, k 是一个常数, 适当选择 r 的单位, 可以使 k 取值 $+1, 0$ 或 -1. 爱因斯坦引力场方程则作为宇宙动力学方程, 确定宇宙的时间行为 (宇宙的演化), 即确定函数 $R = R(t)$, 并确定局部空间性质即 k 的值. 这些问题将在本篇第 2 章中讨论.

引入变换, 令

$$r = \bar{r}\left(1 + \frac{1}{4}k\bar{r}^2\right)^{-1}, \tag{1.2.2}$$

可将式 (1.2.1) 改写为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{R^2(t)}{(1 + kr^2/4)^2}[\mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)]. \tag{1.2.3}$$

再作一次变换, 令

$$\begin{aligned} \bar{R}^2(t) &= R^2(t)\left(1 + \frac{1}{4}k\bar{r}^2\right)^{-2}, \\ \mathrm{d}\bar{t} &= \frac{\mathrm{d}t}{\bar{R}(t)}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

式 (1.2.3) 化为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \bar{R}^2(t)[(\mathrm{d}\bar{t}^2 - \mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)] \\ &= \bar{R}^2 \mathrm{d}s^2, \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

式中 $\mathrm{d}\bar{s}^2 = \mathrm{d}\bar{t}^2 - \mathrm{d}\bar{r}^2 - \bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)$ 为平直空–时度规. 由此可知, R-W 空–时和闵可夫斯基空–时是共形的, 即 R-W 空–时是共形平直的.

如果引入记号

$$f(\chi) = r = \begin{cases} \sin\chi, & k = +1; \\ \chi, & k = 0; \\ \mathrm{sh}\chi, & k = -1. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

则 R-W 度规 (1.2.1) 可改写为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)[\mathrm{d}\chi^2 + f^2(\chi)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)]. \tag{1.2.7}$$

式 (1.2.7)、(1.2.3) 和 (1.2.1) 是 R-W 度规的三种不同形式.

在式 (1.2.1) 中, $R(t)$ 称为**宇宙半径 (或宇宙标度因子)**, k 标志**空–时曲率**. $k = +1, 0, -1$, 分别对应于子空间 M 的曲率 $K > 0$, $K = 0$, $K < 0$. 在式 (1.2.1) 中作代换, 令 $\sqrt{k}r = \bar{r}$ (当 $k > 0$), 得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{R^2(t)}{k}\left[\frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)\right]. \tag{1.2.8}$$

空间部分可表示为

$$\mathrm{d}s_{(3)}^2=\frac{R^2(t)}{k}\left[\frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{1-\bar{r}^2}+\bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right]. \tag{1.2.9}$$

由此可得

$$K_{(3)}=k/R^2(t). \tag{1.2.10}$$

三维平直空间 $\mathrm{d}\sigma^2=\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 中的二维曲面 $\delta_{ij}x^ix^j=\dfrac{1}{K}=R$ 就是一个曲率为 K 的常曲率空间. 图 1-1 是三种情况的示意图.

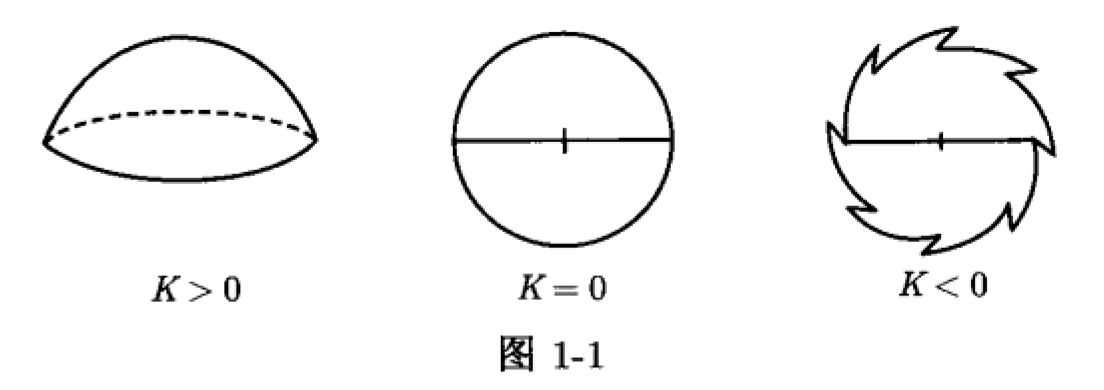


图 1-1

曲率为 K 的三维常曲率空间可以看作包容于四维平直空间的子空间 M.

1.3 空间距离和曲率

1. 固有空间距离

对于 R-W 度规 (1.2.1), 由坐标时与标准时的关系 $\mathrm{d}\tau=\sqrt{g_{00}}\mathrm{d}t$, 可得

$$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t. \tag{1.3.1}$$

所以在 R-W 空-时中, 坐标时即标准时, 也就是本章开头提到的宇宙时. 按照所选用的单位, $c=G=1$, 我们有 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t$.

考虑任意二恒星 A 和 B, 选择坐标轴的方向, 使 r 轴通过 AB, 则 A 和 B 的空间距离为

$$\begin{aligned}l=\int_A^B\mathrm{d}l&=\int_A^B\sqrt{r_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\\&=\int_{r_A}^{r_B}\sqrt{-g_{11}}\mathrm{d}r\\&=R(t)\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}.\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

如果 r_A 和 r_B 固连, 则式 (1.3.2) 表明, 当 $R(t)$ 是时间 t 的增函数时, 任意二恒星间的空间距离都随时间增大, 即宇宙是膨胀的; 当 $R(t)$ 是时间 t 的减函数时, 任意二恒星的空间距离都随时间减小, 宇宙是收缩的; 当 $R(t)$ 为常数时, 宇宙是静态的.

2. 空间的曲率

我们讨论 $k>0, k=0$ 和 $k<0$ 的三种宇宙空间.

(1) $k>0$ 的宇宙空间. 在 $k>0$ 的情况下, 积分 (1.3.2) 给出

$$l=\frac{R(t)}{\sqrt{k}}[\arcsin(\sqrt{k}r_B)-\arcsin(\sqrt{k}r_A)]. \tag{1.3.3}$$

式 (1.3.3) 表明, $\sqrt{k}r_B\leqslant 1$, $\sqrt{k}r_A\leqslant 1$, $l\leqslant\frac{\pi R(t)}{\sqrt{k}}$, 即任意时刻、任意两颗恒星 (空间任意两点) 间的距离都是有限的, 也就是说, 在任何给定的时刻, 宇宙空间中不存在相距无限远的两个点.

设 $r_A=0$, 由 $(r_B)_{\max}=\frac{1}{\sqrt{k}}$ 可以算出宇宙空间的体积

$$\begin{aligned}V&=\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^3x=\int_0^{1/\sqrt{k}}\sqrt{-g}r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\&=4\pi R^3(t)\int_0^{1/\sqrt{k}}\frac{r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}\\&=\pi^2R^3(t)k^{-3/2}.\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

任何时刻宇宙空间的体积都是有限的. 所以, $k>0$ 的宇宙空间是有限的.

(2) $k<0$ 的宇宙空间. 此时积分 (1.3.2) 给出

$$l=\frac{R(t)}{\sqrt{k}}\ln\frac{\sqrt{-k}r_B+\sqrt{1-kr_B^2}}{\sqrt{-k}r_A+\sqrt{1-kr_A^2}}. \tag{1.3.5}$$

式 (1.3.5) 表明, 任一时刻 AB 间的距离没有上限. 所以 $k<0$ 的宇宙空间是无限的.

(3) $k=0$ 的宇宙空间. 此时, 积分 (1.3.2) 给出

$$l=R(t)r. \tag{1.3.6}$$

显然, $k=0$ 的宇宙空间也是无限的.

1.4 粒子和光子的行为

现在我们讨论粒子 (质点) 和光子在 R-W 空-时中的运动, 采用式 (1.2.7). 在式 (1.2.7) 的坐标系中, 一个静止的恒星相对于原点的固有 (纯空间) 位移 D 由式

$$D=\sqrt{-g_{11}}\chi=R(t)\chi \tag{1.4.1}$$

确定. 如果宇宙半径 R 随时间变化, 则恒星之间以及星系之间的距离也将随时间变化, 好像球面上两个固定点之间的距离 (沿球面上的短程线) 随着球半径的变化而变化一样. 由此产生的速度 $\dot{D}$ 和位移 D 成正比

$$\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\dot{R}}{R} D. \tag{1.4.2}$$

适当选择坐标轴的方向, 使一个自由运动的试验粒子沿一条径向轨道 $[\chi = \chi(s), \theta = 常数, \varphi = 常数]$ 运动. 这时粒子的世界线是度规

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)\mathrm{d}\chi^2 \tag{1.4.3}$$

的短程线. 由短程线方程可以得到守恒定律

$$R^2(t)\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}s} = \frac{R^2}{\sqrt{1 - R^2\left(\dfrac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right)^2}} \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} = \text{const.} \tag{1.4.4}$$

设粒子的静止质量为 m_0, 用 v 表示速度 $R\dfrac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}$, 用 p 表示动量 $mv = m_0 v/\sqrt{1 - v^2}$, 则守恒定律 (1.4.4) 在三维空间具有形式

$$pR = \text{const.} \tag{1.4.5}$$

式 (1.4.5) 表明, 对于自由运动的粒子, 其动量和宇宙半径的乘积等于常数.

对于光子, 人们期望得到一个类似的结果, 即光子的波长或频率和宇宙半径的关系.

和导出式 (1.3.2) 的情况一样, 设 AB 两点沿坐标 r 的方向. A 点有一光源, 于 $t = t_A$ 时刻发出一波面, 传播到 B 点的时刻为 t_B. 将 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$ 代入度规 (1.2.1) 得

$$\mathrm{d}t^2 - R^2(t)\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} = 0, \tag{1.4.6a}$$

分离变量并积分, 得到

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - kr^2}}. \tag{1.4.6b}$$

另一波面于 $t_A + \Delta t_A$ 时刻自 A 点发出, 于 $t_B + \Delta t_B$ 时刻到达 B 点. 同理可得

$$\int_{t_A+\Delta t_A}^{t_B+\Delta t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - kr^2}}. \tag{1.4.7}$$

假设在上述过程中 r_A 和 r_B 都保持不变, 两式相减, 得到

$$\int_{t_A+\Delta t_A}^{t_B+\Delta t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} - \int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = 0,$$

即

$$\left(\int_{t_A+\Delta t_A}^{t_A}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}+\int_{t_A}^{t_B+\Delta t_B}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}\right)-\left(\int_{t_A}^{t_B+\Delta t_B}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}+\int_{t_B+\Delta t_B}^{t_B}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}\right)=0,$$

$$\int_{t_A}^{t_A+\Delta t_A}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}=\int_{t_B}^{t_B+\Delta t_B}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}.$$

根据积分中值定理, 有

$$\frac{\Delta t_A}{R(\bar{t}_A)}=\frac{\Delta t_B}{R(\bar{t}_B)},\tag{1.4.8}$$

式中 $t_A\leqslant\bar{t}_A\leqslant t_A+\Delta t_A, t_B\leqslant\bar{t}_B\leqslant t_B+\Delta t_B$. 考虑无限近的两个波面, 即 $\Delta t_A\to 0,\Delta t_B\to 0$, 我们有

$$\frac{\Delta t_A}{R(t_A)}=\frac{\Delta t_B}{R(t_B)}\quad(\text{当 }\Delta t_A\to 0,\Delta t_B\to 0).$$

由此得

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=\frac{\nu_A}{\nu_B}=\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{R(t_B)}{R(t_A)},\tag{1.4.9a}$$

或

$$\nu R=\text{const.}\tag{1.4.9b}$$

由式 (1.4.9a) 可以得到红移 z 的表达式

$$z\equiv\frac{\lambda_B-\lambda_A}{\lambda_A}=\frac{R(t_B)}{R(t_A)}-1.\tag{1.4.9c}$$

当 $R(t_B)>R(t_A)$ (宇宙膨胀) 时, $z>0$ (红移); 当 $R(t_B)<R(t_A)$ (宇宙收缩) 时, $z<0$ (紫移); 当 $R(t_B)=R(t_A)$ (宇宙为静态) 时, $z=0$ (无频移).

如果在比较短的时间 $(t-t_A)$ 内 $R(t)$ 的变化比较小, 可将 $R(t)$ 展开为 $(t-t_A)$ 的泰勒级数并取其前几项. 展开式为

$$\begin{aligned}R(t)&=R(t_A)+\dot{R}(t_A)(t-t_A)+\frac{1}{2}\ddot{R}(t_A)(t-t_A)^2+\cdots\\&\equiv R(t_A)\left[1+H(t-t_A)-\frac{1}{2}qH^2(t-t_A)^2+\cdots\right].\end{aligned}\tag{1.4.10}$$

式中

$$H(t_A)\equiv\dot{R}(t_A)/R(t_A)\tag{1.4.11}$$

称为**哈勃 (Hubble) 常数**;

$$q(t_A)\equiv-\frac{\ddot{R}(t_A)R(t_A)}{\dot{R}^2(t_A)},\tag{1.4.12}$$

称为**减速因子**.

将式 (1.4.10) 代入式 (1.4.9c), 得到红移 z 和光的传播时间的关系：

$$z = H(t_A - t_B) + \left(1 + \frac{q}{2}\right) H^2(t_A - t_B)^2 + \cdots . \tag{1.4.13}$$

通常, 用红移与光源距离的关系来检验 R-W 度规用于宇宙模型的正确性. 在一级近似下, 将式 (1.4.10) 代入式 (1.4.3)($\mathrm{d}s = 0$), 积分得

$$\chi = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} \approx \frac{t_B - t_A}{R(t_B)} + \frac{H(t_B - t_A)^2}{2R(t_B)} + \cdots . \tag{1.4.14}$$

应用式 (1.4.1) 和 (1.4.2), 得到

$$z = HD + \frac{1}{2}(q+1)H^2D^2 + \cdots = \dot{D} + \frac{1}{2}(\dot{D} + D\ddot{D}) + \cdots . \tag{1.4.15}$$

式 (1.4.15) 表明, 在一级近似下红移正比于光源与观察者的固有距离, 或正比于光源速度 $\dot{D}$ 与光速 ($c = 1$) 的比值. 这就是**哈勃定律**. 这一定律是哈勃 (1929) 在总结大量观测资料的基础上发现的, 它表明宇宙中任何两颗恒星 (或星系) 都在相互退行, 即**宇宙在膨胀**.



第 2 章　宇宙动力学

要确定宇宙的演化, 就必须确定 R-W 度规中的宇宙半径的函数形式 $R=R(t)$ 和标志曲率的参量 k. 宇宙动力学的任务是根据宇宙物质的性质和爱因斯坦引力场方程计算这两个量.

2.1　爱因斯坦场方程

理想流体的爱因斯坦场方程具有形式

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+g_{\mu\nu}\lambda=8\pi T_{\mu\nu},$$
$$T_{\mu\nu}=(\rho+p)u_\mu u_\nu-pg_{\mu\nu}, \tag{2.1.1}$$

在随动系中, $u_\mu=\delta_\mu^0$, 对于均匀宇宙, ρ 和 p 只是时间 t 的函数. 由 R-W 度规可得

$$g_{00}=1,\quad g_{0i}=0,\quad g_{11}=-\frac{R^2(t)}{1-kr^2},$$
$$g_{22}=-r^2R^2(t),\quad g_{33}=-r^2R^2(t)\sin^2\theta; \tag{2.1.2}$$

$$R_{00}=-3\ddot{R}/R,\quad R_{0i}=0,$$
$$R_{ij}=(R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k)g_{ij}/R^2. \tag{2.1.3}$$

注意到 $u_\mu=\delta_\mu^0$, 我们有

$$S_{\mu\nu}\equiv T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T=\frac{1}{2}(p-\rho)g_{\mu\nu}+(\rho+p)u_\mu u_\nu,$$
$$S_{00}=\frac{1}{2}(\rho+3p), S_{0i}=0,$$
$$S_{ij}=\frac{1}{2}(p-\rho)g_{ij}. \tag{2.1.4}$$

于是便可组成爱因斯坦场方程 $R_{\mu\nu}=8\pi S_{\mu\nu}$. 它的 $0i$ 分量为一恒等式, 00 分量和 ii 分量分别为

$$\frac{3\ddot{R}}{R}=-4\pi(\rho+3p), \tag{2.1.5}$$

$$R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k=4\pi(\rho-p)R^2. \tag{2.1.6}$$

消去 $\ddot{R}$, 得到

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}=\frac{8\pi}{3}\rho. \tag{2.1.7}$$

同时, 将式 (2.1.1) 和 $u_\mu=\delta_\mu^0$ 代入 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$ 得守恒方程具体形式

$$\dot{p}R^3=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[R^3(\rho+p)],$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}(\rho R^3)=-3pR^2. \tag{2.1.8}$$

式 (2.1.5)~(2.1.8) 中只有两个方程是独立的. 当给定物态方程 $p=p(\rho)$ 时, 由式 (2.1.8) 可以确定函数 $\rho=\rho(R)$, 从而由式 (2.1.7) 积分定出 $R=R(t)$. 所以, 宇宙动力学的基本方程是爱因斯坦方程 (2.1.7)、能量守恒方程 (2.1.8) 和物态方程 $p=p(\rho)$.

以 R-W 度规为基础, 按上述程序确定 $R(t)$ 的宇宙模型称为弗里德曼 (Friedmann) 模型, 或称**标准宇宙模型**.

2.2 弗里德曼宇宙模型

在不知物态方程 $p=p(\rho)$ 情况下, 分析场方程和守恒方程, 也可得到许多关于弗里德曼宇宙现在、过去和将来的膨胀情况.

由方程 (2.1.5) 可知, 只要 $\rho+3p>0$, 就有 $\dfrac{\ddot{R}}{R}<0$. 根据现在的观测事实, 有 $\dot{R}/R>0$ (观测到红移), $R>0$. 由此可画出函数 $R=R(t)$ 的曲线 (图 2-1). 设曲线与 t 轴的交点为 $t=0$, 即

$$R(0)=0. \tag{2.2.1}$$

此时容易证明, 当 $t=0$ 时曲率标量

$$|R^\mu_\mu|=\frac{6}{R(t)}\left|\ddot{R}(t)+\frac{1}{R(t)}(\dot{R}^2(t)+k)\right|\to\infty. \tag{2.2.2}$$

式 (2.2.2) 表明宇宙必然在过去的某一时刻为一奇点, 从那时开始 "爆炸" 开来, 膨胀到今天方有这么大的宇宙半径 $R(t_0)$. 从宇宙为奇点到现在所经历的时间 t_0 自然被称为宇宙年龄, 如图 2-1 所示.

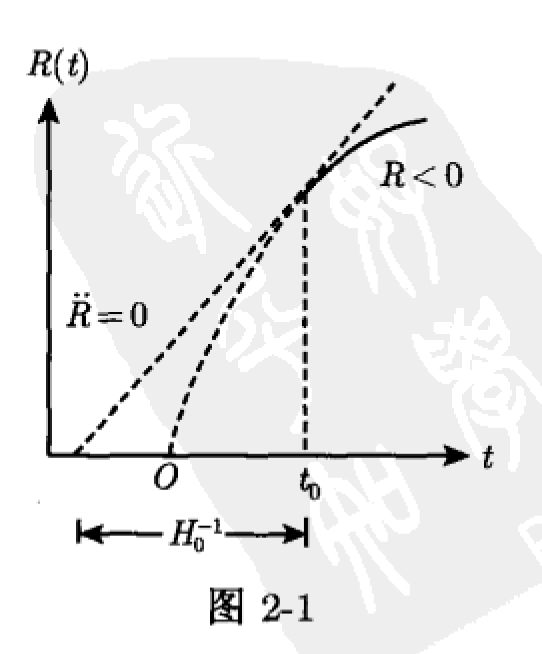


图 2-1

如果 $\ddot{R}(t)=0$, 当 $0<t<t_0$, 则 $\dot{R}(t)=A=\text{const}$, $R(t)=At$. 根据哈勃常数

定义式 (1.4.11)：$H_0 = \dot{R}(t_0)/R(t_0)$, 由上式得到

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \qquad (\ddot{R} = 0, \text{ 当 } 0 < t < t_0). \tag{2.2.3}$$

根据观测得到的哈勃常数值 $H_0 = 50\text{km/s}\cdot\text{Mpc}$ ($1\text{Mpc} = 3.08 \times 10^{24}\text{cm}$), 可知 $H_0^{-1} \approx 2 \times 10^{10}$ 年.

如果 $\ddot{R}(t) < 0$ $(0 < t < t_0)$, 则有

$$t_0 < \frac{1}{H_0}. \tag{2.2.4}$$

宇宙年龄的计算将在 2.4 节中给出.

顺便提一下, 上面讨论的是 $\rho + 3p > 0$ 的情况, 如果在宇宙早期有 $\rho + 3p = 0$, 则宇宙不存在初始奇点. 宇宙早期以辐射为主, 因而有态方程 $p = \frac{1}{3}\rho$, 此式与 $\rho + 3p = 0$ 一起, 导致 $p = \rho = 0$. 此时由式 (2.1.5) 和 (2.1.6) 得到 $\ddot{R} = 0, \dot{R}^2 = -k (k \leqslant 0)$, 从而有 $R_{\mu\nu} = 0$, 即宇宙空-时是 **Ricci 平直的**. 此时 $|R^{\mu}_{\mu}|_{t=0}$ = 有限值. 因此 $3p + \rho = 0$ 的宇宙模型没有初始奇点.

Friedmann 宇宙的未来是无限膨胀还是收缩决定于空间曲率 k 的符号. 由式 (2.1.8) 可知, 只要 $p \geqslant 0$, 则 $\mathrm{d}(\rho R^3)/\mathrm{d}R \leqslant 0$, ρ 随 R 增大而减小的速率至少等于 R^{-3}. 所以 $\rho R^2 \to 0$ (至少正比于 R^{-1}), 代入式 (2.1.7) 有

$$\dot{R}^2 + k \to 0.$$

如果 $k = -1$, 由于 $\dot{R}^2 > 0$, 所以 $R(t)$ 必然继续增大. 由上式可知 $\dot{R}^2 \to -k, R \to t$. 因此, 如果 $k = -1$, 宇宙将无限膨胀, 若 $k = 0$, 则 $\dot{R}^2 \to 0$ 且 $\dot{R}^2 > 0$, 所以 $R(t)$ 继续增大, 只是比 t 增大得慢. 因此, $k = 0$ 宇宙也将无限膨胀. 对于 $k = +1$, 式 (2.1.7) 可改写为

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho R^2 - k = \frac{8\pi}{3}\rho R^2 - 1. \tag{2.2.5}$$

当 ρR^2 减至 1 时 $\dot{R}^2 = 0$. 由于 $\ddot{R}(t) < 0$, 图线向下弯, 所以此后 $R(t)$ 减小, 最后宇宙必然在将来的一段有限时间内再次缩至奇点 $(R = 0)$, 如图 2-2 所示.

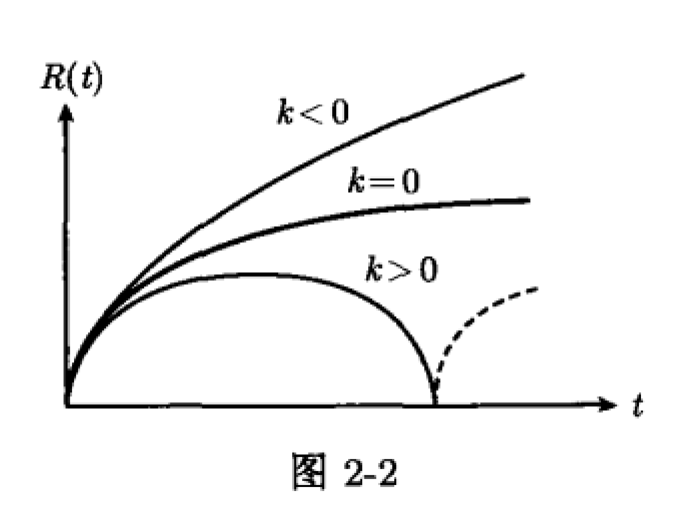


图 2-2

大约在弗里德曼模型提出 7 年以后, E. P. Hubble 于 1929 年发现了宇宙红移现象. 这是对广义相对论宇宙学的重要验证之一. 宇宙红移的发现不仅证明了广义相对论宇宙学特别是宇宙

膨胀概念的正确, 而且可以通过对红移的严格计算确定均匀、各向同性宇宙模型中哪一个更适合于描述真实的宇宙. 原则上可以由红移 [作为距离的函数, 见式 (1.4.15)] 确定哈勃常数 H 和减速因子 q, 从而确定宇宙的演化.

2.3 宇宙物质的密度和压强

将哈勃常数 $H = \frac{\dot{R}}{R}$ 和减速因子 $q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$ 代入场方程 (2.1.5) 和 (2.1.6), 得到

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{k}{R_0^2} + H_0^2\right), \tag{2.3.1}$$

$$p_0 = -\frac{1}{8\pi}\left[\frac{k}{R_0^2} + H_0^2(1-2q_0)\right], \tag{2.3.2}$$

式中下标 0 表示取现在的值. 令

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi}. \tag{2.3.3}$$

由式 (2.3.1) 可知

$$\begin{aligned} &\rho_0 > \rho_c \rightleftharpoons k > 0, \\ &\rho_0 < \rho_c \rightleftharpoons k < 0, \\ &\rho_0 = \rho_c \rightleftharpoons k = 0. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

取 $H_0 = 50\text{km}/(\text{s}\cdot\text{Mpc})$, 可得 $\rho_c = 5\times10^{-30}\text{g/cm}^3$. 根据观测, 可认为宇宙现在的物质形式主要是非相对论性的, 且满足条件

$$p_0 \ll \rho_0. \tag{2.3.5}$$

此时由式 (2.3.2) 和 (2.3.1) 得到

$$\begin{aligned} k &= R_0^2(2q_0-1)H_0^2, \\ \rho_0/\rho_c &= 2q_0, \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

从而有

$$\begin{aligned} &q_0 > \frac{1}{2} \rightleftharpoons k > 0, \\ &q_0 < \frac{1}{2} \rightleftharpoons k < 0, \\ &q_0 = \frac{1}{2} \rightleftharpoons k = 0. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

宇宙是闭合的还是开放的, 按照式 (2.3.4) 决定于 ρ_0. $\rho_0 \leqslant \rho_c$, 宇宙是开放的; $\rho_0 > \rho_c$, 宇宙是闭合的. 或者按照式 (2.3.7) 决定于减速因子 q_0. $q_0 \leqslant \frac{1}{2}$ 宇宙是开放的, $q_0 > \frac{1}{2}$ 宇宙是闭合的. ρ_0 可以通过测量星系质量 (由测量光度得到) 来确定, 结果为

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} \approx 0.010 \sim 0.028. \tag{2.3.8}$$

q_0 可以由红移–光度关系的观测确定, 结果为

$$q_0 \approx 1, \quad \rho_0 \approx 2\rho_c. \tag{2.3.9}$$

根据式 (2.3.8), 宇宙是开放的; 根据式 (2.3.9), 宇宙是闭合的. 为了解决这一矛盾, 可以假设 $q_0 \approx 1$ 是正确的, 再设法寻找普通星系之外的质量, 这一至今还未找到的质量的平均密度应为 $2 \times 10^{-29}\text{g/cm}^3$. 经过几十年的努力, 在这方面有了一定的进展, 如黑洞、暗物质、中微子的静质量 ……, 如果存在的话, 都会有助于这一问题的解决.

2.4　宇宙年龄的计算

由 2.2 节中的讨论可知, 宇宙物质静质量的能量密度 $\rho \sim R^{-3}$, 而辐射的能量密度 $\rho_r \sim R^{-4}$. 因此, 可以认为在现在的宇宙中, 已知形式的辐射能量密度小于静质量的能量密度. 宇宙物质主要由非相对论的松散物质 (尘埃) 构成. 在这个时期, 宇宙动力学方程 (爱因斯坦方程) 为式 (2.1.7)

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi}{3}\rho R^2. \tag{2.4.1}$$

由于 $\rho \sim R^{-3}$, 故有

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3}. \tag{2.4.2}$$

由式 (2.3.6) 可得

$$\frac{k}{R_0^2} = (2q_0 - 1)H_0^2, \quad \frac{8\pi}{3}\rho_0 = 2q_0 H_0^2.$$

代入式 (2.4.1) 和 (2.4.2), 得到

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2\left[1 - 2q_0 + 2q_0\left(\frac{R_0}{R}\right)\right]. \tag{2.4.3}$$

积分式 (2.4.3), 给出 t 的表达式

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0}\left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2}\mathrm{d}x, \tag{2.4.4}$$

代入 $R=R_0$, 得到宇宙现在的年龄

$$t_0=\frac{1}{H_0}\int_0^1\left(1-2q_0+\frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2}\mathrm{d}x. \tag{2.4.5}$$

只要 $q_0>0$, 必有 $t_0<H_0^{-1}$, 即式 (2.2.4). 式 (2.4.5) 给出的函数关系如图 2-2 所示.

当 $q_0>\frac{1}{2}(k=+1,\rho_0>\rho_c)$ 时, 积分得

$$t_0=\frac{q_0}{H_0}(2q_0-1)^{-3/2}\left[\arccos\left(\frac{1}{q_0}-1\right)-\frac{1}{q_0}(2q_0-1)^{1/2}\right]. \tag{2.4.6}$$

代入 $q_0\approx 1, H_0^{-1}\approx 2\times 10^{10}$ 年, 得到

$$t_0\approx\left(\frac{\pi}{2}-1\right)H_0^{-1}\approx 1.1\times 10^{10}\text{年}. \tag{2.4.7}$$

由式 (2.4.5) 还可以求出两次 $R=0$ 之间的时间间隔, 即宇宙的 “寿命”.

$$\tau\approx 13\times 10^{10}\text{年}. \tag{2.4.8}$$

当 $q_0=\frac{1}{2}(k=0,\rho_0=\rho_c)$ 时, 积分式 (2.4.4) 给出

$$\frac{R(t)}{R_0}=\left(\frac{3H_0t}{2}\right)^{2/3}. \tag{2.4.9}$$

式 (2.4.9) 表明 $R(t)$ 无限增大. 代入 $H_0^{-1}\approx 2\times 10^{10}$ 年, 得到

$$t_0=\frac{2}{3}H_0^{-1}\approx 1.3\times 10^{10}\text{ 年}. \tag{2.4.10}$$

这一模型称为 **Einstein-de Sitter 宇宙模型**.

当 $0<q_0<\frac{1}{2}(k=-1,\rho_0<\rho_c)$ 时, 积分式 (2.4.5) 给出

$$t_0=\frac{1}{H_0}\left[(1-2q_0)^{-1}-q_0(1-2q_0)^{-3/2}\mathrm{arcch}\left(\frac{1}{q_0}-1\right)\right]. \tag{2.4.11}$$

如果取 ρ_0 为星系内的质量密度, $q_0\approx 0.014$, $H_0^{-1}\approx 2\times 10^{10}$ 年, 则有

$$t_0=0.96H_0^{-1}\approx 1.9\times 10^{10}\text{ 年}.$$

根据同位素衰变的方法和天文学其他方法测得地球的年龄大约为 4.5×10^9 年, 太阳系的年龄大约为 5×10^9 年, 银河系的年龄大约为 1.1×10^{10} 年.

2.5　粒子视界和事件视界

光速是所有信号传播速度的上限. 设在 r_1 处于时刻 t_1 发出的光在时刻 t 到达 $r=0$, 则 $r=0$ 处的观察者在时刻 t 只能观测到来自区域 $r<r_1$ 的信号, 即只能看到这个区域内的粒子 (星系).

径向光线的传播方程可写为式 (1.4.6)

$$\int_{t_1}^{t}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}=\int_0^{r_1}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{2.5.1}$$

如果当 $t_1\to 0$ 时左端积分发散, $r=0$ 处观察者能够观测到宇宙中任何随动粒子 (星系) 在足够早时发出的信号; 如果当 $t_1\to 0$ 时左端的积分收敛, 则由式 (2.5.1) 可以确定 r_1, 即存在一个有限的区域, $r=0$ 处观察者在时刻 t 只能看到这区域内的随动粒子 (星系). 这一区域的边界称为粒子视界. 以 $r_H(t)$ 表示粒子视界的径向坐标, 则相应的固有空间距离为

$$\begin{aligned}D_H(t)&=\int_0^{r_H(t)}\sqrt{-g_{11}}\mathrm{d}r=R(t)\int_0^{r_H(t)}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}\\&=R(t)\int_0^{t}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}.\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

由式 (2.4.3) 将 $\mathrm{d}t$ 解出, 代入式 (2.5.2) 右端被积式中, 积分得到

当 $q_0>\frac{1}{2}(k=+1)$ 时

$$D_H(t)=\frac{R(t)}{R_0H_0}(2q_0-1)^{-1/2}\arccos\left[1-\frac{(2q_0-1)R(t)}{q_0R_0}\right].$$

当 $q_0=\frac{1}{2}(k=0)$ 时

$$D_H(t)=\frac{2}{H_0}\left[\frac{R(t)}{R_0}\right]^{3/2}.$$

当 $q_0<\frac{1}{2}(k=-1)$ 时,

$$D_H(t)=\frac{R(t)}{R_0H_0}(1-2q_0)^{-1/2}\mathrm{arcch}\left[1+\frac{(1-2q_0)R(t)}{q_0R_0}\right]. \tag{2.5.3}$$

对于一些宇宙模型, 在宇宙的全部演化过程 ($R=0\to R_{\max}\to 0$), 空间一点 ($r=0$) 的观察者所能看到的全部事件也只能在有限范围内, 这一范围的边界叫做**事件视界**.

在积分 (2.5.1) 中, 当 $t \to \tau$ (宇宙寿命) 或 $t \to \infty$ 时, 若左端积分发散, 则不存在事件视界, 位于 $r=0$ 的观察者只要等待有限长时间就能观测到宇宙中任一事件. 若式 (2.5.1) 左端积分收敛, 则存在事件视界, 此时有

$$\int_{t_1}^{\tau} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} \geqslant \int_0^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{2.5.4}$$

式中, τ 为宇宙年龄或无限大, r_1 为事件视界 [到观察点 $(r=0)$] 的径向坐标. 对于 $q_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$ 的模型, $t \to \infty$ 时左端积分发散, 没有事件视界. $q_0 > \dfrac{1}{2}$ 的模型, 左端积分收敛, 存在事件视界, 此时由式 (2.5.4) 可以确定事件视界与点 $r=0$ 的固有空间距离

$$\begin{aligned} D_E(t_1) =& R(t_1)\int_{t_1}^{\tau} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \frac{R(t_1)}{R_0 H_0}(2q_0-1)^{-1/2} \\ & \times \left\{2\pi - \arccos\left[1 - \frac{(2q_0-1)R(t_1)}{q_0 R_0}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

2.6 含有宇宙因子的模型

我们回到 $\lambda \neq 0$ 的引力场方程, 讨论相应的几种宇宙模型.

对于含有宇宙项的场方程, 代入 R-W 度规并进行和得到式 (2.1.5) 和 (2.1.6) 一样的运算, 得到

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} - \frac{\lambda}{3} = \frac{8\pi}{3}\rho, \tag{2.6.1}$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} - \lambda = -8\pi p. \tag{2.6.2}$$

将式 (2.6.1) 对 t 微分并代入式 (2.6.2), 得到关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho R^3) + p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R^3 = 0. \tag{2.6.3}$$

这就是式 (2.1.8). 在 2.1 节我们由守恒定律得到了此式. 与那里的情况一样, 方程 (2.6.1)~(2.6.3) 中只有两个是独立的.

对于零压 $(p=0)$ 的情况, 由式 (2.6.3) 可知 $\rho R^3 =$ 常数. 为了方便起见, 令

$$C = \frac{8\pi}{3}\rho R^3, \tag{2.6.4}$$

代入式 (2.1.7), 得到

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{\lambda}{3}R^2 - k \equiv F(R,\lambda,k). \tag{2.6.5}$$

式 (2.6.5) 称为**弗里德曼膨胀方程**. 由这一方程可知, 如果 $a(t)$ 是一个解, 则将 t 换为 $t' = (\pm t + \text{const})$ 之后对应的 $a(t')$ 仍是一个解, 因此, 可以任意选择时间坐标起点 $t = 0$. 又因为 $R = 0$ 为奇点, 通过此点时 R 不应改变, 所以 $R(t)$ 不变号. 现在 $R > 0$, 于是始终有 $R(t) \geqslant 0$. 作为例子, 下面讨论爱因斯坦宇宙和 de Sitter 宇宙.

1. 爱因斯坦宇宙

爱因斯坦在建立场方程后不久, 就试图用于宇宙学. 当时还没有发现哈勃定律, 爱因斯坦致力于建立一个静态的宇宙模型, 后来称为**爱因斯坦宇宙**. 在上面两个方程中令所有的时间导数等于零, 并令 $\lambda = 0$ (爱因斯坦开始建立的场方程), 得到

$$\frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad \frac{k}{R^2} = -8\pi p.$$

观测结果是 $\rho > 0, p \approx 0$. 上式无法与观测结果一致. 因此, 爱因斯坦在场方程中人为地引入了宇宙项 $\lambda g_{\mu\nu}$. 引入宇宙项后的静态场方程为

$$\frac{k}{R^2} - \frac{\lambda}{3} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad \frac{k}{R^2} - \lambda = -8\pi p.$$

代入 $p \approx 0$, 得到 $\dfrac{k}{R^2} = \lambda = 4\pi\rho$. 由于 $\rho > 0$, 所以有 $\lambda > 0, k = +1$. 因此, 静态的爱因斯坦宇宙是一个具有正的常曲率的闭合宇宙. 此时度规 (1.2.7) 具有形式

$$ds^2 = dt^2 - R^2[dx^2 + \sin^2 x(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], R = \text{const}. \tag{2.6.6}$$

2. de Sitter 宇宙

这是一个假想的既无物质又无辐射的宇宙模型. 由含宇宙项的场方程可知, 没有物质 ($T_{\mu\nu} = 0$) 的空间也是弯曲的. 将 $\rho = p = 0$ 代入式 (2.6.1) 和 (2.6.2), 得到

$$\lambda = \frac{3}{R^2}(\dot{R}^2 + k), \quad R\ddot{R} = \dot{R}^2 + k = \frac{R^2}{3}\lambda.$$

积分上式, 对于 $\lambda > 0$, 得到

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{A_1}\text{ch}A_1 t, \quad k = +1, \\ R &= \frac{1}{A_1}\text{sh}A_1 t, \quad k = -1, \\ R &= Ce^{A_1}t, \quad k = 0. \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

式中 $A_1 \equiv (\lambda/3)^{1/2}$;

对于 $\lambda < 0$, 得到

$$R = \frac{1}{A_2}\cos A_2 t, \quad k = -1. \tag{2.6.8}$$

式中 $A_2 \equiv (-\lambda/3)^{1/2}$;

对于 $\lambda=0$, 得到

$$R=\text{const},\quad k=0. \tag{2.6.9}$$

由式 (2.6.7)~(2.6.9) 确定的宇宙称为 de Sitter 宇宙. 该宇宙对应的空间是具有最大对称性的四维常曲率空间. 为简单起见, 设 $R(t)=\mathrm{e}^t$, 此时 Killing 方程具有形式

$$\frac{\partial\xi^0}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial\xi}{\partial x^i}g^{ij}+\frac{\partial\xi^i}{\partial t}=0, \tag{2.6.10a}$$

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}+\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}=2\delta_{ij}\xi^0. \tag{2.6.10b}$$

这一方程组的解含有 14 个参量 (A^μ 和 $B^{\mu\nu}$)

$$\begin{aligned}\xi^0 =&A^0+B_{0i}x^i,\\ \xi^i =&A^i-\frac{1}{2}A^0x^i-\frac{1}{2}B^{0i}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{4}B_{ok}x^kx^i\\ &+\frac{1}{4}\delta_{jk}B^{oi}x^jx^k+B^i_kx^k.\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

由式 (2.6.10b) 可知 $B^{\mu\nu}$ 中只有 6 个独立分量, 所以实际上有 10 个独立的 Killing 矢量. 因为 n 维空间最多存在 $n(n+1)/2$ 个 Killing 矢量, 所以 de Sitter 空间是具有最大对称性的空间. 这就是说, 四维最大对称空间有 Minkowski 空间和 de Sitter 空间. 在这样的空间中既不存在任何优越的空间方向, 也不存在任何优越的时间方向.

de Sitter 空间的 10 个参量等度量变换群正是五维 "转动" 群, 它保持元素为 $+1+1+1+1-1$ 的对角矩阵不变, 这个群称为 de Sitter 群. de Sitter 宇宙虽然因为没有物质又没有辐射而不能作为真实的宇宙模型, 但是任何 $\lambda>0$ 的宇宙当 $r\to\infty$ 时都过渡到 de Sitter 宇宙.

3. Lemaitre **宇宙**

Lemaitre 于 1927 年提出一个比爱因斯坦宇宙具有更多物质的宇宙模型. 膨胀方程 (2.6.5) 中的常数 $C>0, k=+1$. 由式 (2.6.5) 确定的 R-t 曲线可知标度因子 $R(t)$ 自 $t=0$ 开始增大, 宇宙膨胀, 随后膨胀变慢. 在 R 等于某一常数 R_c 时膨胀速率达极小值, 此后膨胀又加快, 最后趋于 de Sitter 宇宙解 (2.6.7). 这一模型的特点是持续膨胀, 但中间一段膨胀曲线有拐点. 这是一种自初始奇点 $R(0)=0$ 出发无限膨胀的模型.

2.7 宇宙早期结构和背景辐射

原则上讲, 直接观测遥远的恒星可以得到宇宙过去的信息, 但是宇宙起源于类空奇点, 对应于无限大的红移. 在宇宙诞生后的一段时间里仍然有很大的红移, 因

此实际上看不到遥远的天体. 于是, 人们只能观测离地球较近的星, 根据它们现在的情况和局部演化规律来推断宇宙早期的状态.

所有的观测和计算都表明, 早期宇宙 (大约 10^{10} 年以前) 和今天的宇宙很不相同. 早期宇宙物质处于高密状态, 基本粒子的相互作用起决定性作用, 这时时间尺度也要有所改变. 人们注意到, 时间概念本身是没有绝对意义的, 时间的测量总要和物质的性质联系在一起. 弗里德曼的坐标时间 (世界时) t 是宇宙大量元素的固有时间. 从现在的宇宙来看, 一个星系就是一个很好的钟, 但在宇宙早期只有基本粒子和它们的相互作用起决定作用, 所以只能以它们的相互作用和转化作为钟. 用这样的相继发生的一系列物理过程测量时间, 即使是宇宙早期, 距 $R=0$ 也是无限遥远的. 因此人们又分出一个"宇宙极早期".

1. 宇宙演化简史

现在宇宙物质的能量–动量张量, 其主要部分由星系物质构成, 辐射部分是极其微小的. 人们推断宇宙早期是以辐射为主的. 这样的物态方程可写为

$$p = 3/\rho, \tag{2.7.1}$$

其能量–动量张量可形式地用理想流体的能量–动量张量 (2.1.1) 表示, 将这一物态方程代入式 (2.6.1) 和 (2.6.2) 的相容条件

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = -\frac{3\dot{R}}{R}, \tag{2.7.2}$$

积分得到

$$\rho R^4 = A = \text{const.} \tag{2.7.3}$$

而将零压尘埃的能量–动量张量 $T_{\mu\nu} = \rho u_\nu u_\mu$ 代入式 (2.7.2), 积分得

$$\rho R^3 = M = \text{const.} \tag{2.7.4}$$

比较式 (2.7.3) 和 (2.7.4) 可以看出, 当宇宙半径 R 减小时, 辐射能量密度比尘埃能量密度增大得更快, 当然, 辐射温度也会升高, 量子辐射将转变为高能辐射, 粒子对将大量产生. 由此可以推断早期宇宙的演化模型.

宇宙早期, 物质开始处于一种高温 (约 10^{12}K) 高密状态. 所有基本粒子 (包括它们的反粒子) 都被束缚于热力学平衡态. 随着宇宙的迅速膨胀, 温度降低, 平衡向有利于稳态粒子产生的方向移动, 电子、质子、较轻的原子核、中微子和光子从束缚态释放出来. 随着宇宙的继续膨胀和冷却, 光子发生退耦: 光子不再有足够的能量形成正反粒子对, 也不再把能量给予别的粒子; 同时, 光子气的能量密度比其他物质的能量密度减小得更快, 它们不再影响以后的膨胀. 当温度大约为 10^9K 时,

中子和质子聚变成较重的核, 剩下由氢和 He^4 以及其他元素组成的电离气体; 按质量计大约含有 27% 的氦. 此后光子、中微子和反中微子气继续自由膨胀, 一直到 $T \approx 4000\text{K}$ 时氢的复合为止. 在 10^3K 和 10^5K 之间的某一温度, 光子、中微子和反中微子的能量密度开始小于氢和氦的静质量密度, 宇宙进入物质为主的时期.

近年来, 建立在大统一理论基础上的暴胀宇宙学已经涉及 $t \approx 10^{-36}\text{s}$ 的极早期 (王永久, 2000 及其参考文献). 那时宇宙已开始出现正反粒子数的不对称.

2. 微波背景辐射

从光子和物质退耦时开始, 光子气单独满足守恒方程 $T^{\mu\nu}_{光;\nu} = 0$. 代入式 (2.7.2), 得到

$$\rho_{光} R^4 = A. \tag{2.7.5}$$

与式 (2.7.3) 不同, $\rho_{光}$ 不支配 $R(t)$ 的变化. 由普朗克辐射定律有

$$\rho_{光} \sim T_4. \tag{2.7.6}$$

所以, 随着半径 $R(t)$ 的增大, 宇宙温度 T 按规律

$$T \sim R^{-1}(t) \tag{2.7.7}$$

降低.

1965 年, A.A.Penzias 和 R.W.Wilson 完成了对 T_0 (现在的宇宙背景温度) 的测量, 发表了题为《在 4080MHz 处剩余天线温度的测量》的论文, 公布了测量结果

$$T_0 = 3.5\text{K} \pm 1\text{K}. \tag{2.7.8}$$

观测结果和理论预言相符合. 这一发现是自从哈勃定律以来广义相对论宇宙学获得的最大成功. 此后又有重复观测, 均得到一致的结果. 宇宙演化到现在, 残留的辐射是各向同性的, 其频谱对应于温度 $T_0 \approx 2.7\text{K}$ 的黑体辐射.

宇宙温度约为 4000K 时光子和其他物质已经退耦. 由式 (2.7.8)、(2.7.7) 和 (1.4.9c) 可以得到那时的红移

$$z = \frac{4000}{2.7} - 1 \approx 1480. \tag{2.7.9}$$

因此, 宇宙背景辐射使我们能够追溯到更早期的宇宙历史, 比观测遥远天体所涉及的时间早得多, 甚至可以追溯到宇宙诞生后的几秒钟. 观测到的这种辐射的高度各向同性表明, 直到现在, 宇宙还是类弗里德曼的, 地球相对于宇宙物质整体的静止系以极小的速度运动.

第 3 章　其他宇宙模型和奇点定理

除本篇第 2 章讨论的几种宇宙模型外, 还有一些不同的宇宙模型. 实际上, 宇宙模型就是能够正确描述观测到的宇宙性质的引力场方程的严格解. 虽然只有一个真实的宇宙, 但由于观测到的数据是有限的, 而且有些观测结果还很不确定 (如减速因子的数值), 故只要能够和现阶段观测结果相符, 那些在宇宙奇点附近不同的模型都应该是同等有效的. 有些已知的宇宙解在 $t=0$ 附近是高度不均匀的和各向异性的, 然后逐渐趋于弗里德曼宇宙, 所以仍然和现在的观测结果一致. 换言之, 所有能够导致观测到的红移和微波背景辐射的模型都不会被淘汰. 甚至有些宇宙解不能解释现在观测到的宇宙现象, 人们也要去研究. 这是因为任何一个模型都是对真实的宇宙做了大量的简化才得到的, 只有通过大量模型的研究才能确定哪些简化是允许的, 哪些是假定是必需的.

3.1　Bianchi-I 型宇宙

按照混沌宇宙模型 (Misner, 1973), 宇宙早期可能是各向异性的. 本节讨论的就是比均匀各向同性空间的对称性差一些的空间 —— 均匀各向异性空间. 在这类空间中只有与平移交换相对应的三个 Killing 矢量 $\xi_i^\mu (i=1,2,3)$. 假设 $\xi^i_\mu \xi^\nu_i = \delta^\nu_\mu$, 以空间度规

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l^2 &= \gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \\ \gamma_{ij} &= -g_{ij} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

表示的三维空间的 Killing 方程为

$$\gamma_{ij,l} + \xi^k_{m,j}\xi^m_l\gamma_{ik} + \xi^k_{m,i}\xi^m_l\gamma_{kj} = 0. \tag{3.1.2}$$

考察关于 ζ^i 的一阶微分方程组

$$\zeta^i_j - (\xi^i_{m,j}\bar{\xi}^m_k)\zeta^k = 0, \tag{3.1.3}$$

可知这一方程组有三个解 ζ^i_m. 利用这些矢量可以证明, 方程 (3.1.2) 的解具有形式

$$\gamma_{ij}(t,x^i) = h_{mn}(t)\bar{\zeta}^m_i(x^k)\bar{\zeta}^n_j(x^k). \tag{3.1.4}$$

式中 $\bar{\zeta}_i^m \zeta_n^i = \delta_n^m$. 可以证明, 场方程共有 9 种独立类型的解. 这样, 按照空间的三参数运动群可将空间分为 9 类, 分别称为 Bianchi I~IX 型. 其中最简单的是 Bianchi I 型, 即 $\xi_i^\mu = \delta_i^\mu$. 总可以选择适当的坐标系, 使这三个 Killing 矢量具有形式

$$\xi_1^\mu = (0,1,0,0), \quad \xi_2^\mu = (0,0,1,0), \quad \xi_3^\mu = (0,0,0,1). \tag{3.1.5}$$

此时度规只依赖于时间坐标 $x^0 = t$. 作变换 $x'^0 = x'^0(x^0), x'^i = x^i + f^i(x^0)$, 可将度规变换成

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - g_{ij}(t)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{3.1.6}$$

可以看出, $t = \text{const}$ 的三维空间是平直的.

由式 (3.1.6) 可将场方程 $R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa\rho u_\mu \mu_\nu$ 写为

$$\frac{1}{8}\dot{g}_{ij}\dot{g}^{ij} + \frac{1}{8}\left(\frac{\dot{g}}{g}\right)^2 = \kappa\rho, \tag{3.1.7}$$

$$R_j^i - \frac{1}{2}\delta_j^i R - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{-g}g^{im}\dot{g}_{mj}) - \frac{1}{2}\delta_{j\kappa\rho}^i = 0. \tag{3.1.8}$$

守恒定律具有形式 $\dot{u}^\mu = 0$. 由此可知, 场方程的可积条件可写为

$$\kappa\rho\sqrt{-g} = M = \text{const}. \tag{3.1.9}$$

将式 (3.1.8) 缩并, 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\sqrt{-g}) = \frac{3}{2}M. \tag{3.1.10}$$

积分得

$$\sqrt{-g} = \frac{3}{4}t(Mt + A). \tag{3.1.11}$$

式中 A 为常数. 应用式 (3.1.9), 对式 (3.1.8) 作一次积分, 得到

$$\dot{g}_{ij} = \frac{Mt}{\sqrt{-g}}g_{ij} + \frac{a_i^m}{\sqrt{-g}}g_{mj}. \tag{3.1.12}$$

式中 a_i^m 为常数. 在空间中任选一点, 建立直角坐标系, 使常数矩阵 a_i^m 是对角的. 由式 (3.1.12) 可知, 度规在任何时刻都保持是对角的. 由式 (3.1.11) 和 (3.1.12) 得

$$\dot{g}_{11} = g_{11}\left[\frac{4M}{3M + A} + \frac{2P_1 A}{t(Mt + A)}\right], \quad P_1 A = \frac{2}{3}a_1^1. \tag{3.1.13}$$

式中 P_1 为常数. 积分式 (3.1.13), 得到

$$g_{11} = B(Mt + A)^{4/3}\left(\frac{t}{Mt + A}\right)^{2P_1}. \tag{3.1.14}$$

式中 B 为常数. 类似地可以得到 g_{22} 和 g_{33}. 于是得到所求的度规

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - g_{11}\mathrm{d}x^2 - g_{22}\mathrm{d}y^2 - g_{33}\mathrm{d}z^2, \\
&g_{11} = (-g)^{1/3}\left(\frac{t}{Mt+A}\right)^{2P_1-\frac{2}{3}}, \\
&g_{22} = (-g)^{2/3}\left(\frac{t}{Mt+A}\right)^{2P_2-\frac{2}{3}}, \\
&g_{33} = (-g)^{1/3}\left(\frac{t}{Mt+A}\right)^{2P_3-\frac{2}{3}}.
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

由场方程 (3.1.7) 和 (3.1.8) 可知, 常数 P_i 必须满足条件

$$P_1+P_2+P_3=1, \quad P_1^2+P_2^2+P_3^2=1. \tag{3.1.16}$$

由场源流体的四维速度 $u^\mu=(0,0,0,1)$ 可得

$$u^\mu_{;\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu,0}, \tag{3.1.17}$$

因此, 场源是沿短程线运动的无转动流体 (尘埃), 其膨胀速度为

$$\theta = \frac{2Mt+A}{t(Mt+A)}, \tag{3.1.18}$$

剪切速度

$$\sigma_{ij} = \frac{Ag_{ij}}{4\sqrt{-g}}(3P_i-1) \quad (\text{对 } i \text{ 不取和}). \tag{3.1.19}$$

可见常数 A 是切速度的量度, P_i 表征切速度的方向.

度规 (3.1.15) 描述一个均匀、各向异性的膨胀 (或收缩) 的宇宙. 由式 (3.1.16) 可知, 不可能有 $P_1=P_2=P_3$, 所以在随动系中尘埃粒子间距离的变化和方向有关. 总可以选择时间轴的方向, 使 $A>0$; 从 $t>0\to t=0$ 时度规变为奇异的.

在一般情况下有 $P_3<0$. 由式

$$\frac{\dot{g}_{33}}{g_{33}} = \frac{4Mt/3+2P_3A}{t(Mt+A)} \tag{3.1.20}$$

可知, t 很小时 z 方向的距离变化是负的, 即宇宙沿 z 方向收缩. 这种收缩直至 $t=-3P_3A/2M$ 时停止并转为膨胀. 宇宙在 x 和 y 方向是持续膨胀的. 如果宇宙在时刻 $t(t>0)$ 为一球, 则随着 t 的增大将变成一个沿 z 方向拉长了的椭球; 当 $t\to+0$ 时成为一条直线, 具有圆筒状的奇异面.

Bianchi I 型宇宙有一特点, 即质量 M 不影响 $t\to 0$ 时宇宙的演化行为. 度规 (3.1.15) 可以近似地用真空解代替

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - (t^{2P_1}\mathrm{d}x^2 + t^{2P_2}\mathrm{d}y^2 + t^{2P_3}\mathrm{d}z^2),$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1, \quad P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1, \tag{3.1.21}$$

这正是 Kasner 度规 (见第一篇第 1 章 1.5 节).

在 $P_1 = 1, P_2 = P_3 = 0$ 的特殊情况下, 我们有

$$\frac{\dot{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{4Mt/3 + 2A}{t(Mt + A)}, \quad \frac{\dot{g}_{22}}{g_{22}} = \frac{\dot{g}_{33}}{g_{33}} = \frac{4M}{3(Mt + A)}. \tag{3.1.22}$$

当 $t \to +0$ 时只在 x 方向出现奇异性. 一个 $t(t > 0)$ 时刻的球将变成一个椭球, 最后出现圆板形奇异面.

3.2 五维 Bianchi-V 型宇宙

近年来, 不少人讨论了高维宇宙模型 (王永久, 2000 及其参考文献). Ishihava 给出了五维 R-W 宇宙解. 本节讨论五维 Bianchi-V 型宇宙解, 这一解描述早期宇宙, 当时间趋于无限大时该模型趋于均匀、各向同性的膨胀宇宙.

五维 Bianchi-V 型度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - A^2(t)\mathrm{d}x^2 - B^2(t)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}y^2 - C^2(t)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}z^2 + D^2(t)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}\zeta^2. \tag{3.2.1}$$

宇宙早期, 设态方程为 $\rho = 4p$. 选取 Cartan 正交标架 $\sigma^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3, 5)$

$$\begin{aligned} &\sigma^0 = \mathrm{d}t, \quad \sigma^1 = A(t)\mathrm{d}x, \quad \sigma^2 = B(t)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y, \\ &\sigma^3 = C(t)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}z, \quad \sigma^5 = D(t)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\zeta. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

又引力常数 $k = 1$, 由外微分方法, 可以将场方程写为

$$\begin{aligned} &\ddot{A}A^{-1} + \ddot{B}B^{-1} + \ddot{C}C^{-1} + \ddot{D}D^{-1} = -\rho, \\ &\ddot{A}A^{-1} + \dot{A}A^{-1}(\dot{B}B^{-1} + \dot{C}C^{-1} + \dot{D}D^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho, \\ &\ddot{B}B^{-1} + \dot{B}B^{-1}(\dot{A}A^{-1} + \dot{C}C^{-1} + \dot{D}D^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho, \\ &\ddot{C}C^{-1} + \dot{C}C^{-1}(\dot{A}A^{-1} + \dot{B}B^{-1} + \dot{D}D^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho, \\ &\ddot{D}D^{-1} + \dot{D}D^{-1}(\dot{A}A^{-1} + \dot{B}B^{-1} + \dot{C}C^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho, \\ &\dot{B}B^{-1} + \dot{C}C^{-1} + \dot{D}D^{-1} - 3\dot{A}A^{-1} = 0. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

守恒方程 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ 给出

$$\rho = \rho_0(ABCD)^{-5/4}, \quad \rho_0 = \text{const}. \tag{3.2.4}$$

令 $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}t/A$, 得到场方程的解

$$A^3 = a\mathrm{sh}3\eta + b\mathrm{ch}3\eta - \frac{1}{12}\rho_0 q_0, \tag{3.2.5}$$

$$B = B_0 A \exp\left(q_1 \int A^{-3}\mathrm{d}\eta\right), \tag{3.2.6}$$

$$C = C_0 A \exp\left(q_2 \int A^{-3}\mathrm{d}\eta\right), \tag{3.2.7}$$

$$D = D_0 A \exp\left(q_3 \int A^{-3}\mathrm{d}\eta\right), \tag{3.2.8}$$

式中 $q_0 \cdots q_3, B_0, C_0, D_0, a$ 和 b 均为常数, 且满足关系

$$6(a^2 - b^2) + (q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1) + \frac{1}{24}\rho_0^2 q_0^2 = 0. \tag{3.2.9}$$

引入哈勃常数 $H_i (i = 1, 2, 3)$

$$H_1 = \frac{\dot{A}}{A}, \quad H_2 = \frac{\dot{B}}{B}, \quad H_3 = \frac{\dot{C}}{C}. \tag{3.2.10}$$

当 $\eta \to \infty$ 时有

$$\frac{H_1 - H_2}{H_1} \to 0, \quad \frac{H_2 - H_3}{H_2} \to 0. \tag{3.2.11}$$

所以随着时间的增加度规将趋于各向同性.

若 $b = \frac{1}{12}\rho_0 q_0$, 由式 (3.2.5) 可知 $\eta = 0$ 为奇点.

由式 (3.2.5) 和 (3.2.6) 可得

$$B^3 = B_0^3 A^3 \left(1 + \frac{a}{b}\mathrm{cth}\frac{3}{2}\eta\right)^{-q_1/a}. \tag{3.2.12}$$

类似地得到

$$C^3 = C_0^3 A^3 \left(1 + \frac{a}{b}\mathrm{cth}\frac{3}{2}\eta\right)^{-q_2/a}. \tag{3.2.13}$$

$$D^3 = D_0^3 A^3 \left(1 + \frac{a}{b}\mathrm{cth}\frac{3}{2}\eta\right)^{-q_3/a}. \tag{3.2.14}$$

如果 $a = b = \frac{1}{12}\rho_0 q_0$, 则 $A^3 = a(\mathrm{e}^{3\eta} - 1)$. 代入 $\mathrm{d}t = A\mathrm{d}\eta$, 积分得

$$t = \int A\mathrm{d}\eta = \sqrt[3]{a}\int (\mathrm{e}^{3\eta} - 1)^{1/3}\mathrm{d}\eta$$

$$= \sqrt[3]{a}\left\{(\mathrm{e}^{3\eta} - 1)^{1/3} - \frac{1}{3}[\ln(\mathrm{e}^{3\eta} - 1)^{1/3} + 1]\right.$$

$$
-\frac{1}{2}\ln[(e^{3\eta}-1)^{2/3}-(e^{3\eta}-1)^{1/3}+1]
+\frac{3}{4}\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left[(e^{3\eta}-1)^{1/3}-\frac{1}{2}\right]\Bigg\}. \tag{3.2.15}
$$

令 $\Delta\equiv 6(a^2-b^2)+\frac{1}{24}\rho_0^2q_0^2$, 式 (3.2.9) 可将解的奇异性用表 3-1 给出.

表 3-1

$\frac{q_1}{a}$	$\frac{q_2}{a}$	$\frac{q_3}{a}$	$\eta=0$			奇 性
			B	C	D	
>0	>0	>0	/	/	/	$(\Delta>0)$
			0	0	0	$(\Delta<0)$
<0	<0	<0	/	/	/	$(\Delta>0)$
			∞	∞	∞	$r(\Delta<0)$
>0	>0	<0	0	0	∞	α
>0	<0	>0	0	∞	0	α
<0	>0	>0	∞	0	0	α
>0	<0	<0	0	∞	∞	β
<0	<0	>0	∞	∞	0	β
<0	>0	<0	∞	0	∞	β

3.3 Gödel 宇 宙

Gödel (1949) (见林四朗等, 1981) 提出一个均匀、各向异性的宇宙模型. 这一四维空间度规具有形式

$$
ds^2=C^2\left[(dt+e^x dy)^2-dx^2+\frac{1}{2}e^{2x}dy^2+dz^2\right], \tag{3.3.1}
$$

式中 C 为常数, 该空间有 5 个 Killing 矢量, 可分别写为

$$
\xi_1^\mu=(0,0,1,0),\quad \xi_2^\mu=(0,0,0,1),\quad \xi_3^\mu=(1,0,0,0),
$$
$$
\xi_4^\mu=(0,1,-y,0),\quad \xi_5^\mu=\left(-2e^{-x},y,e^{-2x}-\frac{1}{2}y,0\right). \tag{3.3.2}
$$

设场源为满足条件

$$
\rho=1/kC^2,\quad \lambda=-1/2C^2 \tag{3.3.3}
$$

的尘埃, 则能量–动量张量具有形式

$$
T^{\mu\nu}=\frac{1}{2kC^2}g^{\mu\nu}+\frac{u^\mu u^\nu}{kC^2}. \tag{3.3.4}
$$

采用随动系有

$$u^\mu = \left(\frac{1}{C}, 0, 0, 0\right). \tag{3.3.5}$$

由旋速度的定义可知 $\omega^2 \equiv \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}/2 = \dfrac{1}{2C^2} = 4\pi\rho$. 设试验粒子初速度沿 x^1 方向, 在 $C \gg 1$ 的情况下, 运动方程具有形式

$$\begin{aligned} x^1 &\approx vx^0 + A\sin\frac{2\omega x^0}{c}, \\ x^2 &\approx A\left(\cos\frac{2\omega x^0}{c} - 1\right), \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

式中 A 为常数. 在随动系中观测, 自由运动成了转动. 如果惯性系定义为自由运动为直线运动的坐标系, 则惯性系以角速度 ω 相对于随动系转动. 这表明, 如果以一局部惯性系为准, 则遥远的恒星系在转动.

Gödel 宇宙模型与弗里德曼宇宙模型不同, 它含有转动物质, 还有闭合的类时世界线, 即一个观察者可以影响他自己的过去.

在我们已经讨论过的各种宇宙模型中, 物理上合理的模型是弗里德曼模型和 Bianchi 型宇宙模型. 它们的演化有一个共同特点：在过去某一时刻存在一类空奇点, 即宇宙有一个起点或者说有一个原始“大爆炸”. 那些物理上不合理的模型 (爱因斯坦宇宙, de Sitter 宇宙和 Gödel 宇宙) 都不具有上述奇点 (它们都含有宇宙项). 这些模型或者物态方程不合理, 不能给出已观测到的红移, 或者违背因果律.

3.4 六维宇宙

对作用量

$$^{(6)}I = \int R\sqrt{-g}\mathrm{d}^6x$$

应用变分原理, 便得到六维引力理论的真空场方程:

$$^{(6)}G^a_b = R^a_b - \delta^a_b R/2 = 0, \tag{3.4.1}$$

式中 R^a_b 是 Ricci 张量, R 为标曲率, 它们都由六维宇宙的度规张量 g_{ab} 构成. g_{ab} 是 $x^0, x^1, \cdots, x^6$ 的函数. 下面我们约定, 拉丁指标代表 $0, 1, \cdots, 6$; 希腊指标代表 $0, 1, 2, 3$; $^{(6)}G^a_b$ 是混合爱因斯坦张量.

$^{(6)}G^\alpha_\beta$ 可分为三个函数：$^{(4)}G^\alpha_\beta, H^\alpha_\beta$ 和 I^α_β, 它们分别对应于时空、质量和电荷, 即

$$^{(6)}G^\alpha_\beta = ^{(4)}G^\alpha_\beta + H^\alpha_\beta + I^\alpha_\beta.$$

式中几何量 H^α_β 和 I^α_β 将揭示四维宇宙的物理性质. 我们把 $-H^\alpha_\beta$ 看作宏观物体的能量–动量张量 ${}^{(m)}T^\alpha_\beta$ (或写为 $8\pi G{}^{(m)}T^\alpha_\beta/c^4$), 把 $-I^\alpha_\beta$ 看作电磁场的能量–动量张量 ${}^{(em)}T^\alpha_\beta$ (或写为 $8\pi G{}^{(em)}T^\alpha_\beta/c^4$). 这里我们不把它们看成新增维度的能量–动量张量, 因为此概念还没有建立起来; ${}^{(6)}G^a_b$ ($a \geqslant 5$ 或 $b \geqslant 5$) 仅当解方程 ${}^{(6)}G^a_b = 0$ 时才考虑. 四维宇宙的场方程可写为

$$ {}^{(4)}G^\alpha_\beta = -H^\alpha_\beta - I^\alpha_\beta = {}^{(m)}T^\alpha_\beta + {}^{(em)}T^\alpha_\beta. \tag{3.4.2} $$

这里划分爱因斯坦张量的过程实际上是四维引力理论和五维引力理论中划分爱因斯坦张量过程的推广, 且这种划分方法是唯一的, 因为过程一开始并没有涉及物理内容, 只是数学上的做法. 我们还没有给 x^5 和 x^6 以物理意义 —— 质量和电荷. 实际上, 在六维宇宙中, x^5 和 x^6 都是纯数学量, 甚至我们开始把它们看作是两个独立的坐标. 但如果从物理上来分析, 它们又可以与物理量相符合. 这和我们由牛顿近似分析爱因斯坦方程得出数学量 $g_{\mu\nu}$ 为引力势的过程是一样的. 经过这样的分析, 我们又把 x^5 和 x^6 与质量和电荷联系起来了.

按照上面的观点, 我们可以从两个方面来分析: 一是考察物理量 (如质量和电荷) 的来源, 二是分析自然现象, 如状态方程、电磁场的起源. 后面我们将这些分析应用于早期宇宙. 六维宇宙的度规可写为

$$ \mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^\nu \mathrm{d}x^{0^2} - \mathrm{e}^\lambda(\mathrm{d}x^{1^2} + \mathrm{d}x^{2^2} + \mathrm{d}x^{3^2}) + \mathrm{e}^\mu \mathrm{d}x^{5^2} + \mathrm{e}^\eta \mathrm{d}x^{6^2}, \tag{3.4.3} $$

式中 ν, λ, μ, η 是 x^0, x^5, x^6 的函数.

将式 (3.4.3) 代入真空场方程 (3.4.1), 得到

$$ \begin{aligned} {}^{(6)}G_{00} =& -3\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + \dot{\mu} + \dot{\eta})/4 - \dot{\mu}\dot{\eta}/4 - \mathrm{e}^{\nu-\mu}[3\lambda'' + 3\lambda'^2 + \eta'' + \eta'^2/2 \\ & + 3\lambda'(-\mu' + \eta')/2 - \mu'\eta'/2]/2 - \mathrm{e}^{\nu-\eta}[3\lambda^{**} + 3\overset{*}{\lambda}{}^2 + \overset{**}{\mu} + \overset{*}{\mu}{}^2/2 \\ & + 3\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{\mu} - \overset{*}{\eta})/2 - \overset{*}{\mu}\overset{*}{\eta}/2]/2 = 0, \end{aligned} \tag{3.4.4} $$

$$ {}^{(6)}G_{05} = 3\dot{\lambda}'/2 + \dot{\eta}'/2 + 3\dot{\lambda}\lambda'/4 + \dot{\eta}\eta'/4 = \nu'(3\dot{\lambda} + \dot{\eta})/4 - \dot{\mu}(3\lambda' + \eta') = 0, \tag{3.4.5} $$

$$ {}^{(6)}G_{06} = 3\dot{\overset{*}{\lambda}}/2 + \dot{\overset{*}{\mu}}/2 + 3\dot{\lambda}\overset{*}{\lambda}/4 + \dot{\mu}\overset{*}{\mu}/4 - \overset{*}{\nu}(3\dot{\lambda} + \dot{\mu})/4 - \dot{\eta}(3\overset{*}{\lambda} + \overset{*}{\mu})/4 = 0, \tag{3.4.6} $$

$$ \begin{aligned} {}^{(6)}G_{11} =& {}^{(6)}G_{22} = {}^{(6)}G_{33} = -\mathrm{e}^{\lambda-\nu}[\ddot{\lambda} + 3\dot{\lambda}^2/4 + \ddot{\mu}/2 + \dot{\mu}^2/4 + \ddot{\eta}/2 + \dot{\eta}^2/4 \\ & + \dot{\lambda}(-\dot{\nu} + \dot{\mu} + \dot{\eta})/2 + \dot{\mu}(-\dot{\nu} + \dot{\eta})/4 - \dot{\nu}\dot{\eta}/4] + \mathrm{e}^{\lambda-\mu}[\nu''/2 + \nu'^2/4 + \lambda'' \\ & + 3\lambda'^2/4 + \eta''/2 + \eta'^2/4 + \lambda'(\nu' - \mu' + \eta')/2 + \nu'(-\mu' + \eta')/4 \\ & - \mu'\eta'/4] + \mathrm{e}^{\lambda-\eta}[\overset{**}{\nu}/2 + \overset{*}{\nu}{}^2/4 + \overset{**}{\lambda} + 3\overset{*}{\lambda}{}^2/4 + \overset{**}{\mu}/2 + \overset{*}{\mu}{}^2/4 \\ & + \dot{\lambda}(\overset{*}{\nu} + \overset{*}{\mu} - \overset{*}{\eta})/2 + \overset{*}{\nu}(\overset{*}{\mu} - \overset{*}{\eta})/4 - \overset{*}{\mu}\overset{*}{\eta}/4] = 0, \end{aligned} \tag{3.4.7} $$

$$ {}^{(6)}G_{55} = -\mathrm{e}^{\mu-\nu}[3\ddot{\lambda}/2 + 3\dot{\lambda}^2/2 + \ddot{\eta}/2 + \overset{*}{\eta}{}^2/4 + 3\dot{\lambda}(-\dot{\nu} + \dot{\eta})/4 - \dot{\nu}\dot{\eta}/4] $$

$$
\begin{aligned}
&-[3\dot{\lambda}^2/4+3\lambda'(\nu'+\eta')/4+\nu'\eta'/4]-\mathrm{e}^{\mu-\eta}[\overset{**}{\nu}/2+\overset{*}{\nu}{}^2/4+3\overset{**}{\lambda}/2\\
&+3\overset{*}{\lambda}{}^2/2+3\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{\nu}-\overset{*}{\eta})/4-\overset{*}{\nu}\overset{*}{\eta}/4]=0,
\end{aligned}
\tag{3.4.8}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(6)}G_{56}=&\overset{*}{\nu}{}'/2+3\overset{*}{\lambda}{}'/2+\nu'\overset{*}{\nu}/4+3\lambda'\overset{*}{\lambda}/4-\overset{*}{\mu}(\nu'+3\lambda')/4\\
&-\eta'(\overset{*}{\nu}+3\overset{*}{\lambda})/4=0,
\end{aligned}
\tag{3.4.9}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(6)}G_{66}=&-[3\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{\nu}+\overset{*}{\lambda}+\overset{*}{\mu})+\overset{*}{\nu}\overset{*}{\mu}/4-\mathrm{e}^{\eta-\nu}[3\ddot{\lambda}+3\dot{\lambda}^2+\ddot{\mu}+\dot{\mu}^2/2\\
&+3\dot{\lambda}(-\dot{\nu}+\dot{\mu})/2-\dot{\nu}\dot{\mu}/2]/2-\mathrm{e}^{\eta-\mu}[\nu''+\nu'^2/2+3\lambda''+3\lambda'^2\\
&+3\lambda'(\nu'-\mu')/2-\nu'\mu'/2]/2=0,
\end{aligned}
\tag{3.4.10}
$$

式中 (·)、(′) 和 (∗) 分别表示对 x^0, x^5 和 x^6 取偏导数. 我们目前暂不能推断出六维宇宙的物理状态或能量–动量张量, 仅考虑六维真空宇宙. 这样做的目的是看看第五维和第六维对四维宇宙有什么样的几何效应.

我们得到一个简单的真空解:

$$
\mathrm{e}^{\nu}=C_0[\dot{f}(x^0)]^2[f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0]^{2\mp\sqrt{6}},
\tag{3.4.11}
$$

$$
\mathrm{e}^{\lambda}=[f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0]^{\pm\sqrt{6}/3},
\tag{3.4.12}
$$

$$
\mathrm{e}^{\mu}=C_5[g'(x^5)]^2[f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0]^{2\mp\sqrt{6}},
\tag{3.4.13}
$$

$$
\mathrm{e}^{\eta}=C_6[\overset{*}{h}(x^6)]^2[f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0]^{2\mp\sqrt{6}},
\tag{3.4.14}
$$

式中的 $f(x^0)$, $g(x^5)$ 和 $h(x^6)$ 分别是 x^0, x^5, 和 x^6 的任意函数; C_0, C_5, C_6 和 K_0 都是常数. 在 $g'(x^5)=\overset{*}{h}(x^6)=0$ 的条件下, 六维宇宙退化为四维宇宙, 这时第五维和第六维坐标无须存在. 如果上述条件严格满足, 则量 Gm/c^2 和 $eG^{1/2}/c^2$ 将是常数; 如果上述条件只是近似地满足, 即第五维和第六维收缩到只是目前不能观测到的程度, 则这两个量不再是常数 (尽管它们的梯度可能很小).

引进宇宙时, 度规的时间部分可变为下面的形式:

$$
\mathrm{e}^{\tau}\sim\tau^{(6\pm4\sqrt{6})/15}.
\tag{3.4.15}
$$

这个解的指数中取 (+) 号代表一个正在膨胀的四维宇宙, 取 (−) 号表示正在收缩的宇宙. 这个解与辐射宇宙的解有一个微小的差异, 这是第六维度影响的结果. 因为当第五维度收缩后, 五维宇宙的解可以严格地退化为四维辐射宇宙解.

六维宇宙中试验粒子的时迹可以用六维短程线来描述. 短程线方程具有形式

$$
\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}=0\quad(i,j,k=0,1,\cdots,6).
\tag{3.4.16}
$$

当 $k=1,2,3$ 时, 我们有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(A^{\pm\sqrt{6}/3}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)=0,
$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s} = t_x A^{\mp\sqrt{6}/3}; \tag{3.4.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(A^{\pm\sqrt{6}/3}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right) = 0,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s} = t_y A^{\mp\sqrt{6}/3}; \tag{3.4.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(A^{\pm\sqrt{6}/3}\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right) = 0,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s} = t_z A^{\mp\sqrt{6}/3}. \tag{3.4.19}$$

式中

$$A \equiv f(x^0) + g(x^5) + h(x^6) + K_0,$$

$$t_x, t_y, t_z = \text{const.}$$

当 $k=0$ 时, 式 (3.4.16) 变为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2} + \left[\frac{\ddot{f}}{\dot{f}} + (2\mp\sqrt{6})\frac{\dot{f}}{2A}\right]\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2 \\
&+ (2\mp\sqrt{6})\frac{g'}{A}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s} + (2\mp\sqrt{6})\frac{\overset{*}{h}}{A}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s} \\
&\mp \sqrt{6}A^{-3\pm4\sqrt{6}/3}/6C_0\dot{f}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right)^2\right] \\
&- (2\mp\sqrt{6})C_5 g'^2/2C_0\dot{f}A\left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right)^2 \\
&- (2\mp\sqrt{6})C_6\overset{*}{h}{}^2/2C_0\dot{f}A\left(\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.4.20a}$$

式中 f, g, h 分别是 $f(x^0), g(x^5), h(x^6)$ 的缩写.

当 $k=5,6$ 时, 方程 (3.4.16) 可写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2x^5}{\mathrm{d}s^2} - (2\mp\sqrt{6})C_0\dot{f}^2/2C_5 g' A\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2 + (2\mp\sqrt{6})\dot{f}/A\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s} \\
&\mp \sqrt{6}A^{-3\pm4\sqrt{6}/3}/6C_5 g'\left[\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right)^2\right] \\
&+ \left[\frac{g''}{g'} + (2\mp\sqrt{6})g'/2A\right]\left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right)^2 + (2\mp\sqrt{6})\overset{*}{h}/A\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}
\end{aligned}$$

$$- (2 \mp \sqrt{6}) C_6 \overset{*}{h}^2 / 2C_5 A g' \left(\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0, \tag{3.4.21}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x^6}{\mathrm{d}s^2} - (2 \mp \sqrt{6}) C_0 \dot{f}^2 / 2C_6 A \overset{*}{h} \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2 + (2 \mp \sqrt{6}) \dot{f} / A \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s} \\
&\pm \sqrt{6} A^{-3 \pm 4\sqrt{6}/3} / 6 C_6 \overset{*}{h} \left[\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right)^2\right] \\
&- (2 \mp \sqrt{6}) C_5 g'^2 / 2C_6 A \overset{*}{h} \left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right)^2 + (2 \mp \sqrt{6}) g' / A \left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right) \left(\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\right) \\
&+ \left[\frac{\overset{**}{h}}{\overset{*}{h}} + (2 \mp \sqrt{6}) \overset{*}{h} / 2A\right] \left(\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.4.22}$$

由式 (3.4.21), (3.4.22) 和 (3.4.20) 可以得到

$$C_5 g' \frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s} = C_0 \dot{f} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} + \alpha A^{-2 \pm \sqrt{6}}, \tag{3.4.23}$$

$$C_6 \overset{*}{h} \frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s} = C_0 \dot{f} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} + \beta A^{-2 \pm \sqrt{6}}, \tag{3.4.24}$$

$$\alpha, \beta = \text{const.}$$

考虑到方程 (3.4.3), 我们进一步得到

$$\begin{aligned}
\dot{f} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = &- (\beta C_5 + \alpha C_6) A^{-2 \pm \sqrt{6}} \\
&/ (C_0 C_5 + C_0 C_6 + C_5 C_6) \pm R,
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

式中

$$\begin{aligned}
R = &\left\{ \frac{C_5 C_6 (A^{-2 \pm \sqrt{6}} + A^{-2 \pm \sqrt{6}/3} t_6^2)}{C_0 (C_0 C_5 + C_0 C_6 + C_5 C_6)} \right. \\
&\left. - \frac{[(\alpha - \beta)^2 C_0 C_5 C_6 + (\beta^2 C_5 + \alpha^2 C_6) C_5 C_6] A^{-4 \pm 2\sqrt{6}}}{C_0 (C_0 C_5 + C_0 C_6 + C_5 C_6)^2} \right\}^{1/2},
\end{aligned}$$

式中 $t_6^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$.

把式 (3.4.25) 代入式 (3.4.23) 和 (3.4.24), 得到

$$g' \frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s} = \frac{[(\alpha - \beta) C_0 + \alpha C_0] A^{-2 \pm \sqrt{6}}}{C_0 C_5 + C_0 C_6 + C_5 C_6} \pm \frac{C_0 R}{C_5}, \tag{3.4.26}$$

$$\overset{*}{h} \frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s} = \frac{[(\beta - \alpha) C_0 + \beta C_5] A^{-2 \pm \sqrt{6}}}{C_0 C_5 + C_0 C_6 + C_5 C_6} \pm \frac{C_0 R}{C_6}. \tag{3.4.27}$$

由式 (3.4.26), (3.4.27) 和 (3.4.25), 可以得到坐标 x^5 和 x^6 对时间的变化率. 这里虽然不能得出函数 $g(x^5)$ 和 $h(x^6)$ 的具体形式, 但可以预测到, $g(x^5)$ 和 $h(x^6)$ 一定有极值.

当第五维和第六维收缩到 $x^0 = x^0_{C_5}$ 和 $x^0 = x^0_{C_6}$ 时, 即当 x^5 和 x^6 分别取确定值 x^5_c 和 x^6_c 时, 可得 $y'(x^5) = 0, \overset{*}{h}(x^6) = 0$. 此时六维宇宙也就变为五维, 再变为四维宇宙了. 这时式 (3.4.20a) 变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^0}{\mathrm{d}s^2} + \left[\frac{\ddot{f}}{\dot{f}} + 2(2 \mp \sqrt{6})\dot{f}A_c\right]\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2 \pm \sqrt{6}t_6^2 A_c^{-3\pm 2\sqrt{6}/3}/6C_0\dot{f} = 0, \tag{3.4.20b}$$

式中

$$A_c = f(x^0_c) + g(x^5_c) + h(x^6_c) + K_0.$$

方程 (3.4.17)~(3.4.19) 和 (3.4.20b) 即为四维宇宙的运动方程 (其中 $A = A_c$).

当注意到第五和第六维度分别表示质量和电荷时, 上面的运动方程可能导致经典麦克斯韦方程, 因为方程中含有包括定值 Gm/c^2 和 $\mathrm{e}G^{1/2}/c^2$ 的常数 A_c.

我们将看到, 所得到的六维宇宙真空解可以用来研究四维宇宙物理性质的起源. 下面我们从几个方面来讨论.

1. 早期宇宙

1) 度规

前面我们已给出六维宇宙的一个简单的真空解

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\nu} = C_0\dot{f}^2 A^{2\mp\sqrt{6}}, \quad \mathrm{e}^{\lambda} = A^{\pm\sqrt{6}/3},\\
&\mathrm{e}^{\mu} = C_5 g'^2 A^{2\mp\sqrt{6}}, \quad \mathrm{e}^{\eta} = C_6\overset{*}{h}{}^2 A^{2\mp\sqrt{6}},\\
&A \equiv f(x^0) + g(x^5) + h(x^6) + K_0,\\
&C_0, C_5, C_6 = \mathrm{const}.
\end{aligned}$$

当 $g' = \overset{*}{h} = 0$ 时, 我们得到了四维宇宙. 这表明四维宇宙被嵌在六维宇宙的某个地方; 在那里, $g(x^5)$ 和 $h(x^6)$ 取极值, 变量 $x^5 = Gm/c^2$ 和 $x^6 = eG^{1/2}/c^2$ 不再变化 (成为常数 x^5_c 和 x^6_c). 这就是四维宇宙的诞生.

2) 宏观物体的能量-动量张量

宏观物体的能量–动量张量由第五维度的几何量决定.

$$\begin{aligned}
{}^{(m)}T^0_0 =& 3\mathrm{e}^{-\nu}\widehat{\dot{\lambda}\dot{\mu}}/4c^2 + 3\mathrm{e}^{-\mu}(\dot{\overset{*}{\lambda}} + \overset{*}{\lambda}{}^2 - \overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu}/2)2\\
=& (-3 \pm \sqrt{6})/2C_0 A^{4\mp\sqrt{6}} + (5 \mp 2\sqrt{6})/2C_5 A^{4\mp\sqrt{6}}.
\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(m)}T^1_1 =& {}^{m}T^2_2 = {}^{(m)}T^3_3 = \mathrm{e}^{-\nu}(\overset{**}{\mu} + \dot{\mu}^2/2 + \dot{\lambda}\dot{\mu} - \dot{\nu}\dot{\mu}/2)/2\\
&+ \mathrm{e}^{-\mu}(\overset{**}{\nu} + \overset{*}{\nu}{}^2/2 + 2\overset{**}{\lambda} + 3\overset{*}{\lambda}{}^2/2 + \overset{*}{\nu}\overset{*}{\lambda} - \overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu} - \overset{*}{\nu}\overset{*}{\mu}/2)/2\\
=& (-12 \pm 5\sqrt{6})/6C_0 A^{4\mp\sqrt{6}} + (-3 \pm \sqrt{6})/6C_5 A^{4\mp\sqrt{6}}.
\end{aligned} \tag{3.4.29}$$

能量–动量张量的一般形式为

$$^{(m)}T^{\alpha}_{\beta} = (p+\varepsilon)\mu^{\alpha}u_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}p. \tag{3.4.30}$$

由式 (3.4.29) 可得能量密度 ε 和压强 p

$$\varepsilon = (-3\pm\sqrt{6})/2C_0A^{4\mp\sqrt{6}} + (5\mp 2\sqrt{6})/2C_5A^{4\mp\sqrt{6}}, \tag{3.4.31}$$

$$p = (12\mp 5\sqrt{6})/6C_0A^{4\mp\sqrt{6}} + (3\mp\sqrt{6})/6C_5A^{4\mp\sqrt{6}}. \tag{3.4.32}$$

ε 和 p 都是 x^0, x^5 和 x^6 的函数. 早期四维宇宙的状态方程为

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{(12\mp 5\sqrt{6})C_5 + (3\mp\sqrt{6})C_0}{3[(-3\pm\sqrt{6})C_5 + (5\mp 2\sqrt{6})C_0]}. \tag{3.4.33}$$

我们在得到宏观物体的状态方程的过程中, 并没有增加与压强和能量密度有关的其他方程. 这就是说, 第五维度的几何量在四维宇宙的诞生和自然现象的起源问题上都起着重要作用.

3) 电磁场的能量–动量张量

电磁场的能量–动量张量和第六维度的几何量有关

$$\begin{aligned}
^{(em)}T^0_0 =& \mathrm{e}^{-\nu}(3\dot\lambda\dot\eta + \dot\mu\dot\eta)/4c^2 + \mathrm{e}^{-\mu}(\overset{**}{\eta} + \overset{*}{\eta}{}^2/2 + 3\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\eta}/2 \\
& - \overset{*}{\mu}\overset{*}{\eta}/2)/2 + \mathrm{e}^{-\eta}[3\ddot\lambda + 3\dot\lambda^2 + \ddot\mu + \dot\mu^2/2 \\
& + 3\dot\lambda(\dot\mu - \dot\eta)/2 - \dot\mu\dot\eta/2]/2 \\
=& (2\mp\sqrt{6})/2C_0A^{4\mp\sqrt{6}} + (-5\pm 2\sqrt{6})/2C_5A^{4\mp\sqrt{6}}. \\
^{(em)}T^1_1 =& ^{(em)}T^2_2 = ^{(em)}T^3_3 = \mathrm{e}^{-\nu}(\ddot\eta + \dot\eta^2/2 + \dot\lambda\dot\eta + \dot\mu\dot\eta/2 \\
& - \dot\nu\dot\eta/2)/2c^2 + \mathrm{e}^{-\mu}(\overset{**}{\eta} + \overset{*}{\eta}{}^2/2 + \overset{*}{\lambda}\overset{*}{\eta} + \overset{*}{\nu}\overset{*}{\eta}/2 \\
& - \overset{*}{\mu}\overset{*}{\eta}/2)/2 + \mathrm{e}^{-\eta}[\ddot\nu + \dot\nu^2/2 + 2\ddot\lambda + 3\dot\lambda^2/2 + \ddot\mu \\
& + \dot\mu^2/2 + \dot\lambda(\dot\nu + \dot\mu - \dot\eta) + \dot\nu(\dot\mu - \dot\eta)/2 - \dot\mu\dot\eta/2]/2 \\
=& (3\mp\sqrt{6})/6C_0A^{4\mp\sqrt{6}} + (3\mp\sqrt{6})/6C_5A^{4\mp\sqrt{6}}.
\end{aligned} \tag{3.4.34}$$

值得注意的是方程 (3.4.29) 和 (3.4.34) 只含有常数 C_0 和 C_5, 不含 C_6. 这表明第五维度的物理意义比第六维度更普遍. 既然人们认为引力是 4 种相互作用中最早诞生的, 那么我们就有理由把第五维度看作是有物理意义的 —— 代表质量, 而给第六维度以电荷的意义. 由 $^{(em)}T^{\alpha}_{\alpha}$ 可得 $C_0 = (2\mp\sqrt{6})C_5/2$, 因此这个场是各向同性辐射场, 宇宙中充满了电磁辐射.

电磁场的能量–动量张量还可以用电磁场张量表示

$$^{(em)}T^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{4\pi}(-F^{\alpha\lambda}F_{\beta\lambda} + \delta^{\alpha}_{\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}/4). \tag{3.4.35}$$

由式 (3.4.34) 还不能解出式 (3.4.35), 即使电磁场张量由四维势 A 定义为 $F_{\alpha\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta}$, 由现在的度规也不可能得到它的解.

不难发现,

$$T^{\alpha}_{\beta} \equiv {}^{(m)}T^{\alpha}_{\beta} + {}^{(em)}T^{\alpha}_{\beta}$$

满足守恒条件

$$T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = 0.$$

由 C_0 和 C_5 的关系式, 可以把状态方程写为

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{19}(9 \mp 2\sqrt{6}). \tag{3.4.36}$$

在四维宇宙中, 我们选择一个适当的时间 τ, 标度因子 e^{λ} 可以写为

$$\mathrm{e}^{\lambda} = \{[(-2 \mp 2\sqrt{6})/C_5]^{1/2}(4 \pm \sqrt{6})(\tau + K)/5\}^{(6\pm4\sqrt{6})/15}.$$

常数 K 包含 x^5_c 和 x^6_c. 由于我们的宇宙正在膨胀, 所以 e^{λ} 表达式中应均有上面的符号. 状态方程为

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{19}(9 - 2\sqrt{6}) \approx 0.2,$$

这表明宇宙充满了热气体. 由此我们得出结论, 电磁辐射和热气体是早期宇宙的两个主要成分.

宇宙标度因子还显示 C_5 应取负号, 因此第五维坐标是类空的.

2. 球对称引力场

为了说明自然现象的起源, 我们把上述观点运用于球对称引力场.

1) 度规

度规的一般形式为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\nu}\mathrm{d}x^{0^2} - \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) - \mathrm{e}^{\mu}\mathrm{d}x^{5^2} - \mathrm{e}^{\eta}\mathrm{d}x^{6^2}, \tag{3.4.37}$$

式中 ν, λ, η 是 $x^0, x^1(=r), x^5$ 和 x^6 的函数, x^2 和 x^3 分别为 θ 和 φ. 由前面的讨论可知, 第五维、第六维应是类空的, 不为零的爱因斯坦张量有 12 个, 它们是 ${}^{(5)}G^0_0, {}^{(6)}G^0_1, {}^{(6)}G^0_5, {}^{(6)}G^0_6, {}^{(6)}G^1_1, {}^{(6)}G^1_5, {}^{(6)}G^1_6, {}^{(6)}G^2_2(= {}^{(6)}G^3_3, {}^{(6)}G^5_5, {}^{(6)}G^5_6, {}^{(6)}G^6_6)$. 目前还没有找到真空场方程 ${}^{(6)}G^a_b = 0$ 的解, 下面的讨论将给出这个可能解必须满足的一些条件.

2) 宏观物体的能量–动量张量

宏观物体的能量–动量张量在五维引力中的形式已在 Wang (2006) 中讨论过. 六维引力理论中所有张量方程都与五维的不同, 这里只给出球对称引力场的状态方程

$$p = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{c^4}{48\pi G}\overset{*}{\nu}\overset{*}{\lambda}\mathrm{e}^{-\mu}. \tag{3.4.38a}$$

3) 电磁场的能量–动量张量

电磁场能量–动量张量的不为零分量为

$$
\begin{aligned}
{}^{(em)}T_0^0 =& \frac{1}{4c^2}(\dot{\mu}+\dot{\lambda})\dot{\eta}\mathrm{e}^{-\nu} - e^{-\lambda}\left[\frac{1}{2}\eta''+\frac{1}{4}\eta'^2+\frac{1}{4}(\mu'-\lambda')\eta'+\frac{1}{r}\eta'\right] \\
&-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mu}\left[\overset{**}{\eta}+\frac{1}{2}\overset{*}{\eta}{}^2+\frac{1}{2}(\overset{*}{\lambda}-\overset{*}{\mu})\overset{*}{\eta}\right] \\
&-\left\{\ddot{\lambda}+\ddot{\mu}+\frac{1}{2}(\mathring{\lambda}^2+\mathring{\mu}^2)+\frac{1}{2}[\mathring{\lambda}\mathring{\mu}-\mathring{\eta}(\mathring{\lambda}+\mathring{\mu}]\right\}, \\
{}^{(em)}T_1^0 =& \frac{-1}{2c}\mathrm{e}^{-\nu}\left(\dot{\eta}'+\frac{1}{2}\dot{\eta}\eta'-\frac{1}{2}\nu'\dot{\eta}\right), \\
{}^{(em)}T_1^1 =& \frac{1}{2c^2}\left[\ddot{\eta}+\frac{1}{2}\dot{\eta}^2-\frac{1}{2}(\dot{\nu}-\dot{\mu})\dot{\eta}\right]-\left[\frac{1}{4}(\nu'+\mu')\eta'+\frac{1}{r}\eta'\right]\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&-\frac{1}{2}\left[\overset{**}{\eta}+\frac{1}{2}\overset{*}{\eta}{}^2+\frac{1}{2}(\overset{*}{\nu}-\overset{*}{\mu})\overset{*}{\eta}\right]\mathrm{e}^{-\mu}, \\
{}^{(em)}T_2^2 =& {}^{(em)}T_3^3 = \frac{1}{2c^2}\left[\ddot{\eta}+\frac{1}{2}\dot{\eta}^2+\frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\eta}+\frac{1}{2}\dot{\eta}(\dot{\lambda}-\dot{\nu})\right]\mathrm{e}^{-\nu} \\
&-\frac{1}{2}\left[\eta''+\frac{1}{2}\eta'^2+\frac{1}{2}\mu'\eta'+\frac{1}{2}\eta'(\nu'-\lambda')+\frac{1}{r}\eta'\right]\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&-\frac{1}{2}\left[\overset{**}{\eta}+\frac{1}{2}\overset{*}{\eta}{}^2+\frac{1}{2}\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\eta}+\frac{1}{2}\overset{*}{\eta}(\overset{*}{\nu}-\overset{*}{\mu})\right]\mathrm{e}^{-\mu} \\
&-\frac{1}{2}\left[\overset{\circ\circ}{\nu}+\overset{\circ\circ}{\lambda}+\ddot{\mu}+\frac{1}{2}(\dot{\nu}^2+\dot{\lambda}^2+\dot{\mu}^2)+\frac{1}{2}\dot{\nu}(\dot{\lambda}-\dot{\eta})\right. \\
&\left.+\frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu}-\dot{\eta})+\frac{1}{2}\dot{\mu}(\dot{\nu}-\dot{\eta})\right]\mathrm{e}^{-\eta}.
\end{aligned}
\tag{3.4.39}
$$

由方程 (3.4.35) 可以得到

$$
\begin{aligned}
&F_{01}=0, F_{23}=0, F^{02}F_{03}=-F^{12}F_{13}, \\
&F^{02}F_{02}-F^{03}F_{03}+F^{12}F_{12}-F^{13}F_{13}=0, \\
&{}^{(em)}T_0^0=-{}^{(em)}T_1^1=\frac{-1}{4\pi}(-F^{02}F_{02}+F^{13}F_{13}), \\
&{}^{(em)}T_1^0=\frac{-1}{4\pi}(F^{02}F_{12}+F^{03}F_{13}), \\
&{}^{(em)}T_2^2={}^{(em)}T_3^3=0.
\end{aligned}
\tag{3.4.40a}
$$

一个可能的球对称解应该满足式 (3.4.40a).

从推广的麦克斯韦方程可以得到四维矢量 J^α, 它满足连续性方程

$$J^\alpha_{;\alpha}=0.$$

它的各分量为

$$
\begin{aligned}
J^0 &= -\frac{\cos\theta F_{02}\mathrm{e}^{-\nu}}{r^2\sin\theta},\\
J^1 &= \frac{\cos\theta F_{12}\mathrm{e}^{-\lambda}}{r^2\sin\theta},\\
J^2 &= \frac{\mathrm{e}^{-\nu}}{r}\frac{\partial F_{02}}{\partial x^0}+\frac{(\dot{\lambda}-\dot{\nu})F_{02}\mathrm{e}^{-\nu}}{2cr^2}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{r^2}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^1}+\frac{(\lambda'-\nu')F_{12}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2r^2},\\
J^3 &= \frac{\mathrm{e}^{-\nu}}{(r\sin\theta)^2}\frac{\partial F_{03}}{\partial x^0}+\frac{(\dot{\lambda}-\dot{\nu})F_{03}\mathrm{e}^{-\nu}}{2c(r\sin\theta)^2}\\
&\quad -\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{(r\sin\theta)^2}\frac{\partial F_{13}}{\partial x^1}+\frac{(\lambda'-\nu')F_{13}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2(r\sin\theta)^2}
\end{aligned}
\tag{3.4.41}
$$

当我们取 $F_{03}=F_{13}=0$ 时, 方程 (3.4.40) 变为

$$
\begin{aligned}
F_{02}^2 &= 4\pi r^2\mathrm{e}^{\nu(em)}T_0^0,\\
F_{12}^2 &= 4\pi r^2\mathrm{e}^{\lambda(em)}T_0^0,\\
[{}^{(em)}T_1^0]^2 &= \mathrm{e}^{\lambda-\nu}[{}^{(em)}T_0^0]^2.
\end{aligned}
\tag{3.4.40b}
$$

由于 ν,λ,μ,η 都只是 x^0,x^1,x^5 和 x^6 的函数, 与 x^2 和 x^3 无关, 所以能量–动量张量 T_β^α 也只是 x^0,x^1,x^5 和 x^6 的函数. 于是这个场一定是球对称的. 方程 (3.4.40b) 通过 ${}^{(em)}T_0^0$ 也代表了一个围绕球对称物质的电磁场.

由能量动量守恒定律还可以得到一些关系式. 由 $T_{0;\alpha}^\alpha=0$ 得到

$$
\frac{\partial T_0^0}{\partial x^0}-\frac{1}{2c}\dot{\lambda}(T_1^1-T_0^0)-\mathrm{e}^{\nu-\lambda}\left[\frac{\partial T_1^0}{\partial r}+\left(\frac{3}{2}\nu'-\frac{1}{2}\lambda'+\frac{2}{r}\right)T_1^0\right]=0.
$$

由 $T_{1;\alpha}^\alpha=0$ 得到

$$
\frac{\partial T_1^0}{\partial x^0}-\frac{1}{2c}(\dot{\nu}+\dot{\lambda})T_1^0+\frac{\partial T_1^1}{\partial r}+\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{2}{r}\right)T_1^1,\quad -\frac{1}{2}\nu' T_0^0-\frac{2}{r}T_2^2=0.
\tag{3.4.42}
$$

3. 结论

上面的讨论说明, 第五、第六维度的数学量可以解释四维宇宙中的物理性质.

第一段讨论使我们有可能研究一些物理量的起源, 第二段讨论使我们能够研究自然现象的起源. 我们把 ${}^{(6)}G_5^5$ 分为 ${}^{(4)}G_5^5+H_5^5+I_5^5$, 把 ${}^{(6)}G_6^6$ 分为 ${}^{(4)}G_6^6+H_6^6+I_6^6$, 再由 ${}^{(6)}G_b^a=0$ 得到关系式

$$
\begin{aligned}
{}^{(4)}G_\alpha^\alpha &= 2{}^{(4)}G_5^5=2{}^{(4)}G_6^6,\\
H_\alpha^\alpha &= -H_5^5+3H_6^6.
\end{aligned}
\tag{3.4.43}
$$

Wang (2003) 已指出, 式 (3.4.43) 可导致和式 (3.4.38a) 一致的状态方程

$$
\varepsilon-3p=H_5^5-3H_6^6.
\tag{3.4.38b}
$$

对 ${}^{(6)}G_5^5$ 和 ${}^{(6)}G_6^6$ 有约束关系

$$I_5^5 = 3I_6^6, \tag{3.4.38c}$$

此式导致电磁场能量–动量张量是零迹的, 即

$${}^{(em)}T_\alpha^\alpha = 0.$$

关系式 (3.4.38a)~(3.4.38c) 也许能在四维宇宙的物理性质和引力–电磁场的状态方程中得到体现. 在特殊情况下, $e^\mu = e^\nu = 1, \overset{*}{\nu}(= -\overset{*}{\lambda}) = \dot{\nu}(= -\dot{\lambda}) = 0$, 度规 (3.4.37) 是静态的, 此时四维史瓦希解的六维模拟解满足方程 ${}^{(6)}G_b^a = 0$. 在同样情况下, 四维 R-N 解的六维模拟解满足 ${}^{(6)}G_b^a = 0(a \geqslant 5, b \geqslant 5)$, 但不满足 ${}^{(6)}G_\beta^\alpha = 0$.

为了研究引力和电磁力, 我们引入第五维和第六维坐标时带了 G 和 e, 就像爱因斯坦引入第四维时间坐标时带了常数 c 一样.

3.5 Einstein-Kartan 宇宙

本节讨论在 Einstein-Kartan 理论中的 Fridmann 宇宙模型. 讨论这一模型相对于宇宙常数 λ 和空间曲率变化的结构稳定性, 研究保守系和非保守系 (考虑黏滞性) 的情况.

R-W 度规为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right]. \tag{3.5.1}$$

设引力场源是有旋理想流体, 则有

$$\varepsilon - \frac{A}{a^6} = -\Lambda + \frac{3k}{a^2} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \tag{3.5.2}$$

$$p - \frac{A}{a^6} = \Lambda - \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + \frac{2\alpha\dot{a}}{a}, \tag{3.5.3}$$

式中 α 是体黏滞系数 (滑动黏滞系数不考虑, 因为宇宙是各向同性的), $A = \kappa^2 S_0^2 a_0^2/4$, S_0 和 a_0 是现在宇宙的参量. 采用单位系 $c = 1, \kappa = \dfrac{8\pi G}{c^4} = 1$.

利用态方程 $p = \gamma\varepsilon, 0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, 则上面二式可化为振动方程

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} - D^2\Lambda x/3 + D(D-1)kx^{1-2/D} - D(3-D)Ax^{1-6/D}/3 = 0, \tag{3.5.4}$$

式中 $x = a^{D(\gamma)}, D = 3(1+\gamma)/2$.

方程 (3.5.4) 在相空间 $(x, \dot{x})$ 中构成动力学方程组

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = D^2\Lambda x/3 + \alpha y - D(D-1)kx^{1-2/D} + D(3-D)Ax^{1-6/D}/3. \qquad (3.5.5)$$

对于我们所研究的特殊情况 (辐射 $D = 2$ 和尘埃 $D = 3/2$) 上述方程组分别具有形式

辐射 $D = 2$: $\dot{x} = y$,

$$\dot{y} = 4\Lambda x/3 + \alpha y - 2k + 2Ax^{-2}/3; \qquad (3.5.6)$$

尘埃 $D = 3/2$: $\dot{x} = y$,

$$\dot{y} = 3\Lambda x/4 + \alpha y - 3kx^{-1/3}/4 + 3Ax^{-3}/4. \qquad (3.5.7)$$

我们借助于定性分析动力学系统的方法, 来研究式 (3.5.6) 和 (3.5.7) 相对于 Λ 项和空间曲率的结构稳定性. 假定所研究的微分方程组中的参量有一个微小的扰动, 并要求相的几何形状的拓扑不变性.

$\alpha = 0$ 时, 式 (3.5.5) 具有哈密顿

$$H(x, y) = -y^2/2 + D^2\Lambda x^2/6 - D^2kx^{2-2/D}/2 - D^2Ax^{2-6/D}/6.$$

这个哈密顿的相曲线 $H(x, y) = \text{const}$ 对应于式 (3.5.5) ($\alpha = 0$) 的第一积分

$$y^2/2 + (-D^2\Lambda x^2/6 + D^2kx^{2-2/D}/2 + D^2Ax^{2-6/D}/6) = C.$$

我们在相平面上描述平直宇宙 ($k = 0$) 中系统的解. 对于 $\Lambda > 0$ [图 3-1 中的 (a)]

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = y,\\
&\dot{y} = D^2\Lambda x/3 + D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;\\
&D = 2: \quad y^2/2 = C + 2\Lambda x^2/3 - 2Ax^{-1}/3,\\
&D = 3/2: \quad y^2/2 = C + 3\Lambda x^2/8 - 3Ax^{-2}/8.
\end{aligned}$$

对于 $\Lambda = 0$ [图 3-1 中的 (b)]

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = y,\\
&\dot{y} = D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;\\
&D = 2: \quad y^2/2 = C - 2Ax^{-1}/3,\\
&D = 3/2: \quad y^2/2 = C - 3Ax^{-2}/8.
\end{aligned}$$

对于 $\Lambda < 0$ [图 3-1 中的 (c)]

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -D^2|\Lambda|\ x/3 + D(3-D)Ax^{1-6D}/3;$$
$$D=2: \quad y^2/2 = C - 2|\Lambda|\ x^2/3 - 2Ax^{-1}/3,$$
$$D=3/2: \quad y^2/2 = C - 3|\Lambda|\ x^2/8 - 3Ax^{-2}/8.$$

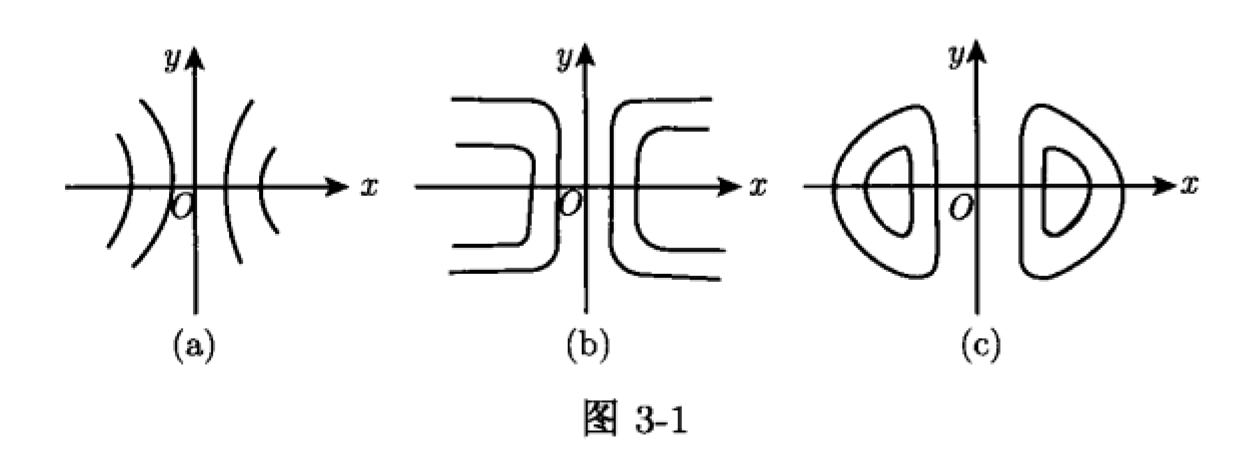


图 3-1

由图 3-1 中可以看到, 在平直宇宙的情况下, 宇宙常数的变化引起相平面结构的本质变化. 值 $\Lambda=0$ 是参量的相值, 我们得到结论, 在 Λ 的零值附近宇宙模型相对于小的变化具有结构不稳定性.

现在讨论弯曲效应. 当 $\Lambda \neq 0$, 很容易证明, 相的形象与平直模型没有区别. 对于闭合宇宙 $(k=+1)$, 当 $\Lambda=0$ [图 3-2 中的 (c)] 时

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -D(D-1)x^{1-2/D} + D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$
$$D=2: \quad y^2/2 = C - 2x - 2Ax^{-1}/3,$$
$$D=3/2: \quad y^2/2 = C - 9x^{2/3} - 3Ax^{-2}/8.$$

对于开放的宇宙 $(k=-1)$, 当 $\Lambda=0$ [图 3-2 中的 (b)] 时

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = D(D-1)x^{1-2/D} + D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$
$$D=2: \quad y^2/2 = C + 2x - 2Ax^{-1}/3,$$
$$D=3/2: \quad y^2/2 = C + 9x^{2/3}/8 - 3Ax^{-2}/8.$$

因此, 当 $\Lambda=0$ 时, 弯曲效应改变了相平面的结构. 换言之, 平直模型相对于空间曲率的变化是结构不稳定的.

现在讨论考虑体黏滞系数的宇宙系统的一些解. 方程组 (3.5.5) 是非线性的, 具有复杂的奇点. 对于闭合宇宙 $(k=+1)$, 在 $\Lambda=0$ 的情况下, 允许应用线性化程序.

对于辐射 $(D=2)$

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = \alpha y - 2 + 2Ax^{-2}/3.$$

在具有物理意义的区域 $x \geqslant 0$, 奇点是

$$x_0 = \sqrt{A/3}.$$

线性化方程

$$\ddot{\bar{x}} - \alpha\dot{\bar{x}} + 4\bar{x}\sqrt{A/3}/3 = 0$$

有解

$$x = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$
$$y = C_1\kappa_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\kappa_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

式中 λ_1 和 λ_2 是特征方程

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + 4\sqrt{3/A} = 0$$

的根, κ_1 和 κ_2 是 "分布系数" 方程

$$\kappa^2 - \alpha\kappa + 4\sqrt{3/A} = 0$$

的根.

对于相平面上的解, 可以考虑下面的情况 (图 3-2).

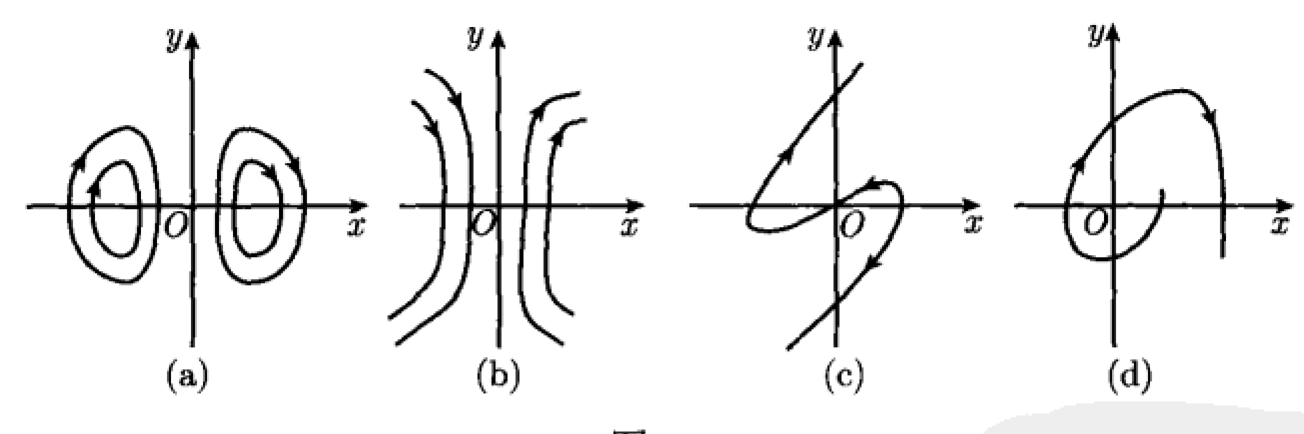


图 3-2

1. λ_1 和 λ_2 是实的, 且同号

$$\lambda_{1,2} = (\alpha \pm [\alpha^2 - 16\sqrt{3/A}]^{1/2})/2,$$

α 满足 $A > A_\alpha = 768/\alpha^4$. 这时有 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, 且存在新的变量 (ξ, η), 使 $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \lambda_1\xi, \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \lambda_2\eta, \eta = C\xi^a, a = \lambda_2/\lambda_1$. 初始坐标是不稳定节点类型的奇点.

方程组的通解 [图 3-2 中的 (a)] 为

$$x(t) = x_0 + C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

2. 根 λ_1 和 λ_2 是复共轭的

当 $0 < A < A_\alpha, A_\alpha = 768/\alpha^4$ 时出现这种情况, 此时有

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\alpha \pm \mathrm{i}(-\alpha^2 + 16\sqrt{3/A})^{1/2}\right] = a + \mathrm{i}b.$$

奇点 (0,0) 是不稳定的焦点. 由于当 $\bar{x}, y$ 是实的时 ξ 和 η 是复共轭, 故可引入中间变换

$$\lambda_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1, \quad \lambda_2 = a_1 - ib_1,$$
$$\xi = u + \mathrm{i}v, \quad \eta = u - \mathrm{i}v,$$

在极坐标系中我们得到对数螺线簇

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{a_1}{b_1}r, \quad r = C\exp\left(\frac{a_1}{b_1}\varphi\right).$$

当过渡到相平面 $(\bar{x}, y)$ 时, 螺线变形 [图 3-2 中的 (b)]. 通解为

$$x(t) = x_0 + C\mathrm{e}^{a_1 t}\sin(b_1 t + c_1),$$
$$a_1 = \mathrm{Re}\lambda, \quad b_1 = \mathrm{Im}\lambda.$$

3. 当 $A = A_\alpha = 768/\alpha^4$, 临界点是不稳定的节点

通解为

$$x(t) = x_0 + \exp(\alpha t/2)(C_1 t + C_2).$$

在尘埃的情况下, 奇点 $x_0 = A^{3/8}$. 线性化方程为

$$\ddot{\bar{x}} - \alpha\bar{x} + 2\bar{x}\sqrt{1/A} = 0.$$

特征方程

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + 2\sqrt{1/A} = 0$$

的根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[\alpha \pm (\alpha^2 - 8\sqrt{1/A})^{1/2}].$$

相的形象类似于辐射的情况 $(A_\alpha = 64/\alpha^4)$.

现在讨论当 $t \to \infty$ 时系统的渐近行为. 正如由相的形象看到的, 当 $\Lambda < 0, \alpha = 0$, 在闭合宇宙的情况下系统是周期性的, 不具有渐近行为. 当 $t \to \infty$ 时具有 $\Lambda > 0, \alpha = k = 0$ 的动力学系统由方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - D^2\Lambda x/3 = 0$$

描述, 而渐近由下式表述:

$$x(t) = C_1 \exp(\sqrt{D^2\Lambda/3}t) + C_2 \exp(-\sqrt{D^2\Lambda/3}t).$$

相应地, 当 $\Lambda = 0, \alpha = k = 0$ 时, 系统由方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

描述, 渐近为

$$x(t) = C_1 t + C_2.$$

当 $\Lambda = \alpha = 0, k = -1$ 时, 由方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2, \quad D = 2$$

描述, 渐近为

$$x(t) = (t - t_0)^2.$$

现在, 对于恒定体黏滞系数 $\alpha = \text{const}$, 我们建立奇点的相图. 半平面 (Λ, α) 上任一点对应一个宇宙模型, 式中

$$\Lambda = \frac{768(D-1)^3}{(3-D)\alpha^4}.$$

区域 $\alpha > 0$ 对应于不稳定的节点 (曲线 1 的上方) 和焦点 (曲线 1 和轴 $O\Lambda$ 之间), $\alpha < 0$ 的区域对应于稳定的节点 (曲线 2 下方) 和焦点 (曲线 2 和轴 $O\Lambda$ 之间). 奇点的种类由系统的线性化矩阵的本征值确定. 如果体黏滞系数是某个参量 δ (比如态方程中的 γ) 的函数, 则 δ 的变化引起线性化矩阵行列式的变化. 由图 3-3 可见, 当参量 δ 取某些值 (相图的大小) 时, 曲线由一种类型奇点的区域过渡到另一种类型奇点的区域. 由图可见, 结构稳定性的要求导致研究非零黏滞系数的必要性. 因此, 在这类解中, 黏滞系数是稳定性的要素.

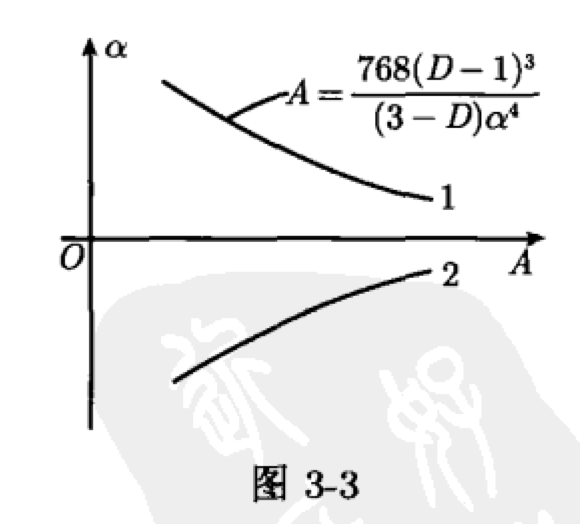


图 3-3

对本节的讨论作一小结:

(1) 所讨论的模型对于宇宙的变化 (在 $\Lambda = 0, \alpha = 0$) 是结构不稳定的.

(2) 具有 $k = \Lambda = 0$ 的模型对于空间曲率 k 的变化 (在 $\alpha = 0$) 是结构不稳定的.

(3) 宇宙常数是相图参量. 这说明即使宇宙项很小, 对于比较不同的理论模型和真实宇宙也起着重要作用. 因此, 在研究真实宇宙时, 必须考虑非零的宇宙项.

3.6 Dirac 假设

把自然界中的常数作一些组合, 按数量级有如下关系:

$$\frac{Rm_e c^2}{\mathrm{e}^2} \sim \frac{\mathrm{e}^2}{Gm_e^2} \sim \frac{hc}{Gm_p m_e} \sim \left(\frac{M}{m_p}\right)^{1/2} \sim 10^{40}, \tag{3.6.1}$$

式中 R 和 M 分别为现在的宇宙半径和相应的宇宙总质量. Dirac 认为这些数值关系不是偶然的, 是宏观量和微观量之间存在某种联系的结果. 这实际上可认为是马赫原理的推广. 就是把以局部物理规律为基础的惯性系作为宇宙普适参考系.

比如膨胀宇宙, R 随时间变化. 由式 (3.6.1) 第一式可知, 如果设微观常数不变, 则引力常数 G 就要随时间变化: $G \sim R^{-1}$; 如果假设 G 不变, 则 $e \sim R^{1/4}$. 若 e 随时间变化, 则宇宙过去的原子光谱的精细结构就会改变. 由于铀等重原子核的静电能及 α 衰变概率不同, 所以原子核的衰变方式和寿命也会改变. 这样, 用放射性元素综合确定宇宙年龄的方法就会与用其他方法测得的结果不一致. 如果 G 随时间变化, 则对恒星年龄有一定影响. 现在还没有足够证据来否定这些可能的变化.

3.7 奇点定理

在 3.3 节中已指出, 物理上合理的宇宙模型 (弗里德曼宇宙和 Bianchi 型宇宙) 都存在类空奇点. 通常人们是不喜欢有奇点的模型的. 因此总要设法避免奇点. 那么, 是否可以通过与高度对称性的偏离或其他途径避免奇点呢? 了解下面的定理是有益的.

根据第一篇式 (3.11.24). 有

$$u_{\mu;\nu} = \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) - \dot{u}_\mu u_\nu. \tag{3.7.1}$$

将式 (3.7.1) 代入恒等式

$$(u_{\mu;\nu;\tau} - u_{\mu;\tau;\nu})g^{\mu\nu}u^\tau = -R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \tag{3.7.2}$$

并利用场方程, 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\theta^2}{3} - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - k(3p+\rho) + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \dot{u}^\mu_{;\mu}. \tag{3.7.3}$$

假设 $\rho + 3p \geqslant 0$, 则当旋速度和加速度等于零时由式 (3.7.3) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\theta}\right) \geqslant \frac{1}{3}. \tag{3.7.4}$$

由此可知, 若 $\theta > 0$, 则 θ^{-1} 在过去的某一时刻为零; 若 $\theta < 0$, 则 θ^{-1} 在将来的某一时刻为零. 由于膨胀速度 θ 是体积相对变化的量度, 因此我们得到定理: 在场源物质无旋、无加速且满足式 (3.7.4) 的模型中一定存在奇点. 在弗里德曼模型中 $\theta = 3\dot{R}/R$, 这一奇点恰与 $R = 0$ 对应.

如果物质本身有旋, 但宇宙空间中存在无旋的类时短程线簇, 仍能得到类似的结论. 我们熟知, 两个指向未来的类时单位矢 u^μ 和 v^μ, 总满足 $u^\mu v_\mu \leqslant 1$. 由此根据场方程得到

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geqslant k(\rho + 3p)/2. \tag{3.7.5}$$

根据满足这些条件的短程线, 同样得到不等式 (3.7.5). 物理上试验粒子行为的奇异性对应于数学上空间的奇异性.

作为上述定理的推广, 可以证明, 如果宇宙在某段时间内是均匀的 (具有一个空间运动群), 对应的初值问题在初始曲面上有唯一解, 且所有类时 (或零) 矢量 v^μ 都满足条件 $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu > 0$, 则宇宙一定存在一奇点.

3.8 暗物质和暗能量

1. 宇宙动力学方程和临界密度

宇宙学原理告诉我们, 在宇宙学尺度上宇宙是均匀各向同性的. 其四维时空为 Robertson-Walker 度规所描述:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{3.8.1}$$

式中 $a(t)$ 为宇宙标度因子, k 为一常数. 适当选择 r 的单位, 可以使 $k = +1, 0, -1$, 分别对应于正曲率空间、零曲率空间和负曲率空间, 即分别对应于闭合的、平直的和开放的宇宙.

宇宙物质的能量–动量张量通常写成理想流体的形式

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{3.8.2}$$

式中 ρ 和 p 分别为宇宙物质密度和压强, U_μ 为四维速度

$$U^0 = 1, \tag{3.8.3}$$

$$U^i = 0. \tag{3.8.4}$$

守恒定律表述为

$$T^{\mu\nu};\nu = 0. \tag{3.8.5}$$

当 $\mu = i$ 时, 式 (3.8.5) 显然成立; 当 $\mu = 0$ 时, 式 (3.8.5) 成为

$$\mathrm{d}[a^3(\rho + p)] = a^3 \mathrm{d}p, \tag{3.8.6}$$

或者

$$\mathrm{d}(\rho a^3) = -p\mathrm{d}(a^3). \tag{3.8.7}$$

对于最简单的状态方程

$$p = w\rho, \tag{3.8.8}$$

能量密度和宇宙标度因子的关系是

$$\rho \sim a^{-3(1+w)}. \tag{3.8.9}$$

对于辐射、物质和真空分别有

$$\text{辐射} \quad p = \frac{1}{3}\rho, \quad \rho \sim a^{-1}; \tag{3.8.10}$$
$$\text{物质} \quad p = 0, \quad \rho \sim a^{-3};$$
$$\text{真空} \quad p = -\rho, \quad \rho = \text{常数}. \tag{3.8.11}$$

由 Robertson-Walker 度规出发, 根据广义相对论, 我们可以得到 Ricci 张量的非零分量

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right) g_{ij}. \end{aligned} \tag{3.8.12}$$

Ricci 标量为

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \tag{3.8.13}$$

爱因斯坦场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.8.14}$$

的 0-0 分量就是弗里德曼方程:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \tag{3.8.15}$$

场方程的 i-i 分量是

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G\rho. \tag{3.8.16}$$

方程 (3.8.7), (3.8.15) 和 (3.8.16) 由 Bianchi 恒等式相联系, 这三个方程中只有两个是独立的, 由方程 (3.8.15) 和 (3.8.16) 可以得到一个能直观表示宇宙膨胀加速度的方程

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{3.8.17}$$

我们知道现在宇宙在加速膨胀, 即 $\ddot{a} > 0$, 这就要求 $\rho + 3p < 0$, 从而我们知道, 宇宙加速膨胀的条件是物态方程参数 $w < -1/3$.

宇宙膨胀的速度由哈勃常数描述, 它是这样定义的:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \tag{3.8.18}$$

哈勃常数其实并非常数, 而是随时间变化的. 哈勃常数 H_0 是哈勃常数的当前值.

弗里德曼方程可以写成下面的形式:

$$\frac{k}{H^2a^2} = \frac{\rho}{\rho_c} - 1, \tag{3.8.19}$$

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{3.8.20}$$

由式 (3.8.19) 可见, 宇宙空间的曲率完全取决于密度. 若密度大于临界密度 ρ_c, 则 k 是正的, 宇宙空间是弯曲且有限的; 若密度小于 ρ_c, 则 k 是负的, 宇宙空间是弯曲且无限的; 若密度等于 ρ_c, k 等于零, 宇宙空间是平直的、无限的.

我们定义一个无量纲密度参数

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \tag{3.8.21}$$

则弗里德曼方程可写为

$$\frac{k}{H^2a^2} = \Omega - 1, \tag{3.8.22}$$

显然, $\Omega > 1, \Omega = 1$ 和 $\Omega < 1$ 分别对应于 $k > 0, k = 0$ 和 $k < 0$.

2. 暗物质

1937 年, 弗里兹 • 札维奇 (Fritz Zwicky) 发现大星系团中的星系具有极高的运动速度. 要束缚住这些星系, 星系团的实际质量应该是观测到的恒星总质量的 100 多倍. 即有大量的暗物质存在. 为了简化, 下面我们用牛顿引力理论讨论旋涡星系的质量计算. 假定星系质量分布是球对称的, 设半径为 r 的球面以内的质量为 $M(r)$, 则距中心 r 处的恒星的轨道速率为

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \tag{3.8.23}$$

随着距离球心的距离 r 的增大. 发光物质变得很稀少了, 这时应该可以认为 M 近于一个常量, 速度 v 就应该随半径 $r^{-\frac{1}{2}}$ 下降. 然而实际的观测与此恰恰相反, 转

动曲线在距星系中心很远处并不下降, 而是维持一个恒定的速度. 据此我们可以推知, 一定有我们所看不见的暗物质晕在贡献其引力, 维持旋转速度.

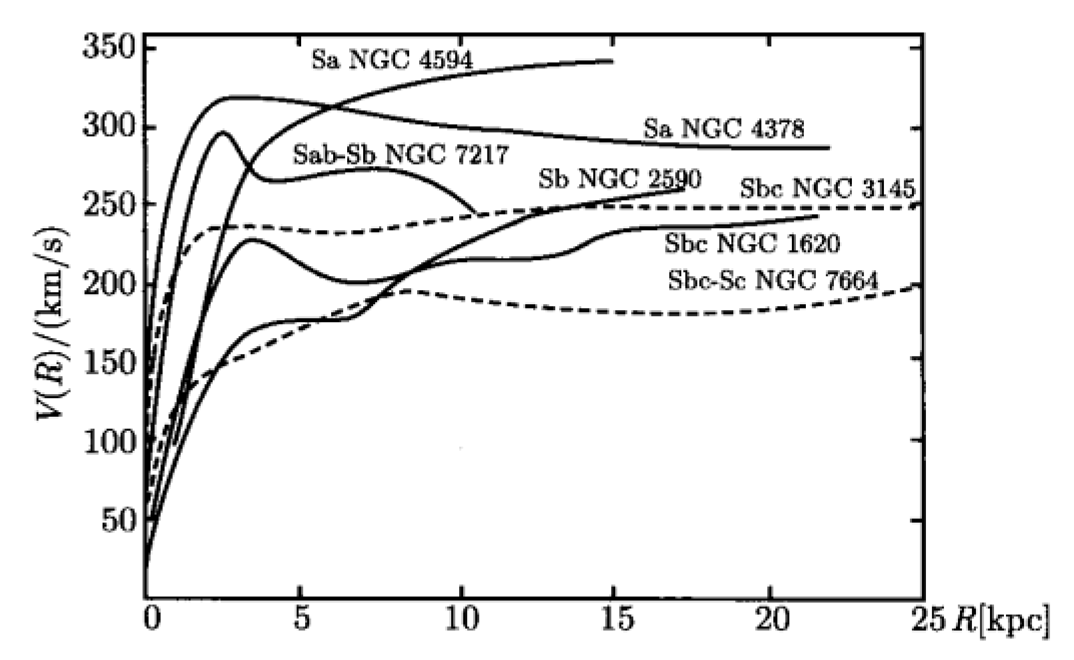


图 3-4 7 个漩涡星系的旋转曲线, 它们在距离星系中心很远的地方依然维持恒定的速度, 说明星系被一个巨大的暗物质晕所包围

根据天文观测数据, 经过简单的计算得到, 发光物质对密度参数的现在值 Ω_0 的贡献

$$\Omega_{OL} \approx 0.5\%. \tag{3.8.24}$$

人们用类似的牛顿动力学方法, 对星系团进行观测, 假定维里定理成立, 应用式 (3.8.23), 得到星系团对 Ω_0 的贡献为

$$10\% < \Omega_{OG} < 30\%. \tag{3.8.25}$$

此式与式 (3.8.24) 比较, 表明星系团中除发光物质以外还有大量暗物质.

20 世纪 80 年代提出的宇宙暴胀理论认为 $\Omega_0 \approx 1$. 后来的测量和计算都支持这一结论, 宇宙暴胀理论已得到公认, 式 (3.8.25) 表明星系团中的发光物质和暗物质的总和对 Ω_0 的贡献也只有 20% 左右, 与 $\Omega_0 \approx 1$ 比较, 人们认为除了星系团之类的成团物质之外, 还有 80% 的物质不成团, 甚至均匀分布于宇宙中. 这问题我们在下面一小节再继续讨论.

正是暗物质促成了宇宙结构的形成. 如果没有暗物质就不会形成星系、恒星和行星, 也就更谈不上今天的人类了. 宇宙尽管在大尺度上表现出均匀和各向同性, 但是在小一些的尺度上则存在着恒星、星系、星系团、巨洞以及星系长城. 在大尺度上主宰物质运动的力只有引力. 但是均匀分布的物质不会产生引力, 因此今天所有的宇宙结构必然源自于宇宙极早期物质分布的微小涨落, 这些涨落会在宇宙微波背景辐射 (CMB) 中留下痕迹. 然而普通物质不可能通过其自身的涨落形成实质上的结构而又不在宇宙微波背景辐射中留下痕迹, 因为在宇宙极早期普通物质还没有

从辐射中退耦出来. 而暗物质不与辐射耦合, 其微小的涨落在普通物质退耦之前就放大了许多倍. 在普通物质退耦之后, 已经成团的暗物质就开始吸引普通物质, 进而形成了我们现在观测到的结构. 这一初始涨落的振幅非常非常的小. 这样的物质就是冷暗物质, 它是无热 (低速) 运动的非相对论性粒子, 因此称为冷暗物质.

对于先前提到的小扰动 (涨落), 为了预言其在不同波长上的引力效应, 小扰动谱必须具有特殊的形态. 为此, 最初的密度涨落应该是标度无关的. 也就是说, 如果我们把能量分布分解成一系列不同波长的正弦波之和, 那么所有正弦波的振幅都应该是相同的. 暴涨理论的成功之处就在于它提供了很好的动力学机制来形成这样一个标度无关的小扰动谱 (其谱指数 $n = 1$). WMAP 的观测结果证实了这一预言, 其观测到的结果为 $n = 0.99 \pm 0.04$.

现在已经知道了两种暗物质 —— 中微子和黑洞. 但是它们对暗物质总量的贡献是非常微小的. 最被看好的暗物质是低温无碰撞暗物质 (CCDM), 其粒子具有寿命长、温度低、无碰撞的特性. 寿命长意味着它的寿命必须与现今宇宙年龄相当, 甚至更长. 温度低意味着在退耦时它们是非相对论性粒子, 只有这样它们才能在引力作用下迅速成团. 由于成团过程发生在比哈勃视界 (宇宙年龄与光速的乘积) 小的范围内, 而且这一视界相对现在的宇宙而言非常的小, 因此最先形成的暗物质团块或者暗物质晕比银河系的尺度要小得多, 质量也要小得多. 随着宇宙的膨胀和哈勃视界的增大, 这些最先形成的小暗物质晕会合并形成较大尺度的结构, 而这些较大尺度的结构之后又会合并形成更大尺度的结构. 其结果就是形成不同体积和质量的结构体系, 这是与观测相一致的. 相反的, 对于相对论性粒子, 如中微子, 在物质引力成团的时期由于其运动速度过快而无法形成我们观测到的结构. 因此中微子对暗物质质量密度的贡献是可以忽略的. 在太阳中微子实验中对中微子质量的测量结果也支持了这一点. 无碰撞指的是暗物质粒子 (与暗物质和普通物质) 的相互作用截面在暗物质晕中小的可以忽略不计. 这些粒子仅仅依靠引力来束缚住对方, 并且在暗物质晕中以一个较宽的轨道偏心率谱无阻碍地做轨道运动.

CCDM 被看好有几方面的原因. 第一, CCDM 的结构形成数值模拟结果与观测相一致. 第二, 作为一个特殊的亚类, 弱相互作用大质量粒子 (WIMP) 可以很好地解释其在宇宙中的丰度. 如果粒子间相互作用很弱, 那么在宇宙最初的万亿分之一秒它们是处于热平衡的. 之后, 由于湮灭它们开始脱离平衡. 根据其相互作用截面估计, 这些物质的能量密度大约占了宇宙总能量密度的 20%~30%, 这与观测相符.

3. 暗能量

自从 1929 年哈勃发现宇宙膨胀以来, 人们一直以为宇宙是减速膨胀的. 因为主宰宇宙物质运动的力是引力, 在引力作用下膨胀只能减速. 如同地面上一个竖直

上抛的物体, 在重力作用下只能减速. 然而 1997 年 12 月, 作为大红移超新星搜索小组成员的哈佛大学天文学家 R. 基尔希纳的观测结果显示, 宇宙膨胀不是减速而是在加速. 1998 年, S. 玻尔穆特和 B. 史密特两个小组利用 Ia 型超新星作标准烛光, 精确测量距离–红移关系, 发现宇宙在加速膨胀. 这一事实告诉我们, 宇宙中除了普通物质之外, 还有一种一直未被人们发现的能量, 这种能量会产生斥力, 从而推动宇宙加速膨胀. 芝加哥大学的 M. 特纳给这种能量起了个名字, 叫暗能量. 后来更多的天文观测, 如新的超新星探测, 斯隆数字巡天得到的宇宙大尺度结构, 威尔金森宇宙微波背景辐射各向异性探测器 WMAP (Wilkinson microwave anisotrope probe) 的观测, 都证实了暗能量的存在, 并且使它成为了标准宇宙模型的一部分.

S. 玻尔穆特和 B. 史密特观测到的宇宙微波背景辐射的各向异性和黑体谱, 进一步支持了标准宇宙模型, 获得了 2006 年诺贝尔物理学奖.

暗能量是一种不可见的巨大的能量, 在宇宙总物质中约占 73%, 足以主宰宇宙的运动. 它与普通物质和暗物质都有本质的不同, 它产生负压强而且均匀分布于宇宙中. 普通物质和暗物质的压强都是非负的.

暗能量是近年来宇宙学研究中一个具有里程碑意义的重大成果. 支持暗能量主要证据有二: 一是观测发现宇宙在加速膨胀. 按照爱因斯坦场方程 (3.8.17), 加速膨胀要求 $p/\rho < 0$, 导致具有负压强的暗能量. 二是由 WMAP 给出的宇宙中物质总密度的精确测定结果: 普通物质和暗物质加起来只占 27%, 仍有 73% 的短缺. 这一短缺的物质就是暗能量.

由于 WMAP 的精密数据和超新量 Ia 的观测数据, 人们确认以下观测结果:

(1) 宇宙总密度参数 $\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02$, 即宇宙几近平直;

(2) 宇宙年龄是 137 ± 2 亿年;

(3) 哈勃常数 $H_0 \approx 0.71 \pm 0.01\text{km/s/Mpc}$;

(4) 宇宙总质量 (100%)≈ 重子 + 轻子 (4.4%)+ 热暗物质 ($\leqslant 2\%$)+ 冷暗物质 ($\approx 20\%$)+ 暗能量 (73%).

暗能量的一个很重要的参数, 就是它的物态方程参数 w, 由方程 (3.8.17) 可知, 只有当 $p + 3p < 0$ 时, 才会得到加速膨胀, 即 $\ddot{a} > 0$, 此时对于物态方程 $p = w\rho$, 其参数 $w < -1/3$. 因而各种暗能量模型都必须满足 $w < -1/3$ 的条件, 同时由观测确定的 w 的值又成为检验各种暗能量模型的标准. 例如, 利用 WMAP 和 SNLS(supernova legacy survey) 可以给暗能量的物态方程参数一个很强的限制: $w = -0.967^{+0.073}_{-0.072}$.

主要的暗能量候选者有如下几种:

1) 宇宙学常数

爱因斯坦根据广义相对论构建第一个宇宙模型时, 人们尚不知道宇宙膨胀这一事实, 因而爱因斯坦引入了宇宙学常数. 试图构建一个静态的宇宙模型. 引入宇宙

学常数后, 场方程变为如下形式:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

将 $\Lambda g_{\mu\nu}$ 项移到方程的右边, 可以看出, 宇宙学常数其实提供了一个等效的能量–动量张量. 它的能量密度和压强分别是

$$\rho_c = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \tag{3.8.26}$$

$$p_c = -\frac{\Lambda}{8\pi G}. \tag{3.8.27}$$

由此可知, 相应的物态方程参数 $w = -1$. 实际上用宇宙常数构造的静态宇宙是不稳定的, 只要变大一点就会导致斥力增大和引力减小, 从而使膨胀加速. 这恰好符合现在观测到的宇宙加速膨胀的事实.

然而, 用宇宙学常数解释宇宙的加速膨胀尚有两个疑难问题. 第一个问题是宇宙常数问题, 第二个问题称为巧合 (coincidence) 问题. 由量子场论可以计算真空能, 所得到的形式与宇宙学常数给出的能量–动量张量相同, 因此可以把二者作为等效的宇宙学常数或等效真空能处理. 但是由 WMAP 给出的等效真空能为

$$p_c^{\text{obs}} = 10^{-47}\text{GeV}^4, \tag{3.8.28}$$

理论预言值为

$$p_c^{\text{th}} = 10^{74}\text{GeV}^4, \tag{3.8.29}$$

两者相差上百个数量级.

所谓巧合问题, 是指的今天的物质密度与真空能密度恰好处在同一个量级. 由于两者随宇宙膨胀的演化规律不同, 所以需要在极早期对宇宙的初始条件进行精细的微调 (fine-turning).

2) Quintessence

Quintessence 是通过引入一个标量场来构造的暗能量模型. 它的拉氏量为

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right], \tag{3.8.30}$$

式中 $V(\phi)$ 是势. 度规取平直的 R-W 度规. 由拉氏量变分就可得到 Quintessence 的运动方程

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \tag{3.8.31}$$

上面的撇号表示对 ϕ 求导. 由理想流体的能量–动量张量形式, 得到 Quintessence 的能量密度和压强分别是

$$\rho_Q = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \tag{3.8.32}$$

$$p_Q = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \tag{3.8.33}$$

由此我们可以得到它的物态方程参数

$$w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V}. \tag{3.8.34}$$

势函数 $V(\phi)$ 取不同形式, 则 w 可在 0 到 -1 之间变化. 并且一般来说, w 不再是一个常数, 而是变化的. 作为一个动力学模型, Quintessence 可以解决巧合问题. 这是一个几被公认的候选者, 可意为继夸克、轻子、中间玻色子和非重子暗物质之后的第五原质.

除了 Quintessence 以外, 还有一些不同的暗能量候选者, 下面介绍两种.

3) Phantom

Quintessence 虽然能够实现 $w < -1/3$, 从而解释宇宙加速膨胀, 但是观测表明, w 也很有可能是小于 -1 的. 因此 Caidwell 于 2002 年提出 Phantom. Phantom 也引入了一个标量场, 但与 Quintessence 不同的是, 它的动能项是负的. Phantom 的拉氏量是

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right], \tag{3.8.35}$$

它的能量密度和压强分别是

$$\rho_Q = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \tag{3.8.36}$$

$$p_Q = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \tag{3.8.37}$$

因而它的物态方程参数为

$$w = \frac{-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V}. \tag{3.8.38}$$

很明显地, 与 Quintessence 相比. Phantom 可以实现 $w < -1$. 由于 $w < -1$, Phantom 具有很有趣的性质, 如 Phantom 的能量密度是随着宇宙膨胀而增加的. 还有一种新的宇宙结局的可能性 “Big Rip”. 哈勃膨胀只是星系退行, 作为引力束缚体的星系本身是并不膨胀的. 然而 Phantom 导致的 “Big Rip” 却可以将星系、恒星、行星等引力束缚体全部破坏.

4) Quintom

Quintessence 和 Phantom 虽然可以分别实现 $w > -1$ 和 $w < -1$, 但是却不能实现 w 穿越 -1. 为了解决这个问题 Quintom 被提了出来.

Quintom 实际是由 Quintessence 和 Phantom 两场构成的, 它的拉氏量是

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2-V(\phi_1,\phi_2)\right], \tag{3.8.39}$$

它的物态方程参数为

$$w=\frac{-\frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2+\frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2-V(\phi_1,\phi_2)}{-\frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2+\frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2+V(\phi_1,\phi_2)}, \tag{3.8.40}$$

可见 Quintom 可以实现物态方程参数 w 穿过 -1.





第三篇　宇宙的暴胀





第 1 章　暴胀宇宙模型概述

1.1　标准 (大爆炸) 宇宙模型的成就和困难

大爆炸宇宙模型成功地解释了自 $t = 10^{-2}$s(轻核形成) 至 $t = 10^{10}$y(现在) 宇宙演化阶段的观测事实. 其中包括元素的起源 (氦丰度测量)、星系光谱的宇宙学红移、3K 微波背景辐射、星系计数、宇宙大尺度的均匀各向同性等. 因此, 大爆炸宇宙模型是普遍被人们所接受的. 与其他宇宙模型相比, 它是最成功的宇宙模型, 所以人们称之为标准宇宙模型.

然而, 大爆炸宇宙模型也有它的困难. 就是在 $t = 0$(大爆炸奇点) 到 $t = 10^{-10}$s 这一极早期演化阶段中的 4 个问题：奇点问题、视界问题、平直性问题、磁单极问题.

第一个问题是奇点问题. 正如第二篇第 3 章最后一节所论证的, 根据爱因斯坦引力理论和宇宙学原理, 以及哈勃定律和强能量条件 $\rho + 3p \geqslant 0$, 必然导致一个结论：宇宙必然存在一个内禀的过去类空奇点 $(t = 0, R = 0)$. 在奇点处, 温度、能量和物质密度都等于无限大, 这是没有物理意义的, 是物理学家最讨厌的. 这一问题 (宇宙的创生) 我们留在本篇第 2 章 (量子宇宙学) 详细讨论.

后面三个问题 (视界问题、平直性问题、磁单极问题) 都可以由宇宙暴胀 (inflation) 的引入而得到解决.

为了说明这三个问题的内容, 我们首先对极早期宇宙作简单的讨论.

我们考虑 $10^{-10}\text{s} > t > t_p \sim 10^{-43}$s 这一宇宙演化的极早期, 这时对应的宇宙温度为 $T_p \sim 10^{32}\text{K} > T > 10^{15}$K, 相应的能标为 $m_p \sim 10^{19}\text{GeV} > E > 10^2$GeV. 这时宇宙处于辐射为主的时期, 与极端相对论粒子的情况相同, 都有

$$p = \frac{\rho}{3}, \quad \rho \sim [R(t)]^{-4}. \tag{1.1.1}$$

由此可得

$$p \sim [R(t)]^{-4}, \quad p[R(t)]^4 = \lambda = \text{const}. \tag{1.1.2}$$

由于 $TR(t) = \text{const}$, 可知

$$\rho \sim T^4. \tag{1.1.3}$$

考虑到极端相对论粒子的静止质量为零, 由量子统计得到

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} N(T) T^4. \tag{1.1.4}$$

式中 $N(T) = N_b + \frac{7}{8}N_f, N_b$ 和 N_f 分别为玻色子和费米子的本征态数目. 熵密度为

$$s = \frac{4}{3}\rho/T = \frac{2\pi^2}{45}N(T)T^3, \tag{1.1.5}$$

粒子数密度为

$$n = \frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(N_b + \frac{3}{4}N_f\right)T^3. \tag{1.1.6}$$

式中 $\zeta(3)$ 为 R-Z 函数. 由第二篇的式 (2.6.5) 和 (1.1.1) 得到

$$\frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t)} = H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{R^2(t)} \approx \frac{8\pi}{3}\frac{\lambda}{R^4(t)}, \tag{1.1.7}$$

积分得

$$R(t) = \left(\frac{32\pi\lambda}{3}\right)^{1/4} t^{1/2}. \tag{1.1.8}$$

考虑到式 (1.1.3), 将式 (1.1.4) 代入式 (2.6.5), 得到

$$\frac{\dot{T}^2}{T^2} + \varepsilon(T)T^2 = \frac{4\pi^3}{45}N(T)T^4,$$

$$\varepsilon(T) = \frac{k}{R^2(t)T^2} = k\left[\frac{2\pi^2 N(T)}{45SR^3(t)}\right]^{2/3}. \tag{1.1.9}$$

类似于得到式 (1.1.8), 由式 (1.1.9) 得到

$$T = \left[\frac{90}{32\pi^3 N(T)}\right]^{1/4} t^{-1/2}. \tag{1.1.10}$$

下面我们说明标准宇宙模型在宇宙极早期存在的三个问题.

1. 视界问题

我们现在 (图 1-1 中的 O 点) 所接收到的宇宙中过去的信息, 都只能来自我们的**过去光锥**之内. 如图 1-1 所示, 我们接收到的来自相反方向的两个辐射信号只能发自图中的 M 和 N 两个时空点, 这两点的过去光锥并不相交. 由于信息有一个最大传播速度 (真空光速 c), 所以在大爆炸起源的宇宙内, 在时刻 t, 任意两点 (如二星系) 间的距离大于 $D = 2ct$. 这两点在小于 t 的时间内从未发生过因果联系.

$$D = 2ct \tag{1.1.11}$$

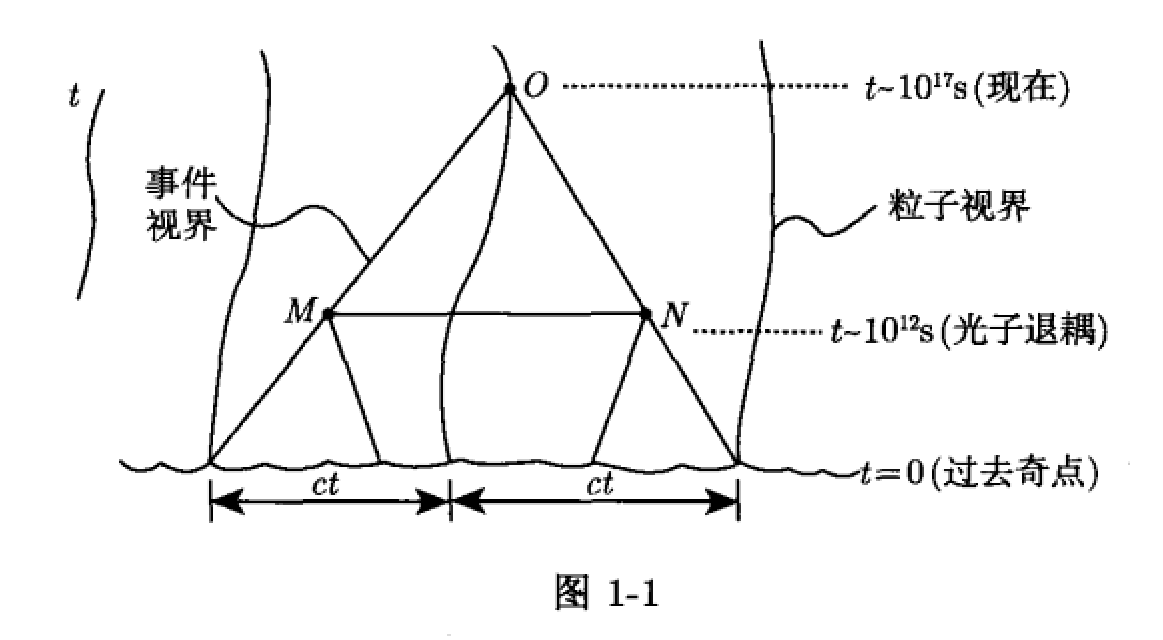


图 1-1

叫做**视界距离**. 由于视界距离 D 正比于时间 t, 而宇宙半径 R 正比于 $t^{1/2}$, 故在宇宙极早期 $(t \ll 1)$ 有 $D < R$. 即视界距离小于宇宙半径. 例如, 当 $t \sim 10^{-39}$s 时有

$$\frac{R}{D} \sim 10^{20}. \tag{1.1.12}$$

这就是说, 当 $t \sim 10^{-39}$s 时, 宇宙中至少存在 10^{20} 个无因果联系的区域.

考虑方向相反的两个微波天线, 接收到了发自 $t \sim 10^{12}$s 时的两个辐射源的微波信号, 由于宇宙大尺度的均匀各向同性, 这两个辐射源之间的距离应为视界距离的 90 倍. 这当然是不可能的. 所以, **在宇宙极早期, 宇宙大尺度的均匀各向同性是和视界的存在不相容的**. 这就是大爆炸宇宙模型的第二个困难 —— 视界问题.

2. 平直性问题 (熵疑难)

引入参量 $\Omega = 2q_0$, 根据第二篇 2.3 节的计算, 有

$$\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{8\pi\rho_0}{3H^2} = \frac{4\pi^3 N(T)T^2}{45\varepsilon}. \tag{1.1.13}$$

ρ_0 为现在的宇宙物质密度. 由目前观测资料有

$$0.1 < \Omega < 4, \quad \rho_0 \leqslant 10\frac{3H_0^2}{8\pi}. \tag{1.1.14}$$

在极早期, 宇宙物质的熵主要来源于光子和三种中微子. 利用熵守恒, 和总熵

$$S_0 = S_0 R^3(t_0) = \frac{2\pi^2 N(T_0)}{45} R^3(t_0) T_0^3, \quad T_0 \approx 2.7\text{K}$$

可以得到目前宇宙的总熵

$$S_0 \geqslant 10^{90}. \tag{1.1.15}$$

又由式 (1.1.13) 可得

$$\frac{\rho - \rho_c}{\rho} = \frac{45}{4\pi^3 N(T)T^2}\left[\frac{k}{R^2(t)T^2}\right]. \tag{1.1.16}$$

考虑到 $t \approx t_p$ 时宇宙的物质状态情况, $N(T) \sim 10^2$, 利用式

$$\frac{k}{R^2T^2} = k\left[\frac{2\pi^2}{45}\frac{N(T)}{S}\right]^{2/3}, \tag{1.1.17}$$

可以得到普朗克时期宇宙物质密度 ρ 满足

$$\frac{|\rho - \rho_c|}{\rho} < 10^{-58}, \tag{1.1.18}$$

这表明 $\rho \approx \rho_c$, 即宇宙极早期已非常平直. 事实上, 由于有了式 (1.1.15), 才有式 (1.1.18), 即极早期宇宙非常平直决定于现在的宇宙有一极大的熵. 那么, 为什么宇宙在极早期就已经非常平直了呢? 或者说, 为什么现在的宇宙有这么大的熵呢? 大爆炸宇宙模型给不出任何理由. 这就是所谓平直性问题, 也称为熵疑难.

3. *磁单极问题*

特哈夫特和玻利亚利夫 ('tHooft-Polyakov) 曾证明, 任何一个单群 $[SU(5)]$ 自发破缺到 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 时一定要出现磁单极 (非阿贝尔磁单极). 可以证明, 磁荷

$$g_{na} = \frac{hc}{e} = 2g_a,$$
$$m \sim 10^{16}\text{GeV} \sim 10^{-8}\text{g},$$

式中 g_{na} 和 g_a 分别表示非阿贝尔磁单极和阿贝尔磁单极的磁荷.

磁单极是联结不同希格斯 (Higgs) 场真空平均值的拓扑结 (拓扑孤子). 这表示真空简并或出现畴状真空 (真空泡) 时, 在不同真空泡的交接处要出现磁单极.

每个真空泡 (畴) 的线度 l 应该不大于因果关联区的长度 D

$$l \leqslant D = 2ct. \tag{1.1.19}$$

由此可知, 磁单极密度 n_m 应满足

$$n_m \sim \frac{1}{l^3} \geqslant \frac{1}{8c^3t^3}. \tag{1.1.20}$$

现在, $t = t_0$, 代入式 (1.1.20) 得到

$$\frac{n_m}{n_\gamma} \geqslant 10^{-12}, \quad n_\gamma \sim 4 \times 10^3/\text{cm}^3,$$
$$n_m \geqslant 4 \times 10^{-9}/\text{cm}^3 \sim \frac{1}{m_m^3}.$$

于是得到磁单极的质量密度

$$\rho_m = n_m \cdot m_m \geqslant 4 \times 10^{-17}\text{g/cm}^3,$$

$$\frac{\rho_m}{\rho_c} \sim 10^{12}. \tag{1.1.21}$$

但是实际观测的结果是

$$\frac{n_m}{n_\gamma} < 2 \times 10^{-28}, \tag{1.1.22}$$

而且

$$0.1 < \frac{\rho_0}{\rho_c} < 4. \tag{1.1.23}$$

理论与观测不一致, 这就是大爆炸宇宙模型的第四个困难问题 —— 磁单极问题.

1.2 暴胀宇宙模型概述

1. 大统一相变

1980 年, 麻省理工学院的古什 (Guth) 提出了一个暴胀宇宙模型: 1982 年, 林德 (Linde) 等又作了改进. 暴胀宇宙模型解决了 1.1 节所讲的大爆炸宇宙模型的三个困难问题. 这一模型和大爆炸模型的区别在于, 它认为宇宙极早期经历了一个非常短暂而又非常迅速的膨胀阶段. 这一暴胀阶段只持续了大约 10^{-30}s. 在这段时间里宇宙增大了 10^{30} 倍. 为什么会出现这样的暴胀呢? 由于暴胀宇宙是对原有的大爆炸宇宙模型的改进, 所以我们还是从大爆炸模型说起.

按大爆炸宇宙模型, 在宇宙的极早期 ($10^{-43} \sim 10^{-35}$s), 宇宙处于超高能状态 ($10^{19} \sim 10^{15}$GeV), 粒子物理学中的三种基本相互作用 (强、电磁、弱) 应统一为一个只含一个耦合常数的基本相互作用, 这就是大统一理论 (GUT). 当能标为 $10^{19} \sim 10^{15}$GeV 时, $SU(5)$ 大统一理论成立; 当能标 $\sim 10^{15}$GeV 时 ($t \sim 10^{-35}$s, $T \sim 10^{28}$K), $SU(5)$ 对称性破缺为 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. 至于对称性破缺的原因, 规范场理论认为关键在于真空. 场方程的对称性总是保持的, 真空的对称性破缺 (真空简并, 不唯一, 出现畸状真空) 引起不可观测到的物理规律的对称性破缺.

理论上, 用一个标量场 φ(希格斯场) 的基态来描述真空. 考虑到真空涨落 (单圈) 和温度效应后, 宇宙的有效势 (希格斯有效势) 如图 1-2 所示.

暴胀宇宙模型的主要思想是, 宇宙在大统一时间 ($t \sim 10^{-35}$s) 附近发生的对称性破缺相变是一级相变. 如图 1-2 和 1-3 所示, 在零温 ($T = 0$) 时, $\varphi = \sigma, V(\varphi)$ 有一个整体极小, 这是一个对称真空 ——**真真空**. 对于现在, 非零温 ($T \approx 2.7$K) 时, 宇宙这一标量场围绕真真空值有一微小的涨落 ($\lesssim 10^{-45}$GeV). 有效势 V 和宇宙常数 λ 之间存在关系式

$$\lambda = 8\pi V(\sigma). \tag{1.2.1}$$

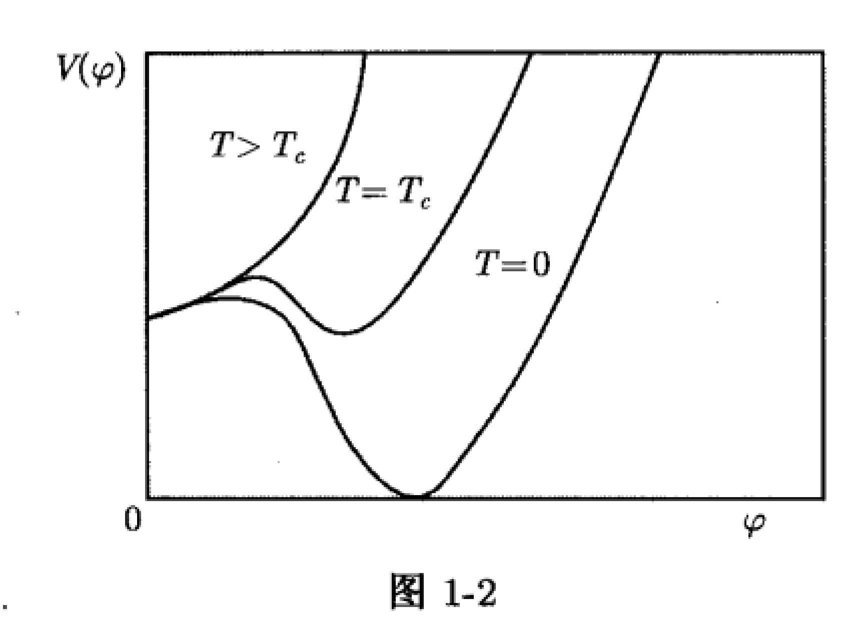


图 1-2

由于现在 λ 很小, 所以可设 $V(\sigma) = 0$. 另外, $T = 0$ 的有效势还有一个局部极小 $V|_{\varphi=0}$, 这是一个**假真空**.

设发生一级相变的温度为 T_c, 即当 $T > T_c$ 时, $V(\varphi)$ 有一整体极小; 当 $T \to T_c$ 时, 在 $\varphi \neq 0$ 处出现一个极小, 其有效势的值与假真空的相近, 在 $T = T_c$ 时这两个极小是简并的. 在 $T \ll T_c$ 的情况下, 自发对称破缺 $(\varphi = \sigma)$ 的极小为有效势的整体极小. $SU(5)$ 大统一理论的有效势恰好具有上述性质. 这就是说, 当 $T \gg T_c$ 时, $\varphi = 0$ 为有效势的整体极小; 温度继续降低, 一直到 $T \gtrsim T_c$ 之前, 宇宙一直处于 $\varphi = 0$ 的假真空态, 并按大爆炸模型 $(R \sim t^{1/2})$ 演化. 当 $T < T_c$ 时, 对称破缺的真真空态对应的极小 $(\varphi = \sigma)$ 远小于假真空态对应的极小 $(\varphi = 0)$, 真空能量密度远大于辐射能量密度, 于是宇宙处于假真空过冷状态 (亚稳态), 最后因低温破缺态的泡的自发形成而衰变, 借助于量子隧道效应, 贯穿势垒, 宇宙由假真空态跃迁到真真空态, 放出潜能 ρ_0, 实现一级相变. 当 $T_{\rm H} < T < T_c$(式中 $T_{\rm H} = H/2\pi k$ 是 Hawking 辐射温度) 时, 可证明真空能密度 ρ_v 远大于辐射能密度 ρ_γ, 宇宙物质密度 $\rho = \rho_v + \rho_\gamma \approx \rho_v = \text{const}$. 此常数值即 $V(0)$, 由大统一理论确定. 略去曲率项, 弗里德曼方程为

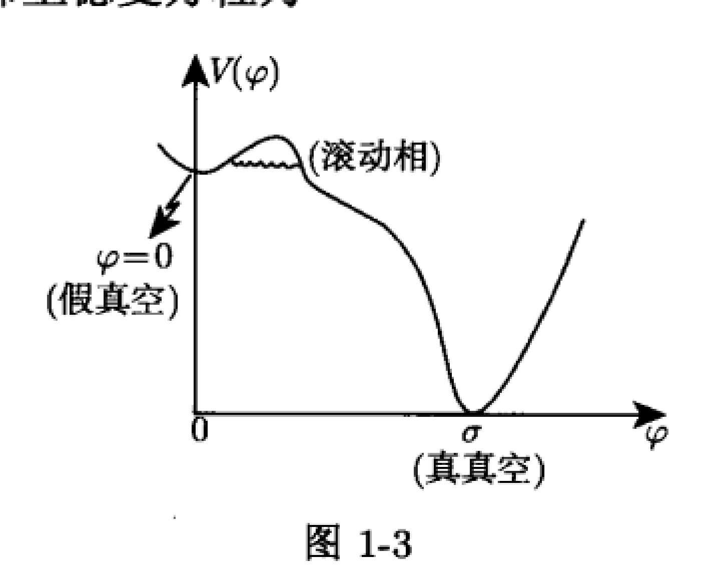


图 1-3

$$\frac{\dot{R}}{R} = (8\pi G\rho_v/3)^{1/2}, \tag{1.2.2}$$

积分得

$$R(t) \sim e^{Ht},$$
$$H = (8\pi G\rho_v/3)^{1/2}, \tag{1.2.3}$$

即当处于亚稳态的假真空时, 宇宙按指数规律暴胀 (过冷的暴胀阶段).

由连续性方程

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)H \tag{1.2.4}$$

代入 $\dot{\rho} \approx \dot{\rho}_v = 0$, 得到

$$p = -\rho \approx -\rho_v. \tag{1.2.5}$$

将式 (1.2.5) 代入式 (2.1.5), 可知 $\ddot{R} > 0$. 正是由于负压强的贡献超过了正能密度的贡献 (引力起了斥力的作用), 使得膨胀速度 $\dot{R}$ 随时间增大. 这和大爆炸模型的情况相反, 那里的 ρ 和 p 都是正的, 致使膨胀速度随时间减小.

2. 慢滚动相

当 $T \approx T_{\rm H}$ 时, 宇宙由假真空向真真空发生量子跃迁, 继续以指数形式暴胀. 跃迁 (处于真真空) 的宇宙线度 $\sim 10^{-20}$cm, 经过滚动相阶段 ($\tau \sim 10^{-32}$s) 后, $R > 10^{28}$cm, 即达到目前可观测的宇宙半径. 这就是说, 只需要要求滚动相时空 $\tau > 10^{-32}$s, 真空泡的半径就大于目前可观测宇宙的半径, 即目前我们的可观测宇宙位于一个真空泡 (畴内). 这样, 磁单极问题就得到了解决.

在滚动相后, 希格斯场在对称性破缺的稳定真真空 $\varphi = \sigma$ 处发生振荡, 出现下列转化:

希格斯粒子 $\rightarrow$ 规范粒子, 重子, 重子数不守恒, γ 光子

真空能 $\rightarrow$ 物质能 (辐射为主)

指数暴胀 ($R \sim {\rm e}^{Ht}$) $\rightarrow$ 标准膨胀 ($R \sim t^{1/2}$)

随着真空能转化为物质能, 宇宙被重新加热 (潜热释放), 宇宙温度由 $T_{\min}$ 升至 $T_c = T_{\rm GUT}$. 以后宇宙以辐射为主, 按标准模型 (大爆炸模型) 演化.

3. 宇宙熵

由前面的讨论可知, 暴胀前和暴胀后 (被重新加热) 的温度差不多都接近于 T_c, 因此暴胀前后宇宙的熵密度之间存在关系

$$S_1 \approx S_2. \tag{1.2.6}$$

由于 $R_2 \approx ZR_1$, 总熵 $S = R^3S$, 所以有

$$S_2 = Z^3 S_1. \tag{1.2.7}$$

这样, 如果假设暴胀之前总熵 $S_1 \sim 1$, 那么只要 $Z \geqslant 10^{28}$(实际上没有上限), 就可知现在宇宙总熵 S_0 满足

$$S_0 \approx S_2 \geqslant 10^{90}. \tag{1.2.8}$$

这就成功地解释了现在观测到的宇宙总熵比 10^{90} 还大这一事实. 也就是说, 宇宙总熵几乎全部来源于由假真空态向真真空态跃迁直到重新加热的非绝热过程.

设 $t = 10^{-39}$s(宇宙极早期), 可得

$$\left(\frac{D}{R_t}\right)^3 = 10^{-83}Z^3 \sim 10^2, \tag{1.2.9}$$

即视界距离大于宇宙半径, 成功地解决了视界问题; 整个宇宙内各部分之间都可以存在因果联系.

设 $t = t_p = 10^{-43}$s(暴胀前), 可得

$$\frac{|\rho - \rho_c|}{\rho} < 10^{-58}Z^2 \sim 10^{-2}. \tag{1.2.10}$$

可见宇宙在极早期 ($t = t_p$) 并不平直, 只是经过暴胀阶段 (熵骤增) 后宇宙才变得很平直, 于是平直性困难得到解决.



第2章　宇宙的暴胀

上一章我们讨论了暴胀宇宙模型的整体图像，本节将对这一图像的一些细节和一些相关问题做一补充讨论.

2.1　'tHooft-Polyakov 磁单极

设背景时空为 $1+D$ 维 Minkowski 时空

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^{0^2} - \eta_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k, \quad i,k=1,2,\cdots,D. \tag{2.1.1}$$

当 $D=3$ 时，对于希格斯场 (标量场)$\varphi_a(x)$ 和 Yang-Mills 场 $A_a^\mu(x)$ 相互作用，拉格朗日具有形式

$$L = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu} + \frac{1}{2}\varphi_{a;\mu}\varphi_a^{;\mu} - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi_a\varphi_a - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2, \tag{2.1.2}$$

式中

$$\begin{aligned}
F_{a\mu\nu} &= A_{\mu a,\nu} - A_{\nu a,\mu} + e\varepsilon_{abc}A_{\mu b}A_{\nu c},\\
\varphi_{a;\mu} &= \varphi_{a,\mu} + e\varepsilon_{abc}A_{\mu b}\varphi_c.
\end{aligned}$$

由于 $m^2>0$，所以 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 的对称性是自发破缺的. 与上式对应的场方程为

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu a}^{;\nu} &= e\varepsilon_{abc}(F_{\mu\nu b}A_c^\nu - \varphi_{b;\mu}\varphi_c),\\
\varphi_{a;\mu}^{;\mu} &= e\varepsilon_{abc}\varphi_{b;\mu}A_c^\mu + m^2\varphi_a - \lambda\varphi_a\varphi^2.
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

方程 (2.1.3) 的拓扑孤子解，称为 'tHooft-Polyakov 磁单极解，此解可写为球对称形式

$$\begin{aligned}
e\varphi_a &= g(r)\frac{r_a}{r^2},\\
A_0^a &= 0, \quad eA_i^a = \varepsilon_{aik}\frac{r_k}{r^2}[1-h(r)].
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

将式 (2.1.4) 代入场方程 (2.1.3)，得到微分方程

$$r^2 g_{,rr} = g(r)[2h^2(r) - m^2r^2 + \eta g^2(r)/\mathrm{e}^2],$$

$$r^2 h_{,rr} = h(r)[h^2(r) - 1 + g^2(r)]. \tag{2.1.5}$$

式 (2.1.5) 的严格解至今尚未找到. Actor(1979) 经分析指出, 当 $r \to \infty$ 时, 此方程组的解应满足边界条件

$$h(r) \to A(m,\lambda,e)r\mathrm{e}^{-\beta r}, \quad \beta = \left(\frac{em}{\sqrt{\lambda}}\right)^{1/2}; \tag{2.1.6a}$$

$$g(r) \to \left(\frac{me}{\sqrt{\lambda}}\right) r + D(m,\lambda,e)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}mr}; \tag{2.1.7a}$$

$$A_i^a \to \varepsilon_{\mathrm{ain}} \frac{1}{e}\frac{r_n}{r^2}; \tag{2.1.8a}$$

$$\varphi_a \to \frac{r_a}{r}\left[\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right) + \left(\frac{D}{e}\right)\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}mr}\right]. \tag{2.1.9a}$$

当 $r \to 0$ 时有

$$h(r) \to 1 + eB(m,\lambda,e)r^2; \tag{2.1.6b}$$

$$g(r) \to eC(m,\lambda,e)r^2; \tag{2.1.7b}$$

$$A_i^a \to -\varepsilon_{\mathrm{ain}} r_n B(m,\lambda,e); \tag{2.1.8b}$$

$$\varphi_a \to C(m,\lambda,e)r_a, \tag{2.1.9b}$$

式中 A, B, C, D 均为常数.

规范场理论指出, 与规范势 A_i^a 的无质量分量 G_μ 对应的 Maxwell 张量为

$$F_{\mu\nu} = \hat{\varphi}_a F_{a\mu\nu} = G_{\nu,\mu} - G_{\mu,\nu} - \frac{1}{e}\varepsilon_{abc}\hat{\varphi}_a\hat{\varphi}_{b,\mu}\hat{\varphi}_{c,\nu}, \tag{2.1.10}$$

式中

$$G_\mu = \hat{\varphi}_a A_\mu^a, \hat{\varphi}_a = \frac{\varphi_a}{\varphi}, \varphi = (\varphi_a\varphi_a)^{1/2}. \tag{2.1.11}$$

由式 (2.1.4) 得到

$$G_\mu = 0, \quad \hat{\varphi}_a = \hat{r}_a, \tag{2.1.12}$$

代入式 (2.1.10), 得到 Maxwell 张量的各分量和磁场强度

$$F_{0\mu} = 0, \tag{2.1.13}$$

$$F_{ij} = -\frac{1}{e}\varepsilon_{abc}\hat{r}_a\hat{r}_{b,i}\hat{r}_{c,j}, \tag{2.1.14}$$

而

$$\left(\frac{x_b}{r}\right)_{,i} = \frac{1}{r}\delta_{bi} - \frac{2}{r^2}x_i x_b,$$

$$\left(\frac{x_c}{r}\right)_{,j} = \frac{1}{r}\delta_{cj} - \frac{2}{r^2}x_j x_c,$$

所以

$$F_{ij} = -\frac{1}{e}\varepsilon_{ijk}\frac{r_k}{r^3}. \tag{2.1.15}$$

由式 (2.1.14) ~ 式 (2.1.15) 得到

$$B_i = \frac{g}{r^2}\hat{r}_i. \tag{2.1.16}$$

这正是磁荷 $g = \dfrac{1}{e}$ 的静止磁单极在 r 处产生的磁场强度. 与狄拉克 (Dirac, 1931) 磁单极的磁荷

$$g_D = \frac{1}{e}\frac{n}{2} \tag{2.1.17}$$

比较可知, 'tHooft-Polyakov 磁单极的最小磁荷 g 为狄拉克磁单极磁荷的 2 倍.

引入磁流 J_μ

$$J_\mu = \tilde{F}^{\mu\nu}_{,\nu}, \tag{2.1.18}$$

式中 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 为 $F^{\mu\nu}$ 的对偶张量则显然有

$$J^\mu_{,\mu} = 0, \tag{2.1.19}$$

即存在积分守恒量 (磁荷)

$$g_m = \frac{1}{e}\frac{\oint \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r^3} = \frac{1}{e}\cdot 4\pi n, \tag{2.1.20}$$

式中 n 为积分路径环绕 $r=0$ 的 "圈数". 这一守恒量子数叫做数或拓扑荷.

假设 $n \neq 0$ 的闭合面连续变小, 如果面内一直没有拓扑奇点则闭合面将缩为一点, 这显然是不可能的. 可见 'tHooft-Polyakov 磁单极位于拓扑奇点或拓扑缺陷处, 实际上这就是不同 $SU(2)$[或 $SO(3)$] 真空之间的拓扑结.

2.2 $SU(5)$ 大统一理论和有效势

20 世纪六七十年代, 理论物理学家提出了一类统一理论, 把弱相互作用, 电磁相互作用和强相互作用纳入了一个统一的理论框架, 这类理论称为大统一理论 (GUT).

按照规范场理论, 一切现有的相互作用都是规范相互作用. 即用一个单群来描述一个场论的内部对称性, 它们在规范变换下具有不变性. 如果群参数与时空有关 (把规范变换局域化), 要使场论保持原有对称性, 就必须引入与群的生成元个数相同的规范场, 这些规范场就是传递对应相互作用的中间玻色子场. 在拉氏量中规范场不能含质量项 (为了保持规范不变性), 所以在这类理论中还必须引入一类希格斯场, 以使规范对称性破缺, 从而与我们观察到的物理现象相符.

与电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用相对应的对称群分别是 $U(1), SU(2)$ 和 $SU(3)$. 弱、电磁统一理论是通过规范群

$$SU(2) \times U(1) \tag{2.2.1}$$

实现的. 20 世纪 60 年代末, 人们把强相互作用纳入了 $SU(3)$ 规范场理论, 通过规范群

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \tag{2.2.2}$$

建立了粒子物理中的标准模型理论.

20 世纪 70 年代, Georgi 等提出将单群 $SU(5)$ 作为规范群的大统一理论. 由于 $SU(5)$ 群的秩是 4, 恰好等于群 (2.2.2) 的秩, 所以可将式 (2.2.2) 的规范群嵌入 $SU(5)$ 中; 或者说在一定能量标度时, $SU(5)$ 的对称性可以破缺到式 (2.2.2) 的对称性.

在规范场论中, 由于对称性自发破缺所出现的不对称真空的势能要低于对称真空的势能, 这时将导致相变. 下面将指出, 这是一种一级相变, 在相变过程中将放出潜热. 为了讨论在早期宇宙中的应用, 我们首先引入有效势的概念.

以标量场为例, 生成泛函为

$$Z(J) = \int \mathrm{D}[\varphi]\mathrm{e}^{is}, \tag{2.2.3}$$

$$s = s(\varphi, J) = \int \mathrm{d}^4x[L(\varphi) + J(x)\varphi(x)].$$

由 n 点格林函数

$$\begin{aligned} G^{(n)}(1,2,\cdots,n) &= \frac{1}{(i)^n}\frac{\delta}{\delta J_1}\cdots\frac{\delta}{\delta J_n}Z(J)|_{J=0} \\ &= \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

可知

$$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4(x_n)J(x_1)\cdots J(x_n)G^n(x_1\cdots x_n). \tag{2.2.5}$$

令 $Z(J) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}w(J)}$, 则 $W(J)$ 就是连通格林函数 $G_c^{(n)}$ 的生成泛函, 即

$$G_c^{(n)} = (-\mathrm{i})^{n-1}\frac{\delta^n W(J)}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\Big|_{J=0}. \tag{2.2.6}$$

故有

$$\mathrm{i}W(J) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{d}^4x_nJ(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n)G_c^{(n)}(x_1\cdots x_n). \tag{2.2.7}$$

令

$$\bar{\varphi}(x,J)=\frac{\delta}{\delta J(x)}W(J), \tag{2.2.8}$$

可以证明

$$\Gamma(\bar{\varphi})=W(J)-\int \mathrm{d}^4xJ(x)\bar{\varphi}(x); \tag{2.2.9}$$

$$\bar{\varphi}(x,J)=\frac{\langle 0|\varphi|0\rangle^J}{\langle 0|0\rangle^J};$$

$$\frac{\delta\Gamma(\varphi)}{\delta\bar{\varphi}(x)}=-J(x). \tag{2.2.10}$$

由式 (2.2.10) 可知, $\Gamma(\varphi)$ 正是考虑到所有量子改正后的有效作用量.

我们定义有效势 V_{eff}:

当 $\bar{\varphi}=\mathrm{const}$ 时,

$$\Gamma(\bar{\varphi})=\int \mathrm{d}^4x[-V_{\mathrm{eff}}(\varphi)]. \tag{2.2.11}$$

已知 $\Gamma(\bar{\varphi})=\int \mathrm{d}^2xL_{\mathrm{eff}}$, 故当 $\bar{\varphi}=\mathrm{const}$ 时有

$$V_{\mathrm{eff}}=-\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}.$$

例如, 在 $\lambda\varphi^4$ 场论中,

$$L=\frac{1}{2}(\varphi^{,\mu}\varphi_{,\mu}+m^2\varphi^2)-\frac{1}{4}\lambda\varphi^4,$$

$$V_{\mathrm{eff}}=-\mathscr{L}_0-\mathscr{L}_1=-\frac{1}{2}m^2\bar{\varphi}^2+\frac{1}{4}\lambda\bar{\varphi}^4+V(\bar{\varphi}).$$

在 $SU(5)$ 大统一理论中, 希格斯场有 24 个分量, 拉氏量为

$$\mathscr{L}=(\bar{\Psi}_R)_a\mathrm{i}\gamma^\mu(D_\mu)'_{aa}(\Psi_R)'_a+(\bar{\Psi}_L)_{ab}\mathrm{i}\gamma^\mu(D_\mu)_{ab,a'b'}\times(\Psi_L)_{a'b'}, \tag{2.2.12}$$

式中

$$\Psi_R=\begin{bmatrix} d_1\\ d_2\\ d_3\\ \mathrm{e}^c\\ -\nu_e^c\end{bmatrix}_R,\quad \text{上标 } c \text{ 表示电荷共轭,}$$

$$\Psi_L=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1\\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2\\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3\\ -u_1 & u_2 & -u_3 & 0 & \mathrm{e}^c\\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -\mathrm{e}^c & 0\end{bmatrix}_L$$

分别是 $SU(5)$ 的 [5] 维和 [10] 维表示, 一个代 (generation) 中的 15 个夸克和轻子就可以填充在上述表示中. 式 (2.2.12) 中的 D_μ 为

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}gA_{\mu,k}T_k \quad (k = 1, 2, \cdots, 24),$$

T_k 即 24 个生成元, 在拉氏量的第一项中采用五维表示 $(T_k)_{ab}$, 在第二项中采用十维表示 $(T_k)_{ab,a'b'}$. $A_{\mu,k}$ 即 24 个规范场, 其中有 12 个 $A_\mu, W, Z^\circ, g^i (i = 1, 2, \cdots, 8)$; 12 个 $x_a(4/3), \bar{x}_a(4/3), Y_a(1/3), \bar{Y}_a(1/3) (a = 1, 2, 3)$ 是色指标. g 为大统一耦合常数 $g = \sqrt{4\pi/45}$. c 表示电荷共轭态.

按照科尔曼–温伯格 (Coleman Weinberg, C-W) 模式, 引入把 $SU(5)$ 破缺到 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 的希格斯场

$$V_{\text{class}} = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4, \tag{2.2.13}$$

则有效势可写为

$$V_{\text{eff}} = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + B\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2} - \frac{25}{6}\right).$$

由 $\left.\dfrac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=\sigma} = 0$ 确定 $\lambda = 88B$, 代入上式得

$$V_{\text{eff}} = B\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{\sigma} - \frac{1}{2}\right). \tag{2.2.14}$$

式 (2.2.14) 就是采用 C-W 势时, 平直时空零温 $SU(5)$ 大统一理论的单圈有效势. 当 $\bar{\varphi}\beta \ll 1$ 时 $(\beta = 1/kT)$, 有限温度下 $SU(5)$ 的单圈有效势可写为 (C-W)

$$V_{\text{eff}}^{(1)\beta}(\bar{\varphi}) = B\bar{\varphi}^4\left(\ln\frac{\bar{\varphi}^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{75}{16\beta^2}g^2\bar{\varphi}^2 - \frac{\pi^2}{15\beta^4}. \tag{2.2.15}$$

一般可忽略 β^{-4} 项而仅保留 β^{-2} 项, 这相当于在温度改正项中出现一个依赖于温度的改正项

$$\frac{75}{16\beta^2}g^2\bar{\varphi}^2 = \frac{75}{16}k^2T^2g^2\bar{\varphi}^2.$$

这一项的作用是把零温单圈有效势中 $\bar{\varphi} = 0$ 处的极大变为极小. 当 $T > T_c$ 时, 这是一个整体极小 (真真空); 当 $T \ll T_c$ 时, 它仍为局部极小, 成为一个亚稳态 (假真空).

2.3 由假真空向真真空的跃迁

由 2.2 节的讨论可知, 当温度 $T > T_c$ 时, 有效势有一个整体极小, 即对应于一个对称的和稳定的基态或真空. 当温度 T 降至 $T \approx T_c$ 时, 上述真空仍然存在, 但不

再稳定, 称为假真空. 这时, 处于 "过冷" 状态的宇宙以指数形式膨胀, 即暴胀. 但是由于量子涨落 (或量子隧道效应、热涨落效应), 宇宙将由假真空向真真空跃迁, 此后即发生一级相变. 我们将计算单位时间的跃迁几率 Γ.

一个不稳定的波幅可表示为

$$\begin{aligned} &\Psi(t) = \Psi(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}, \\ &E = \alpha + \mathrm{i}\beta; \\ &|\Psi(t)|^2 = |\Psi(0)|^2\mathrm{e}^{-\Gamma t}, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

衰变几率为

$$\Gamma = \frac{2}{\hbar}|\mathrm{Im}E|, \tag{2.3.2}$$

即衰变几率由假真空能量的虚部给出. 设初态为 $|\varphi_1\rangle$, 末态为 $|\varphi_2\rangle$, 则有

$$\begin{aligned} &\langle\varphi_2|\mathrm{e}^{-HT/\hbar}|\psi_1\rangle \\ =&\sum_{n,m}\langle\varphi_2|n\rangle\langle n|\mathrm{e}^{-HT/\hbar}|m\rangle\langle m|\varphi_1\rangle \\ =&\sum_{n}\mathrm{e}^{-E_nT/2}\langle\varphi_2|n\rangle\langle n|\varphi_1\rangle. \end{aligned}$$

令此时的 $|\varphi_1\rangle = |0\rangle$, 表示假真空, 则有

$$E_0 = -\hbar\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\langle 0|\mathrm{e}^{-HT/\hbar}|0\rangle, \tag{2.3.3}$$

此即假真空的能量.

由路径积分表述,

$$\begin{aligned} \langle\varphi_2|\mathrm{e}^{-HT/\hbar}|\varphi_1\rangle &= N\int D(\varphi)\exp[-S_E(\varphi)/\hbar] \\ &= \exp(-S_{E\mathrm{eff}}/\hbar) = \exp(-S_{E\mathrm{class}}/\hbar)\cdot\exp(-S_{E\mathrm{one-loop}}). \end{aligned}$$

对于欧氏时空标量场的运动方程

$$\varphi^{;\mu}_{;\mu} = V'(\bar{\varphi}). \tag{2.3.4}$$

可以证明

$$\exp(-S_{E\mathrm{one-loop}}/\hbar) = \left(\prod_n\lambda_n\right)^{-1/2}, \tag{2.3.5}$$

从而有

$$\langle\varphi_2|\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle$$

$$= \exp[-S_E(\varphi)/\hbar]\left[\prod_n \lambda_n\right]^{-1/2}, \tag{2.3.6}$$

式中 λ_n 为本征值

$$A\varphi_n = -\partial_\mu\partial_\mu\varphi_n + U''(\varphi_n) = \lambda_n\varphi_n.$$

在 A 的自身表象中有

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix},$$

所以

$$\left(\prod_n \lambda_n\right)^{-1/2} = (\det A)^{-1/2} = [\det(-\partial_\mu\partial_\mu + U'')]^{-1/2}. \tag{2.3.7}$$

实际上, 若设 $\bar{\varphi}$ 为方程 (2.3.4) 的解 (瞬子解), 则可在此解附近把 $S_E(\varphi)$ 展开

$$\begin{aligned} S_E(\varphi) =& S_E(\bar{\varphi}) + \int \mathrm{d}^4x \frac{\delta S_E(\bar{\varphi})}{\delta\bar{\varphi}(x)}[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)] \\ &+ \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \frac{\delta^2 S_E(\bar{\varphi})}{\delta\bar{\varphi}(x)\delta\bar{\varphi}(y)}[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)] \\ &\cdot [\varphi(y) - \bar{\varphi}(y)] + \cdots. \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\delta S_E}{\delta\varphi} = -\Box\varphi + U' = 0,$$

$$\frac{\delta^2 S_E}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = [-\delta(x-y)\partial_\mu\partial_\mu - \bar{\varphi}(x)(-\partial_\mu\partial_\mu + U'')],$$

得到

$$\begin{aligned} S_E(\varphi) =& S_E(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)](-\partial_\mu\partial_\mu + U'') \\ &\cdot [\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)] + \cdots. \end{aligned}$$

再采用式

$$\int D(\varphi)\exp\left(-\frac{1}{2}\varphi^{+}A\varphi\right)=(\det A)^{-1/2},$$

便得到

$$\begin{aligned}&N\int D(\varphi)\exp[-S_{\text{Eclass}}/\hbar]\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x(\varphi-\bar{\varphi})A(\varphi-\bar{\varphi})\right]\\=&N\exp[-S_{\text{Eclass}}/\hbar]\int D(\varphi)\\&\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x(\varphi-\bar{\varphi})A(\varphi-\bar{\varphi})\right]\\=&N(\det A)^{-1/2}\exp(-S_{\text{Eclass}}/\hbar).\end{aligned}$$

将式 (2.3.7) 代入式 (2.3.6) 得到

$$\langle\varphi_2|\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle=K\exp(-B/\hbar),\tag{2.3.8}$$

式中 $K=N\{\det[-\partial_\mu\partial_\mu+U''(\varphi)]\}^{-1/2}, B=S_E(\varphi)$ 叫衰变系数.

当 $T\to\infty$ 时, 可以证明

$$N\{\det[-\partial_\mu\partial_\mu+U''(\varphi)]\}^{-1/2}=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\omega T/2},\tag{2.3.9}$$

式中 $\omega^2=U''(\varphi)$. 由此可得

$$\langle\varphi_2|\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\omega T/2}\mathrm{e}^{-B/\hbar}.\tag{2.3.10}$$

设在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 和体积 V 内存在 n 个瞬子, 每个瞬子的时空体元都不重叠, 这样便可作稀疏气体近似. 注意到每一个瞬子解的贡献由式 (2.3.10) 给出, 可以证明, 当 $T\to\infty, V\to\infty, n\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}&\langle\varphi_2|\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle\\=&\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\exp(-\omega TV/2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(TV)^n}{n!}\exp(-nB/\hbar)K^n.\end{aligned}\tag{2.3.11}$$

又由式 (2.3.3) 得到 (当 $T\to\infty$)

$$\begin{aligned}E_0&=-\frac{\hbar}{T}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\omega}{\pi\hbar}-VT\left(\frac{\omega}{2}-K\mathrm{e}^{-B/\hbar}\right)\right]\\&=V\left(\frac{\hbar\omega}{2}-\hbar K\mathrm{e}^{-B/\hbar}\right).\end{aligned}$$

再采用式

$$\mathrm{Im}K = \frac{1}{2}\left\{\frac{\det[-\partial\mu\partial_\mu + U''(\varphi_+)]}{\det^\circ[-\partial_\mu\partial_\mu + U''(\varphi)]}\right\}^{1/2}, \tag{2.3.12}$$

式中 $\det^\circ$ 表示去掉零本征值后的行列式, φ_+ 表示假真空, φ 表示经典瞬子解, U 是有效势, 最后得到单位体积、单位时间的衰变几率.

$$\frac{\Gamma}{V} = \mathrm{e}^{-B/\hbar}\left\{\frac{\det[\partial_\mu\partial_\mu + U''(\varphi^+)]}{\det^\circ[\partial_\mu\partial_\mu + U''(\varphi)]}\right\}^{1/2}. \tag{2.3.13}$$

下面讨论量子隧道效应后 φ 场的演化.

若欧氏时空中的瞬子方程 (经典运动方程)

$$\partial_\mu\partial_\mu\varphi = U'(\varphi) \tag{2.3.14}$$

存在一个 $O(4)$ 不变解, 则此解的作用量 S_E 要小于非 $O(4)$ 不变解的作用量. 类似地, 若闵氏时空中的运动方程

$$\partial_\mu\partial_\mu\varphi = -U'(\varphi) \tag{2.3.15}$$

存在一个 $O(3,1)$ 不变解, 则此解的作用量要小于非 $O(3,1)$ 不变解的作用量. 与式 (2.3.14) 对应的解称为瞬子解 (或反弹解), 与式 (2.3.15) 对应的解称为泡解. 我们只需考虑 $O(4)$ 不变瞬子解和 $O(3,1)$ 不变泡解.

四维欧氏空间度规可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\xi^2 + \rho^2(\xi)\mathrm{d}\Omega_3^2,\\ \mathrm{d}\Omega_3^2 &= \mathrm{d}x^2 + f^2(x)\mathrm{d}\Omega_2^2,\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

式中 $\rho^2(\xi) = t^2 - r^2$ 表示四维空间间隔. 采用 $O(4)$ 不变瞬子拉氏量, 有

$$\begin{aligned}S_E &= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g_E}[g_E^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi + U(\varphi) + (2k)^{-1}R]\\ &= 2\pi^2\int\mathrm{d}\xi\left[\rho^3\left(\frac{1}{2}\varphi'^2 + U\right) + \frac{3}{k}(\rho^2\rho'' + \rho\rho'^2 - \rho)\right],\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

由此得瞬子方程

$$\varphi'' + \frac{3}{\rho}\rho'\varphi' = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varphi}, \quad \varphi' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}. \tag{2.3.18}$$

欧氏引力场方程具有形式

$$\rho'^2 - 1 = \frac{1}{3}k\rho^2\left(\frac{1}{2}\varphi'^2 - U\right).$$

设我们处在真真空泡中, 真空能密度 (宇宙因子项) 为零, 则有

$$U(\varphi_-) = 0, \quad U(\varphi_+) = \varepsilon,$$

式中 φ_- 为真真空泡, φ_+ 为假真空背景. 当真真空泡形成时, 设有 $\bar{\rho} \gg \varepsilon$(薄壁近似), 则由瞬子方程可以得到

$$B = -\frac{1}{2}\pi^2\bar{\rho}^4\varepsilon + 2\pi^2\bar{\rho}s_1.$$

衰变系数 B 取极值时泡形式由 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\bar{\rho}} = 0$ 得到, 泡的半径

$$\bar{\rho} = \frac{12s_1}{4\varepsilon + 3ks_1^2} = \frac{\bar{\rho}_0}{1 + (\bar{\rho}_0/2\lambda)^2} \approx \varepsilon^{-12}\sigma,$$
$$B = \frac{B_0}{[1 + (\bar{\rho}_0/2\lambda)^2]^2},$$

式中 B_0 是无引力时的衰变系数, $\bar{\rho}_0 = 3s_1/\varepsilon$ 是无引力时泡的半径,

$$s_1 = \int_{\varphi_+}^{\varphi_-} \mathrm{d}\varphi\{2[U_0(\varphi) - U_0(\varphi_+)]\}^{1/2} \approx \sigma(U_{0\,\max})^{1/2},$$
$$U_0(\varphi_-) = U_0(\varphi_+),$$
$$U(\varphi) = U_0(\varphi) - \frac{\varepsilon}{\sigma}(\varphi - \sigma),$$
$$\lambda = \left(\frac{k\varepsilon}{3}\right)^{-1/2}, \quad k = 8\pi G.$$

$\rho = 0$ 在欧氏空间中对应于 $\varphi = \varphi^*$, 即表示真空泡的边界 (泡壁), 在闵氏空间中 $\rho = 0$ 对应于 $t \pm r = 0$, 即表示泡壁沿光锥运动. 在所讨论的情况下, 引力的出现使真空泡出现的概率增大, 使泡半径减小.

以上的讨论是半经典的. 结果表明, 真真空泡由隧道效应产生, 并以光速膨胀. 要引入量子修正, 只需在式 (2.3.18) 中将经典势 U 换成有效势 V_{eff}, 产生的效应是使振幅衰减得快一些.

2.4 林德 (Linde) 等的工作

古什 (1981) 认为宇宙由假真空向真真空的过渡只能通过量子隧道效应. 为了解决磁单极问题、平直性问题和视界问题, 就要求泡的产生率较低, 以使在泡与泡发生碰撞之前, 泡就已经足够大. 但是泡的产生率如果这样低, 就会导致一个不合理的结果 —— 使得热化过程延迟到重子和核合成时期. 古什还认为, 宇宙尺度按

指数增长只出现在泡形成之前. 真真空泡形成之后, 泡壁以光速膨胀, 真空能转化为泡壁的动能. 泡与泡之间的碰撞是热化的唯一机制. 这一观点也遇到了困难, 因为宇宙在假真空阶段按指数增长而真真空泡不按指数增长, 这样必然存在小于可观测宇宙的泡. 在可观测宇宙内泡的碰撞将破坏宇宙物质分布的均匀性, 而且会使 'tHooft 磁单极大量出现, 与观测结果不符.

林德 1982 年对古什的模型做了修改, 他认为在泡出现之后的一段时间 $\tau \approx T_b^{-1}$ 内, 宇宙仍按指数规律膨胀. 下面我们介绍林德的工作.

按照林德理论的要求, 需要一个与希格斯势形状不同的有效势. C-W 势基本上符合这一要求, 有效势曲线如图 2-1 所示.

令 $\dfrac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}\varphi}=0$, 得到

$$\begin{aligned}&\varphi=0;\\&\frac{\varphi^2}{\sigma^2}\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2}=-\frac{C}{2B}\frac{T^2}{\sigma^2}\approx\frac{T^2}{T_c^2}\approx 0\quad(\text{当 }T\ll T_c).\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

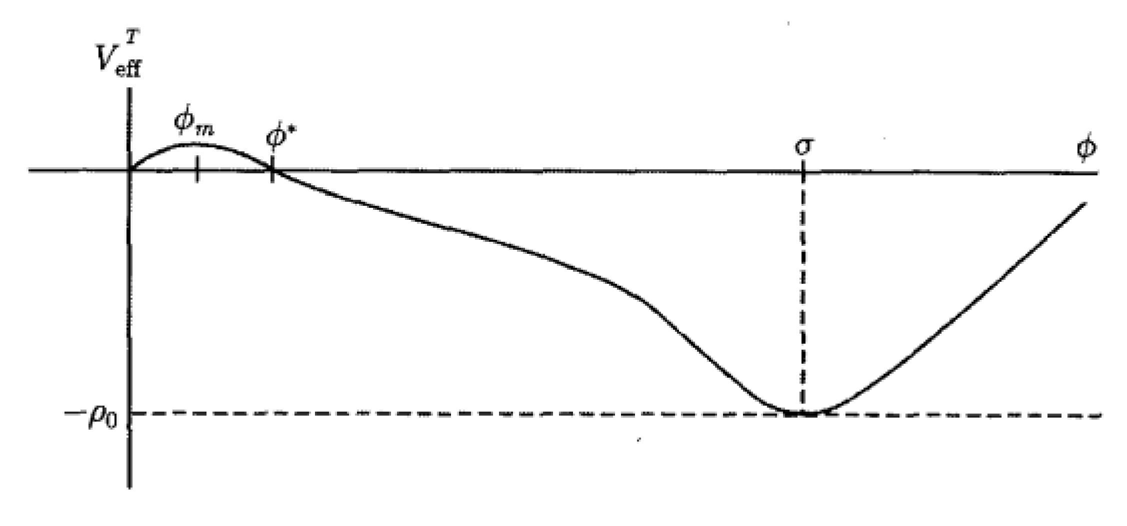


图 2-1

式 (2.4.1) 有两个解, 第一个解对应于 $\varphi\approx\sigma$, 代表真真空; 第二个解对应于势垒的最高点处 $\varphi=\varphi_m$. 我们采用 $SU(5)$ 大统一理论中的 g,B,C 值. 在所有情况下 $T_B\ll\sigma$, 再考虑到

$$\left|\ln\frac{\varphi^2 m}{\sigma^2}\right|\gg 1,\tag{2.4.2}$$

$$\frac{\varphi_m}{\sigma}<\frac{T_b}{\sigma},\tag{2.4.3}$$

我们得到

$$V_{\text{eff}}^{T_b}(\varphi_m)/\rho_0=2\frac{\varphi_m^4}{\sigma^4}\cdot\left(\ln\frac{\varphi_m^2}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2C}{B}\frac{\varphi_m^2T_b^2}{\sigma^4}<\frac{\varphi_m^2}{\sigma^2}<\frac{\varphi_m}{\sigma}.$$

由于有效势比 ρ_0 小几个数量级, 所以有效势在 $\varphi\ll\sigma$ 时是很平坦的. 在期间 $\varphi_m<\varphi<\sigma$, 标量场 φ 要经历一段足够长的滚动相 $\left(\tau\sim\dfrac{1}{T_b}\right)$.

如图 2-1 所示, 当 $\varphi = \varphi^* \ll \sigma$ 时, 泡形成. 此后, 在任一固定空间点, 如果忽略引力作用, 则可采用闵氏时空的经典运动方程 (2.3.15). 假设在一个泡内 φ 是空间均匀的, 此时有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi - \varphi_m) &= -V'_{\text{eff}}(\varphi - \varphi_m) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}V_{\text{eff}}\Big|_{\varphi_m}(\varphi - \varphi_m).\end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}V_{\text{eff}}^T = 4B\varphi\sigma^2\left(\frac{\varphi^2}{\sigma^2}\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2} + \frac{C}{2B}\frac{T^2}{\sigma^2}\right), \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi^2}V_{\text{eff}}^T = 2\left(6B\varphi^2\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2} + 4B\varphi^2CT^2\right)\Big|_{\varphi_m} < 0, \\ &-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}V_{\text{eff}}^T\Big|_{\varphi_m}(\varphi - \varphi_m) \approx 3CT_b^2(\varphi - \varphi_m),\end{aligned}$$

积分, 得

$$\varphi(t) \approx \varphi^* \mathrm{e}^{\sqrt{c}T_b(t-t_b)}. \tag{2.4.4}$$

即遂道效应后, 泡在平坦区的演化方程 (忽略重力)—— 泡仍按指数规律膨胀. 只要泡形成时的大小为 10^{-20}cm, 经过时间 $\tau \geqslant 10^2\mathrm{H}^{-1}$, 泡的大小便可增至 $R(\tau) \geqslant 10^{28}$cm, 即大于现在可观测宇宙的半径 10^{28}cm; 整个宇宙处于一个泡内. 此后, 场绕着真真空做阻尼振荡, 真空能量耗散, 指数膨胀停止, 宇宙按标准模型演化. 希格斯场在 $\varphi = \sigma$ 附近的阻尼振荡相当于粒子的产生. 真空能量在相变时作为潜能释放出来, 使宇宙重新加热至 $T \approx T_c$. 这里, 热化的机制不再解释为泡壁的碰撞, 而解释为 (Hawking, 1982) 阻尼振荡中产生的粒子之间的相互作用.

Hawking(1984) 考虑到引力和希格斯场的耦合, 采用了更普遍的有效势

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}(\varphi) =& \frac{1}{2}(m^2 + \xi R + CT^2)\varphi^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\varphi^4 \\ &\cdot\left(\ln\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2} - \frac{1}{2} + \frac{m^2}{\alpha^2\varphi_0^2}\right) + \frac{1}{8}\alpha^2\varphi_0^4 - \frac{1}{4}m^2\varphi_0^2,\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

式中 φ_0 是平直空间零温下 $V_{\text{eff}}(\varphi_0) = 0$ 的期望值, m^2 和 ξ 是重整化参量, $\alpha = 5g^2/8\pi, \alpha^2/4 \approx B$. 这一有效势比平直时空有限温度下的 C-W 势多了几项, 包括含 m 的项和 φ 场与曲率的耦合项.

由于 de Sitter 时空中 $R = 12H^2$, 故知 $\xi R = 48\pi^2\xi k^2 H_{\mathrm{H}}^2$ 代表霍金温度 T_{H} 对有效势的贡献. 当温度降至 $T \approx T_{\mathrm{H}}$ 时, 质量项已可忽略, 有效势退化为 C-W 势. 此时势垒很低, 量子涨落或热涨落就足以使 φ 场从对称真空过渡到不对称真空.

引力和希格斯耦合场方程存在一个唯一的均匀解

$$ds^2 = dt^2 - H_1^{-2}\cos h^2(H_1 t)(dx_2^2 + \sin^2 x d\Omega^2),$$

$$\varphi = \varphi_1 \approx \frac{m}{\alpha}\left[\ln\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{m^2}\right)\right]^{-1/2} \ll \sigma, \quad H_1^2 = \frac{8\pi}{3}\frac{V_{\text{eff}}(\varphi_1)}{m_p^2},$$

式中 φ_1 对应于 V 的局部极大值.

如果令

$$B = \frac{3}{8}T_p^2[V_{\text{eff}}^{-1}(0) - V_{\text{eff}}^{-1}(\varphi_1)] \approx \frac{1}{\alpha^2}(m^2 H^{-2})^2\left[\ln\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{m^2}\right)\right]^{-1},$$

则上述均匀解可解释为宇宙以几率

$$\Gamma \approx (m^2 + \xi R)^2 \exp(-B/\hbar)$$

跃迁至 $\varphi = \varphi_1$ 处, 再沿势垒滚下, 一直到达 $\varphi = \sigma$ 处, 滚动相以后的演化和泡解相同.

在前面讨论的暴胀宇宙论中, 实际上假定了初始的标量场只取一个特定值 ($\varphi = 0$). 1983 年, Linde 提出, 更自然地 φ 在初始时刻应该可以取一系列值, 即在一定条件下取任何值, 考虑到量纲的要求, 对极早期 φ 的取值有一定限制, 如哈密顿量中动能项和势能项均不能大于普朗克质量M_p 的四次方 M_p^4. 以 φ^4 场为例, 即要求 $\partial_\mu(\varphi)^2 \leqslant M_p^4, \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \leqslant M_p^4$. 这样, 在空间不同区域 φ 可以取 $\pm M_p/\lambda^{1/4}$ 之间的任一值.

φ 场运动方程

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -\lambda\varphi^3, \quad H = \left(\frac{2}{3}\pi\lambda\right)^{1/2}\varphi^2/M_p$$

的通解为

$$\varphi = \varphi_0 \exp\{-[\lambda^{1/2}M_p/(6\pi)^{1/2}]t\}.$$

由此可以看出, 场 φ 需要时间

$$\Delta t \sim \frac{\sqrt{6}\pi}{\sqrt{\lambda}M_p}$$

才能有足够的衰减. 因此, 当 $\lambda \ll 1$, 在 $\Delta t > t_p \sim \dfrac{1}{M_p}$ 时间内宇宙按指数规律膨胀. 膨胀后宇宙半径为

$$R(\Delta t) \sim R_0 e^{H\Delta t} \sim R_0 \exp(2\pi\varphi_0^2/M_p^2).$$

要使膨胀后的宇宙大于可观测宇宙, 就要求 $\exp(H\Delta t) \geqslant \exp(65)$; 于是按上式和量纲限制条件应有

$$\varphi_0 \geqslant 3M_p, \quad \lambda \leqslant 10^{-2}.$$

这表明, φ 场在宇宙的不同空间区域具有混沌的初始值 φ_0, 任一满足 $\varphi_0 \geqslant 3M_p$ 的空间区域 (空间畴) 都将作指数膨胀, 经 Δt 后形成一个比可观测宇宙大的微宇宙泡. 我们生活的宇宙就是其中某一个微宇宙泡演化来的, 这个模型称为混沌暴胀模型.

混沌暴胀模型的另一个特点是它不要求宇宙早期的高温修正. 一般说来, 对有效势的高温修正实际上是给 φ 增加了一有效质量项

$$\Delta m^2(T) = CT^2,$$

式中 C 是一个常系数. 这一项的作用是使原来的 φ 场 (自发破缺的) 由负质量变为正质量, 从而导致对称性恢复. 我们考虑 $C \sim 1$ 的情况, 这时高温修正的影响需要一个弛豫时间

$$\tau \sim \frac{1}{\Delta m^2(T)} \approx \frac{1}{T}.$$

考虑到宇宙极早期物质以相对论粒子为主, 能量密度主要是它们的贡献, 以及一般典型大统一模型 $N \sim 200$, 则可算得宇宙时

$$t \sim \frac{1}{50}\frac{M_p}{T^2}.$$

高温修正效应在 t 时刻起作用的必要条件是

$$t \geqslant \tau, \quad \text{或 } T \leqslant \frac{M_p}{50}.$$

此式表明, 空间畴的指数膨胀要比温度降至 $\frac{M_p}{50}$ 来得早. 这样, 因空间畴的指数膨胀将导致畴内温度指数下降. 所以高温修正效应始终不存在, 即使 $t > \tau$, 指数形式的急剧下降也将超过高温修正的影响. 于是得到结论, 在每个畴暴胀前, 不会发生高温相变.

这一模型认为, 每个畴暴胀后都可形成一个微宇宙, 只需要要求局部微宇宙满足均匀和各向同性条件, 不需要要求这一条件是整体的. 按此模型, 我们现在的可观测宇宙仅是这些微宇宙中的某一个. 也就是说, 我们的宇宙是由极早期宇宙中某一微小的空间畴暴胀起来形成的.

混沌暴胀模型仍存在一个困难, 就是得不到能量密度涨落的合理量级 $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-4}$.

2.5 量子涨落和密度扰动的演化

1978 年, Bunch 和 Davies 求得了宇宙暴胀过程中的真空平均值

$$\langle\varphi^2\rangle = \frac{3H^4}{8\pi^2 m^2}. \tag{2.5.1}$$

由此式可见 $m^2 \to 0$ 时 $\langle\varphi^2\rangle \to \infty$, 这是由于宇宙作指数膨胀, 当 $m^2 \to 0, \langle\varphi^2\rangle$ 与在 de Sitter 空间中反常大波长密度涨落有关. 在涨落量 $|K| \ll H$ 时, Vilenkin 等导出了对 $\langle\varphi^2\rangle$ 的主要贡献

$$\langle\varphi^2\rangle \approx \frac{H^{2-4m^2/3H^2}}{2\pi}\int_0^H \frac{k^2\mathrm{d}k}{[\Delta m^2(T)+k^2]^{3/2-2m^2/3H^2}}, \tag{2.5.2}$$

式中 $\Delta m^2(T)$ 是温度效应对质量的贡献, $\Delta m^2(T) \sim o(g^2T^2)$. 当 $T \to 0$ 时, 式 (2.5.2) 可写为

$$\langle\varphi^2\rangle = \frac{H^{2-4m^2/3H^2}}{2\pi}\int_0^H \frac{k^2\mathrm{d}k}{k^{3-4m^2/3H^2}} = \frac{3H^4}{8\pi^2m^2},$$

恰为式 (2.5.1). 当 $T \gg H$ 时, 上述反常贡献消失, 此时有

$$\langle\varphi^2\rangle = \frac{T^2}{12},$$

这正是 Minkowski 空间的结果. 当 $0 < T < H$ 时, 由于宇宙暴胀, $\Delta m^2(T)$ 按指数规律减小, 此时式 (2.5.2) 可写成

$$\langle\varphi^2\rangle = \frac{3H^4}{8\pi^2m^2}\left\{1-\exp\left[-\frac{2m^2}{3H}(t-t_0)\right]\right\}, \tag{2.5.3}$$

式中 t_0 是与 $m^2(T) = 2H^2$ 对应的时刻. 当 $t - t_0 \ll 3H/2m^2$ 时, 式 (2.5.3) 成为

$$\langle\varphi^2\rangle \sim \frac{H^2}{4\pi^2}(t-t_0), \tag{2.5.4}$$

即场的涨落与时间成线性关系, 当 $t - t_0 \geqslant 3H/2m^2$ 时, 有

$$\langle\varphi^2\rangle \sim \frac{3H^4}{8\pi^2m^2}\exp\left[\frac{2|m|^2}{3H}(t-t_0)\right],$$

此时 $\langle\varphi^2\rangle$ 按指数规律增长.

考虑到场的量子涨落, 暴胀过程就不是严格均匀的, 这将对暴胀后的能量密度扰动产生影响, 从而有可能解释物质和星系的起源问题. 场初始分布的不均匀会使

宇宙暴胀过程中场的不同区域的势达到最小值需要不同的时间, 但最后将升至相同的重加热温度. 这不同的时间正表现出暴胀后的密度扰动. 古什曾计算出这一扰动

$$\frac{\delta\rho(k)}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\frac{H^2}{\dot{\varphi}}\left[1+\frac{3}{2}\ln(kH)\right]^2_{\varphi=\varphi_*},$$

式中 φ_* 是动量 $k_*=H$ 时的 $\sqrt{\langle\varphi^2\rangle}$ 值, 而 k_* 与具体势有关. 当选取 C-W 势时, 得到

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\sim 50, \tag{2.5.5}$$

这和观测到的微波背景辐射不符合. 霍金等采用将空间分成不均匀的和均匀的两部分, 并引入与空间位置有关的时间延缓因子, 得到暴胀结束时有

$$\frac{\delta H}{H}\sim\frac{1}{3\pi}\left(\frac{g^2}{4\pi}\right). \tag{2.5.6}$$

注意到 $T\sim H$, 得到

$$\frac{\delta T}{T}\sim\frac{1}{3\pi}\frac{g^2}{4\pi};$$

又由 $\rho\sim T^4$, 得到

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\sim\frac{4\delta T}{T}\sim\frac{g^2}{4\pi}\sim 10^{-2}. \tag{2.5.7}$$

这一结果虽然比古什的结果小了三个量级, 但仍比观测到的微波背景辐射密度涨落 $\dfrac{\delta\rho}{\rho}\sim 10^{-5}$ 要大. 下面将看到, 超对称宇宙早期理论的预言与观测结果相符合.

1986 年, Ruiz-Altaba 等提出了 $N=1$ 的超对称宇宙早期模型, 其标势为

$$V=\mathrm{e}^{|\phi|2}\left(\left|\frac{\partial P}{\partial\phi}+\phi P\right|^2-3P\right), \tag{2.5.8}$$

式中 P 就是超对称的超势.

如果真空处于本征超场 ϕ_0, 则为了使相应的宇宙常数为零, 必有 $V(\phi_0)=0$. 若该点超对称不破缺, 则有

$$\left|\frac{\partial P}{\partial\phi}+\phi R\right|_{\phi=\phi_0}=0. \tag{2.5.9}$$

令

$$P=\left(\frac{\Delta^2}{M}\right)(\phi-\phi_0)^2, \tag{2.5.10}$$

$$M=M_p/\sqrt{8\pi}\equiv 1,$$

Δ 是质量参数,

$$m_\phi \sim \Delta^2, \tag{2.5.11}$$

则式 (2.5.8) 可改写为

$$V = \Delta^4 \left[1 - 4\phi^3 + \frac{13}{2}\phi^4 - 8\phi^5 + \frac{23}{3}\phi^6 + o(\phi^7)\right]. \tag{2.5.12}$$

宇宙从 $\phi \lesssim H_0, \dot{\phi} \approx 0$ 开始暴胀, 由于势为主暴胀场 ϕ, 且满足经典运动方程

$$\begin{aligned}
&\ddot{\phi} + 3\dot{H}\phi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = 0, \\
&H^2 = \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right]; \\
&\Delta V_{\mathrm{H}} \approx -\Delta^8\phi \text{ (霍金辐射项)}.
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

我们得到反 de Sitter 相的 Hubble 常数

$$H_0^2 = V(0) = \Delta^4. \tag{2.5.14}$$

暴胀场产生在 $\ddot{\phi} \ll 3H_\circ\dot{\phi}, \phi \sim H_0$, 直到时间 $t_{\mathrm{I}} \sim m_\phi^{-1}$. 然后暴胀场如物质一样演化, 直到再加热时间 $t_{\mathrm{R}} \sim \Gamma_\phi^{-1}$, 然后衰变为辐射为主和再热相. 考虑到式 (2.5.11) 有

$$\Gamma_\phi \sim \Delta^2 m_\phi \sim \Delta^4,$$

辐射能的增加满足式

$$\rho_\phi(t_{\mathrm{R}}) = \rho(t_{\mathrm{I}}) \left(\frac{t_{\mathrm{I}}}{t_{\mathrm{R}}}\right)^2 = \Delta^2 \left(\frac{\Gamma_\phi}{m_\phi}\right)^2 \approx \frac{\pi^2}{15} N T_{\mathrm{R}}, \tag{2.5.15}$$

式中 N 是光子有效自由度数. 由式 (2.5.15) 可以得到

$$T_{\mathrm{R}} \sim \Delta^3. \tag{2.5.16}$$

如果取 $\Delta \sim 10^{-4}$(以 M 为单位), 则再热温度 $\sim 10^6$GeV. 暴胀数 N_{I} 满足

$$R(t_{\mathrm{R}}) \sim \mathrm{e}^{N_{\mathrm{I}}} R(t_{\mathrm{I}}),$$

于是得到

$$N_{\mathrm{I}} = \int_{\phi_{\mathrm{I}}}^{\phi_{\mathrm{R}}} H_0 \mathrm{d}t. \tag{2.5.17}$$

由于 $\phi_{\mathrm{I}} \sim H_0, \phi_{\mathrm{R}} \sim 10^{-1}$, 所以

$$N_{\mathrm{I}} \sim 10^8. \tag{2.5.18}$$

另一方面, 暴胀的量子涨落的量级为 H_0, 因此在标度为 λ 时产生能量密度涨落. 按暴胀时能量密度涨落公式

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \frac{H_0^2}{\dot{\phi}(t_i)}\left[1+\frac{3}{2}\ln(\lambda H_0)\right]^2, \tag{2.5.19}$$

式中 H_0 是 $\phi = 0$ 时的哈勃常数, λ 是前面提到的能量密度涨落时的能量标度, 代入式 (2.5.13) 和式 (2.5.14), 得到

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^2 \varDelta^2 \sim 10^{-4}. \tag{2.5.20}$$

式 (2.5.18) 和式 (2.5.19) 均与观测结果相符, 这就克服了前面的以大统一和 C-W 势为基础的暴胀理论遗留下来的两个问题: ① 量子涨落导出的跃迁太快, 宇宙不足以膨胀到与观测一致的大小, 即标度因子达不到 e 指数上大于 65 的量级的增长. ② 暴胀时能量密度涨落太大, 按式 (2.5.19) 算得的值远大于观测值 10^{-4}.

因此, 超对称理论应用于暴胀宇宙, 成功地解释了再热机制、暴胀指数及能量密度涨落等关键问题. Ruiz 的这一理论的遗留问题是再热温度较低, 不足以产生足够的重子数不对称.

2.6 小 结

为了解决大爆炸宇宙模型 (即标准宇宙模型) 在宇宙极早期存在的几个疑难问题, 1981 年, 古什首先提出了一个关于宇宙极早期的暴胀宇宙模型, 它认为暴胀产生在 (超冷) 假真空对称相破缺之前. 这理论无法解释大量宇宙泡的产生所引起的不均匀性等问题. 1982 年, Linde 等提出了新的暴胀过程模型, 他们认为宇宙泡沿着势的平坦部分慢慢滚动下来, 即暴胀与对称破缺的相变同时发生, 由此解决了原暴胀模型存在的疑难问题. 1983 年, 人们抛弃了高温修正效应, 又提出一个混沌暴胀模型, 认为标量场在一定取值范围内, 在时空中都可形成宇宙泡, 每个宇宙泡都可以在暴胀后形成一个微宇宙, 每个微宇宙暴胀后都可超过我们可观测宇宙的线度; 我们就生活在这样的许多个宇宙中的一个里面. 1984 年以来, 人们又进一步引入了超对称理论, 把暴胀宇宙和 $N=1$ 的超引力物质相耦合, 使得标量场的势的形状更合理 —— 使所得推论更符合观测事实.

加上了暴胀模型的广义相对论宇宙学, 仍然无法解决宇宙的创生问题和星系的形成问题. 这些问题我们将在第四篇中讨论.

第 3 章　宇宙暴胀的机制

3.1　关于暴胀的自然退出

近年来, 人们对暴胀宇宙与超弦理论的融洽问题越来越感兴趣. 伸缩子相互作用将会抑制暴胀演化, 这个结论是基于一个标准的假设 —— 暴胀演化, 是由一个非零的势能密度所驱使. 由于伸缩子必定会跟某种能量密度所耦合, 伸缩子势也因此而产生了. 这个诱导势的表现是非常奇怪的, 使得伸缩子动能部分处于绝对的支配地位, 因而无法促使宇宙暴胀的发生. 有些人试图去克服这个困难, 为此他们假设暴胀过程是在伸缩子处于其最小值以后才发生的, 或者提出一些对伸缩子初始化条件的假定. 但是上述的两种假设并不完全令人满意.

弦宇宙方程的对偶对称性给出了一个完全不同的暴胀演化机制, 它包含了伸缩子和度规的相互影响, 而这个相互影响远胜于将势能视为暴胀的根源. 这个机制是基于这样一个事实, 即伸缩子 —— 引力宇宙学会出现一些相关的对偶对, 它们是在求解二次方程中因一个不确定符号而产生的, 我们可以用 (+) 和 (−) 来区分它们. 数学推导过程在下面给出. 相应的负 (−) 分支描述的是一个标准的 Friedman-Robertson-Walker (FRW) 减速膨胀的常伸缩子宇宙; 而正 (+) 分支则描述加速暴胀, 相应的哈勃参量是随时间增加而增大的, 甚至在没有伸缩子势的情况下也如此. 此外, 对偶性的宇宙学结果事实上是一个更大且连续的 $O(d,d)$ 群的一部分, 这个群同时还包括了反对称张量.

我们期望弄清弦宇宙是否允许暴胀相位一直延续到最后并且同 FRW 膨胀宇宙存在稳定的联系. 下面, 我们利用低能有效场理论来解决这个问题. 为此, 假设在我们的整个处理过程中, 弦单位下的相应曲率和微商非常小. 同样, 我们还假设量子关联不是很大, 使得我们工作在一个弱耦合弦理论的区域内. 这与弦理论标准视角是一致的, 使得弦尺度下的规范耦合常数与膨胀参量是相关的, 为了方便, 我们将它记为 $\mathrm{e}^{\phi}=g_{\text{string}}^2\sim g_{\text{gauge}}^2$. 伸缩子的现在值也有适度的扰动, 我们还应该假设它在过去的值从来没有现在的大. 正如我们下面所见到的, 这很好地符合了整个宇宙的演化过程.

在暴胀演化和一个 FRW 膨胀宇宙之间的跃迁过程通常会被认为是从暴胀中的“自然退出”. 在所有的暴胀模型中, 这是一个非常有名的问题. 从加速暴胀中的自然退出的可能性将会涉及那两个分支能否彼此平稳相连接. 在一些相关参量连续变化时, 对于不同拓扑结构的小曲率解是可以彼此稳定地联系起来的, 这在弦理

论中已经不再陌生. 在接下来的讨论中, 我们将选取宇宙时作为这个参量. 假设伸缩子起始于弱耦合区域, 而初始哈勃常数 H 也非常小. 这时, 它们都是按 (+) 分支的结果而演化. 宇宙将沿着更强耦合方向去暴胀, 而伸缩子也同样沿这个方向去演化. 这种演变不会受到伸缩子势以及物质和辐射源的影响. 在随后的时间里, 一个分支变换将出现. 这时, 伸缩子势以及物质和辐射源将变得重要起来, 宇宙也将像一个规则的 FRW 宇宙去演化以及二次加热, 同时伸缩子也将归宿到其势能的最小值.

我们发现如果伸缩子势为一些通常的确定值, 平滑的分支变换这时也将出现. 但是, 这时却很难找到一个能够完整描述从暴胀自然退出的结果. 对此可能的解释是强曲率效果在影响宇宙从加速暴胀中自然退出方面有着很重要的作用.

这里, 我们采用在 BD (Brans-Dicke) 弦框架下的解释, 因为它的物理含义更简洁.

在普朗克尺度下, 相关的超弦有效作用量可写为

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left\{\mathrm{e}^{-\phi}\left[R + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right] - V(\phi) + \cdots\right\}, \tag{3.1.1}$$

式中假设在临界维数的情况下 (中心电荷为 $c = 10$) 并且所有动力学都发生在通常的四维时空.

我们采用 Weinberg 使用的约定. 需要注意的是相对于一个 BD 的 ω 参量为 -1 时, 根据对偶性的要求伸缩子 (ϕ) 动能部分会有一个"特殊"的符号. 同时我们希望伸缩子势源是无扰动的, 且与超对称破缺相关, 并且能够从超势理论中用标准的方法得到. 当然, 作用量的其他项的系数里是应该有微扰和非扰动的修正部分, 但是它们都是很小的, 这是因为我们假设该理论在整个宇宙演化过程中都是处在弱耦合的状态. 式 (3.1.1) 中的省略号表示它包含了其他场.

通过作用量式 (3.1.1), 可得到其运动方程

$$\begin{aligned} &R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + g_{\mu\nu}\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}^\mu\phi - \mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}U(\phi) = 0, \\ &R + \mathrm{D}_\mu\phi\mathrm{D}^\mu\phi - 2\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\mu\phi - U(\phi) = 0, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

式中 $U(\phi) = \mathrm{e}^\phi V(\phi)$. 我们将只在空间曲率为零的各向同性的 FRW 度规下寻求上面方程的解 (对于更一般的情况, 我们将在后面讨论), 并且还考虑伸缩子仅仅与时间相关. 此时有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x^i, \\ \phi &= \phi(t). \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

哈勃常数 H 只跟标度因子 a 相关, 记为 $H \equiv \dot{a}/a$.

通过一些代数运算, 可以得到两个相互独立的关于伸缩子和 H 的一阶微分方程组. 由此, 可以得到伸缩子满足方程

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \pm H\sqrt{3H^2+U} - \frac{1}{2}U', \\ \dot{\phi} &= 3H \pm \sqrt{3H^2+U},\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

式中 $(\pm)$ 表示这两个方程既可以同时选择正号也可以同时选择负号, 这些方程将是我们讨论的出发点.

根据对 $(\pm)$ 符号的选择, 方程 (3.1.4) 的结果分别是属于两个分支的. 此外, 另一个双重的不确定就是 H 的符号. 为简单起见, 我们开始只讨论没有势的简单情况. 这 4 个结果可以通过标度因子的对偶性、时间反演或两者皆而有之联系起来. $(-)$ 表示的是一个规则、负反馈的分支. $\{H^{(-)}, \phi^{(-)}\}$ 的结果是关于时间的函数, 可简单给出来

$$\begin{aligned}H^{(-)} &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{t-t_0}, \\ \phi^{(-)} &= \phi_0 + (\pm\sqrt{3}-1)\ln(t-t_0), \quad t > t_0.\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

这个结果可以描述宇宙减速膨胀 $(H>0, \dot{H}<0)$ 或减速收缩 $(H<0, \dot{H}>0)$, 具体是膨胀还是收缩要看初始 H 的符号, 相对应的演化也分别朝向强耦合和弱耦合方向进行. 正如我们即将在后面给出的式 (3.1.12), 这个分支可以和通常的 FRW 辐射为主导的膨胀宇宙相连接. 如果令宇宙常数为零, 再存在合适的源, 伸缩子势将有一个最小值, 伸缩子最终将处在其真空期待值并且遵循标准宇宙模型.

$(+)$ 分支却有一些不寻常的值得注意的特性. 在没有任何势的情况下, $\{H, \phi\}$ 的结果满足

$$\begin{aligned}H^{(+)} &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{t-t_0}, \\ \phi^{(+)} &= \phi_0 + (\pm\sqrt{3}-1)\ln(t_0-t), \quad t < t_0.\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

这个结果既可以描述一个加速膨胀的, 从冷的、平直的、弱耦合的宇宙演化成一个热的、弯曲的、强耦合的宇宙, 也可以描述一个加速收缩的并朝弱耦合演化的宇宙. 这时的势对这个分支的影响是相当轻微的. 伸缩子通过最小势而得以放大. 在这个分支下, 伸缩子不可能处在其势的最小值. 由于伸缩子的动能项和 BD w 的值为 -1, 暴胀被驱动了, 不存在任何阻碍.

下面的表 3-1 给出两个分支的区别.

如果考虑到不为零的势以及物质的贡献, 上面的结果将变得非常的复杂. 由于等式 (3.1.4) 是一阶微分方程, 我们发现在相空间 $\{H, \phi\}$ 里可以更好地表述其结

表 3-1 在两个分支下与时间相关的函数结果的分类

	(+) 分支	(−) 分支
$H<0$	$\dot{H}<0,\dot{\phi}<0$	$\dot{H}>0,\ \dot{\phi}<0$
$H>0$	$\dot{H}>0,\ \dot{\phi}>0$	$\dot{H}<0,\ \dot{\phi}>0$

果的轨迹. 在图 3-1 中, 分别给出了 (+) 和 (−) 的轨迹, 竖直的 H 轴的单位刻度是任意的.

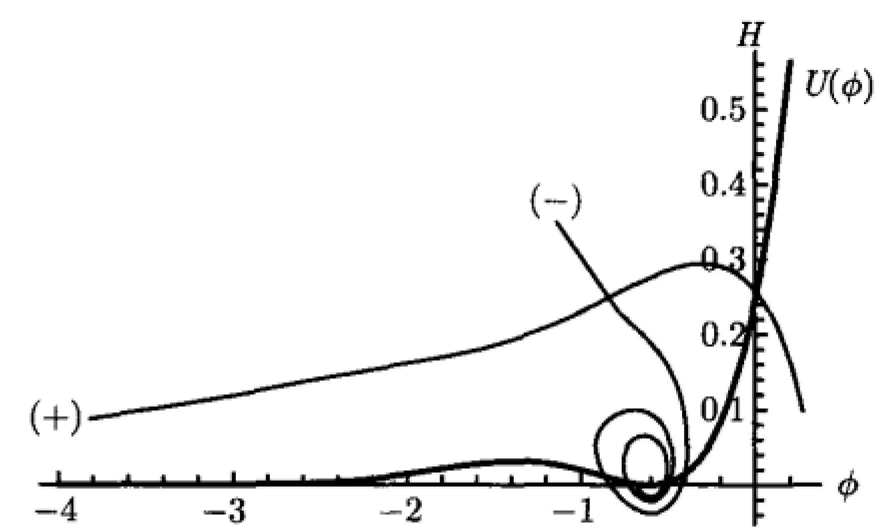


图 3-1 图中描述了势 $U(\phi)$, 以及 (+) 和 (−) 分支的轨迹,
其中 (−) 分支是处于势为最小值的情况下

从等式 (3.1.4) 中, 可以发现分支之间的变换只出现在势 $V(\phi)$ 为负的情况下. 这是因为允许分支之间连续变换的点需满足

$$3H^2+U(\phi)=0, \tag{3.1.7}$$

否则 $\dot{\phi}$ 将不连续. 类似地, H 的连续性隐含着表 3-1 中的 4 个结果, 只有具有相同符号的 H 才能够相互转换. 很明显, 上述情况说明了, 这些结果对是通过标度因子的对偶性和时间反演的乘积而相互联系的, 因为两个算符的联合操作会让 H 的符号改变.

由于 $H^2>0$, 我们必须在 $U(\phi)<0$ 的情况下, 考虑到等式 (3.1.7). 满足 $3H^2+U(\phi)=0$ 的轨迹在相空间里是一个曲线. 在一些有界间隔里有 $V(\phi)<0$ 的势, 其曲线聚集成的形状就如同一个蛋. 假设"蛋"是处在适度耦合区域, 在图 3-2 中, 给出了一个典型的伸缩子势和相应的"蛋". 在超引力理论中, 有这样的一个普遍的性质: 势的全局最小值是负的. 此外, 如果考虑到超弦理论中由场的非微扰效果所引起的一般势, 那么确实存在这样一个特性, 即"蛋"确实是存在的, 且这个蛋是完全处于弱耦合的区域.

可以证明, 一个负数势并不是一个能诱导分支变换的充分条件. 接下来, 我们讨论一个附加的条件从而确保分支变换能够实现. 在相空间中, 考虑到靠近蛋区域的某轨迹, 我们可以计算它在相空间的方向 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\phi}$, 并与相空间中蛋的方向 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\phi}_{|\mathrm{Egg}}$

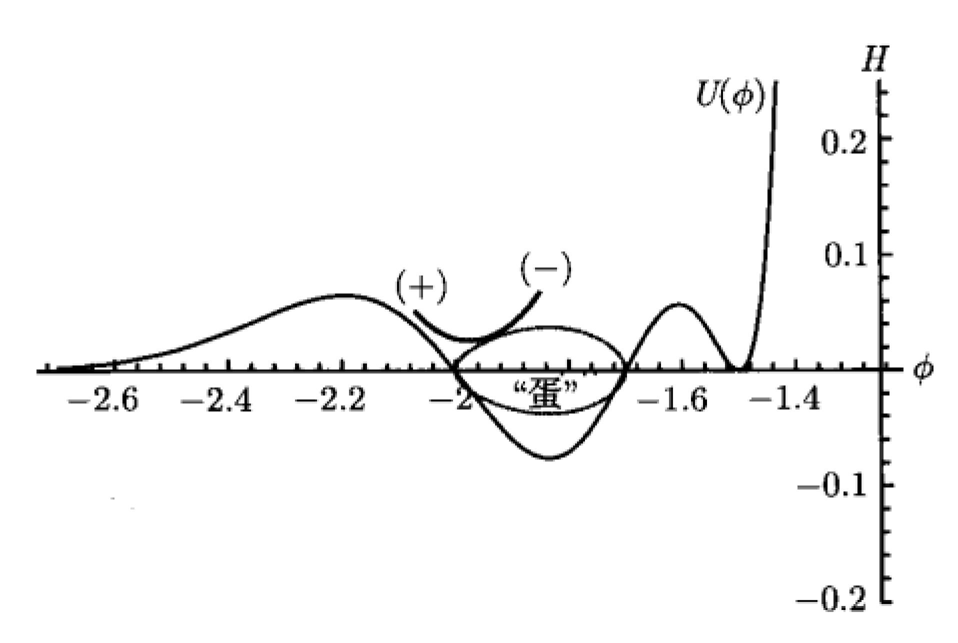


图 3-2　图中描绘了伸缩子势和相应的“蛋”, 负数势诱导了一个分支变换的发生

进行比较, 对于这两个分支有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\phi}-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\phi}_{|\mathrm{Egg}}=\pm\frac{1}{3}\epsilon\left(1-\frac{1}{2}\frac{U'}{U}\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2),\tag{3.1.8}$$

式中 U' 表示 U 对 ϕ 的微分, 而 $\epsilon=\sqrt{3H^2+U(\phi)}$ 表示对该轨迹到蛋的距离的度量. 需要注意的是 ϵ 总是大于零. 如果考虑到 (+) 分支并且 $H>0$, 正如图 3-2 所显示的, 该轨迹是处于蛋的上方. 如果 U' 是一个大的负数, 那么 $1-\dfrac{1}{2}\dfrac{U'}{U}$ 将是负的 ($U<0$), 该轨迹将趋向于“蛋”, 并与蛋相交, 而这以后就必然连续地进入到 (−) 分支. 如果 $1-\dfrac{1}{2}\dfrac{U'}{U}$ 是正的, 该轨迹会远离蛋, 这时正、负分支之间的变换是不会出现的. 现在考虑 (−) 分支且有 $H>0$ 的情况. 很容易知道该轨迹也是在蛋的上方. 如果 $1-\dfrac{1}{2}\dfrac{U'}{U}$ 是正的, 该轨迹会趋向于蛋, 与蛋相接触并连续地进入到 (+) 分支; 而 $1-\dfrac{1}{2}\dfrac{U'}{U}$ 为负时, 该轨迹会远离蛋, 负、正分支之间的变换将不会出现. 同理, 当轨迹在蛋的区域下方时, 我们可以得到一个相似的解释和结论, 即分支之间的变换能否出现是由 $1-\dfrac{1}{2}\dfrac{U'}{U}$ 所决定的.

图 3-2 描绘了一个因负数势所导致的由 (+) 到 (−) 分支的变换, 其中垂直 H 轴的单位刻度是任意的.

令人吃惊的是, 虽然分支之间的变换是可以由一个负数势所引起, 但是这并不能给出一个有用的方法来成功实现从加速暴胀中自然退出. 这是因为分支之间的变换是成对出现的. 我们就用具体例子来解释这一点. 假设一个从 (+) 到 (−) 的分支变换出现在 $\phi=\phi_0$ 这点, 而 $H(\phi_0)>0$ (图 3-2), 我们感兴趣的是找出是否还有另外一个变换会出现. 定义一个函数 $\Delta^{(-)}H(\phi)=H^{(-)}(\phi)-H_{\mathrm{Egg}}(\phi)$, 对于任意在蛋里的 ϕ, $\Delta^{(-)}H$ 为正时, 就没有二次与蛋的碰撞和接触, 两个在图 3-1 和图 3-2 的

(−) 分支演化就能够平滑的连接起来提供一个自然退出. 相反地, 如果 $\Delta^{(-)}H$ 在蛋区域的某个地方消失了, 这时就还会有另外一个分支变换而返回到 (+) 分支, 从而没有退出的出现. 我们可以利用方程 (3.1.4) 来计算 $\Delta^{(-)}H$.

$$\Delta^{(-)}H(\phi) = \int \mathrm{d}\phi \left(\frac{\mathrm{d}H^{(-)}}{\mathrm{d}\phi} - \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\phi}_{|\mathrm{Egg}} \right) = -\frac{1}{3} \int \mathrm{d}\phi \left[\epsilon \left(1 - \frac{1}{2}\frac{U'}{U} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]. \quad (3.1.9)$$

假设对于一个与蛋接触的轨迹, ϵ 仍保持为一个小量 (注意: ϵ 总是正的), 我们可以在假设 ϵ 为常数的情况下估计出 $\Delta^{(-)}H$

$$\begin{aligned} \Delta^{(-)}H(\phi) &= -\frac{1}{3}\epsilon \int \mathrm{d}\phi \left[\left(1 - \frac{1}{2}\frac{U'}{U} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{3}\epsilon \left[(\phi - \phi_0) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{U(\phi)}{U(\phi_0)} \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

蛋最右边点 ϕ_1 满足 $U(\phi_1) = 0$, 因此对于任意点 ϕ_0 必然存在另一个点 ϕ^*, 它将满足 $\Delta^{(-)}H(\phi^*) = 0$ 和 $U' > 0$. 在这种情况下, 相应的轨迹将会再次接近蛋从而一个分支变换发生了, 使得宇宙返回到 (+) 分支. 当然, 在这个大的主题下还是有些不同, 有很大的可能性会碰到蛋的上方和下方.

为了圆满地解决这一问题, 我们提出了下面两种方案:

(1) 增加经典理想的流体源. 这将使等式 (3.1.4) 被修正为

$$\begin{aligned} &\dot{H} = \pm H\sqrt{3H^2 + U + \mathrm{e}^{\phi}\rho} - \frac{1}{2}U' + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}p, \\ &\dot{\phi} = 3H \pm \sqrt{3H^2 + U + \mathrm{e}^{\phi}\rho}, \\ &\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

这些方程给出一个更早期的解. 如果势有一个最小值而宇宙常数为 0(这里 $U = U' = 0$), 这时对于处在 (−) 分支的伸缩子 (对于类辐射物质, $p = 1/3\rho$), 这个解的行为就如同一个吸盘吸引着它们. 在这种情况下, 标准的以辐射为主导的宇宙确实是稳定的,

$$a = t^{1/2}, \quad \phi = \mathrm{const}, \quad \rho = a^{-4}. \quad (3.1.12)$$

这个特性完全可以通过对这个解进行相应的扰动来证明. 相比较而言, 在 (+) 分支的区域, 没有什么能阻止 ϕ 随着宇宙的膨胀而增大.

回到我们要解决的问题, 对于不可压缩流体, p/ρ 这个比率可以取 $-1/3$ 和 $1/3$ 之间的任何值, 在与蛋相碰撞这个时期, 我们得把它看成是某个常数. 不幸的是, 不管这个比率是多少, 所得的方程与方程 (3.1.9) 和 (3.1.10) 类似, 仍然会有第二次碰撞发生.

(2) 增加额外紧致维度. 这是一个相当自然的选择, 因为我们期望紧致维能够演化并最终能稳定在弦尺寸的半径下. 在这种情况下, 我们期望相关势既能跟内部维度半径相关也能跟有效的四维空间的耦合相关, $\alpha_4 = \dfrac{e^{\phi}}{V} \equiv e^{\phi}$, 其中 V 是紧致化空间维的体积. 为简单起见, 我们假设有三个非紧致化空间维, 并具有通常的标度因子 a, 而 n 个紧致化维用通常的半径 b 来描述. 我们可以定义一个与哈勃参量 H 相似的内部参量 $K = \dfrac{\dot{b}}{b}$, 在 $U = U(\varphi, b)$, $\varphi = \phi - n \ln b$ 的情况下, 方程 (3.1.4) 的一般形式变为

$$
\begin{aligned}
\dot{H} &= \pm H\sqrt{3H^2 + nK^2 + U} - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\
\dot{K} &= \pm K\sqrt{3H^2 + nK^2 + U} - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \ln b}, \\
\dot{\varphi} &= \dot{\phi} - nK = 3H \pm \sqrt{3H^2 + nK^2 + U}.
\end{aligned}
\tag{3.1.13}
$$

我们得出结论: 在弱曲率机制下对于任何种类的真实的伸缩子势而言, 一个能从加速暴胀时期自然退出到标准的 FRW 宇宙是不可能的. 因此剩下的可能性就是强曲率机制, 在这个机制下我们可以发现弦修正项的重要性.

人们很容易想到在弦耦合非常小的时候, 会遇到强曲率机制所诱导的分支变换, 这是因为一个常数伸缩子变化是经常会有的, 只要相应的势是负数. 在这个假设下, 我们的问题就变成了去寻找那个被赋予了合适的对偶对称性的共形场理论, 以此来描述一个有趣的宇宙学模型. 尤其是我们应该选择这样的背景, 即分别在负的和正的大宇宙时间上走向 (+) 和 (−), 并且在小时间范围内分别有一个中间弦机制. 人们很容易发现它对于方程 (3.1.4) 的修正应该以 $O(H^4)$ 的形式存在, 并且这种方法能成功实现自然退出. 剩下的问题是要找到一个真实而又能完成上述任务的共形背景.

小结本节的内容, 对称的弦宇宙方程的解可以分成两个相关的对偶性分支: 一个分支描述膨胀的 FRW 宇宙; 另一个则描述宇宙的加速暴胀或收缩. 如果伸缩子势为一些通常的确定值, 人们发现这两个分支可以平稳地彼此演化. 但是, 在弱曲率的区域内, 上述相关膨胀势的结果里并没有给出宇宙从加速暴胀中退出的问题. 我们运用共形场论的技巧给出了一个宇宙从加速暴胀中自然退出的方案.

3.2　轴子–伸缩子 (axion-dilaton) 宇宙的真空涨落

广义相对论在描述当前所有可观测的引力物理学方面具有很高的精确度, 但是在普朗克尺度和更低能的情况下, 广义相对论对极早期宇宙的描述却是失败的.

很多对现代宇宙学结果的研究都集中关注一个能提供可变的有效引力常数的伸缩子场 φ. 在没有其他物质存在的情况下, 低能的作用量将会导致一个由 Brans 和 Dicke 所提出的有效引力理论形式. 虽然 BD 参量 $\omega=-1$ 的预期值与当代的后牛顿测试不相容, 但这可能就是圈量子修正部分产生了一个实验上可接受的广义相对论极限, 或者是伸缩子现有值通过获得一个质量而具有了确定值 (Copeland et al., 1997).

前大爆炸方案 (Gasperini, 1993) 是一个基于弦理论的宇宙模型的特殊例子, 但这个宇宙模型与广义相对论所描述的宇宙因为 Dilaton 场的存在而有着根本的不同. 这个弱耦合、膨胀的前大爆炸解与通常的暴胀模型有着很多的相似性, 其中最显著的就是通过将量子真空态从小尺度范围内延伸到大尺度范围 (超视界), 从而实现大尺度范围下平直性和均匀性. 从低能有效作用量所得出的结果将会陷入一个"大爆炸"奇点, 但是我们希望在整个理论标架下, 包括所有高阶项在内的前大爆炸结果能够平稳地与一个描述膨胀的"爆炸后"宇宙结果相衔接, 并最终能同广义相对论演化相连接.

我们注意到反对称张量场 $H_{abc}=\partial_{[a}B_{bc]}$ 在作用量的低能极限下的宇宙学假定中将要扮演至关重要的角色. 随同引力子和伸缩子一起, 一个反对称张量不可避免的会出现在低能有效作用量的 Neveu-Schwarz 玻色子部分中

$$S=\frac{1}{2\kappa_D^2}\int \mathrm{d}^D x\sqrt{-g_D}\mathrm{e}^{-\varphi}\left[R_D+(\nabla\varphi)^2-\frac{1}{12}H^2\right], \tag{3.2.1}$$

式中 ${\kappa_D}^2=8\pi G_D$, 而 G_D 是一个 D 维的常数. 我们首先计算出经典背景场的微扰谱, 而这个经典背景场的产生是由于反对称张量场的真空涨落所引起的.

我们考虑的时空包含一个四维的均匀对称的外部度规. 在四维时空下, 反对称度规张量场只有一个自由度, 这个自由度可以用一个赝标量的轴子场 σ 来表示. 对于一个均匀且对称的度规, 我们必须有一个均匀的轴子场 $\sigma=\sigma(t)$.

下面, 我们先回顾 FRW 宇宙分别在轴子存在和不存在情况下的经典演化, 当标度因子在弦标架下变得很小的时候, 轴子的效应是很重要的. 包括了轴子的演化将会导致一个与经典前大爆炸方案不同的宇宙, 而在前大爆炸方案中轴子场是恒定的. 接着, 我们从不同的共形相关度规下, 考察宇宙演化的不同之处, 并且关注它在轴子标架下的演化, 轴子场是最小耦合. 特别需要指出的是, 我们发现弦标架下的度规奇异演化在轴子标架下可以是非奇异演化. 这些低能作用量的轴子–伸缩子解可以通过一个对偶变换联系起来, 而这个对偶变换使一个标度因子在没有轴子场的时候出现二元性.

我们给出一些相关公式来描述那些均匀对称的 $4-D$ 背景结果的非均匀线性微扰. 这个背景轴子场为零时, 也不可避免地会有场的量子涨落. 我们计算半经典

轴子微扰谱, 以及在前大爆炸方案中产生的伸缩子和模微扰谱. 通过构建 S-对偶不变的场微扰联合将这种计算推广到更一般的轴子–伸缩子宇宙, 这个场的微扰能够得出 S-对偶不变性结果. 此外, 我们还证明晚期的伸缩子和轴子谱与前述的演化情况无关. 前述的演化是沿着不同的, 但却是 S-对偶的相关经典结果进行. 重要的是, 轴子谱的倾斜与前大爆炸方案中所预言的伸缩子和引力子剧烈变化的“蓝谱”有着很大的不同.

3.2.1　经典轴子 – 伸缩子宇宙

我们考虑从低能作用量得出的宇宙解, 其中完备的 D 维时空有如下的度规形式:

$$ds_D^2 = -\mathrm{d}t^2 + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + \gamma_{IJ}\mathrm{d}X^I\mathrm{d}X^J, \tag{3.2.2}$$

i, j 是从 1 取到 3, 而 I, J 为 1 到 $n = D - 4$.

考虑 n 个紧致化维度的相关变分, 并且包括了一个单模场 $\exp(n\beta)$, 它正比于相应内部空间的体积, 但忽略弯曲和各向异性, 此时有关系 $\gamma_{IJ} = \mathrm{e}^{2\beta}\delta_{IJ}$.

在四维的外部时空下的有效伸缩子为

$$\phi \equiv \varphi - n\beta, \tag{3.2.3}$$

而四维的反对称张量场可以用一系列的赝标量轴子场 σ 来表示

$$H^{abc} \equiv \mathrm{e}^{\phi}\epsilon^{abcd}\nabla_{\mathrm{d}}\sigma, \tag{3.2.4}$$

式中 ϵ^{abcd} 是协变的四阶反对称张量, 并满足 $\nabla_{\mathrm{e}}\epsilon^{abcd} = 0$.

低能弦的有效作用量 (3.2.1) 这时就变成了

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\mathrm{e}^{-\phi}\left[R + (\nabla\phi)^2 - n(\nabla\beta)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\phi}(\nabla\sigma)^2\right], \tag{3.2.5}$$

式中 $\kappa^2 \equiv 8\pi/M_{\mathrm{Pl}}^2$ 决定了 $\phi = 0$ 时普朗克质量的有效值, 而 R 是四维外部时空里奇标量.

我们假设外部的四维时空是由平直 FRW 度规所描述, 其线元为

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left\{-\mathrm{d}\eta^2 + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right\}, \tag{3.2.6}$$

式中 $a(\eta)$ 是标度因子. 为了与一个均匀对称的度规兼容, 所有的场必须是均匀的并且作用量满足

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}\eta\mathrm{e}^{-\phi}\left(-6a'^2 + 6aa'\phi' - a^2\phi'^2 + na^2\beta'^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\phi}a^2\sigma'^2\right). \tag{3.2.7}$$

我们所考虑的模型作为伸缩子真空解是有一个恒定的轴子场 ($\sigma' = 0$). 这就是有名的单幂律解

$$e^{\phi} = e^{\phi_*}\left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{r_\pm}, \tag{3.2.8}$$

$$a = a_*\left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{(1+r_\pm)/2}, \tag{3.2.9}$$

$$e^{\beta} = e^{\beta_*}\left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{s}, \tag{3.2.10}$$

式中的积分常数 r 和 s 分别决定了有效伸缩子和内部体积的改变速率. 值得注意的是, 约束方程 (3.2.29) 要求

$$r_\pm = \pm\sqrt{3 - 2ns^2}. \tag{3.2.11}$$

有关伸缩子真空的结果在图 3-3~ 图 3-5 中给出. 如果出现的是稳定的紧致化, 并且内在空间的体积被固定在 ($s = 0$, 或者 $D = 4$) 处, 我们有 $r_\pm = \pm\sqrt{3}$.

这些伸缩子真空解可以用固有时间来表示, $t \equiv \int a\,\mathrm{d}\eta$, 得到

$$e^{\phi} = e^{\phi_*}\left|\frac{t}{t_*}\right|^{2r_\pm/(3+r_\pm)}, \tag{3.2.12}$$

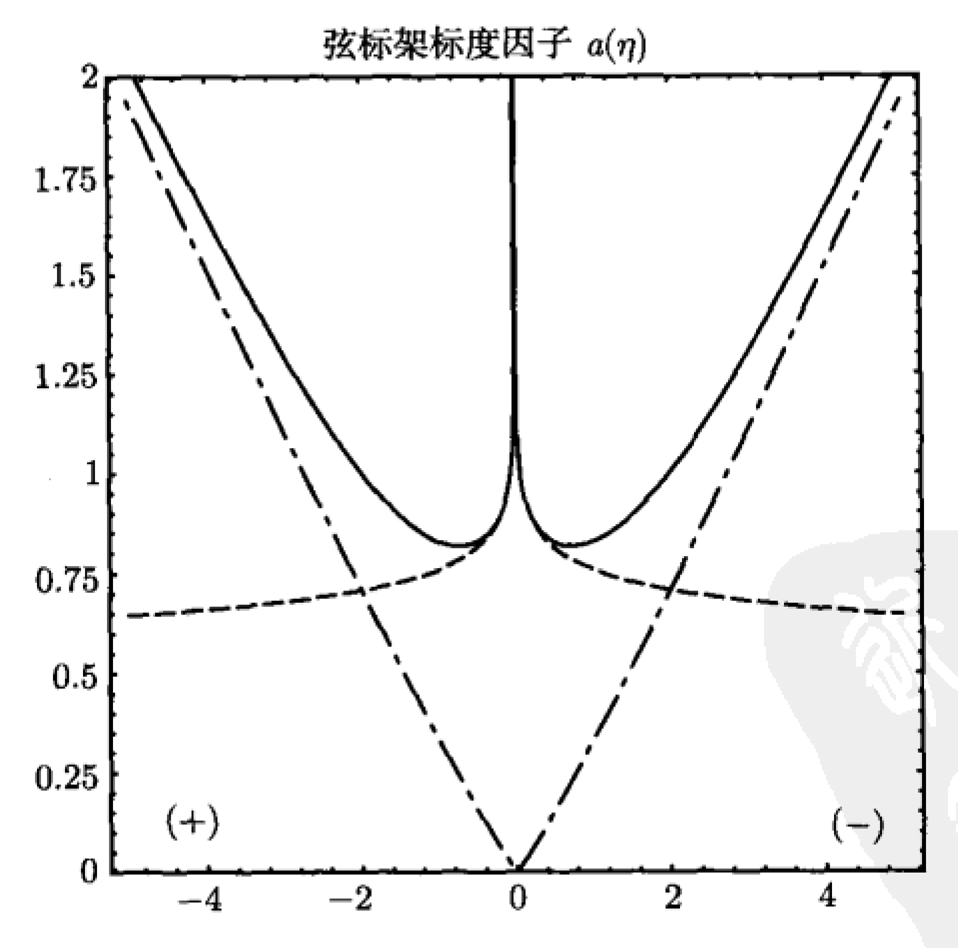


图 3-3　由式 (3.2.8) 给出的关于轴子–伸缩子结果的弦标架下标度因子 (实线). 当 $\eta \to 0$ 时, 它将成为由式 (3.2.9) 所给出的在 $r_- = -r$ 的伸缩子真空结果 (虚线); 而当 $\eta \to \pm\infty$ 时, 它却是 $r_+ = +r$ 的伸缩子 dilaton 真空结果 (点–虚线). (+) 和 (−) 也分别被标明了. 一些与轴子–伸缩子结果相关的特殊参量为 $a_* = 1, r = 1.2$ 和 $\eta_* = 2$

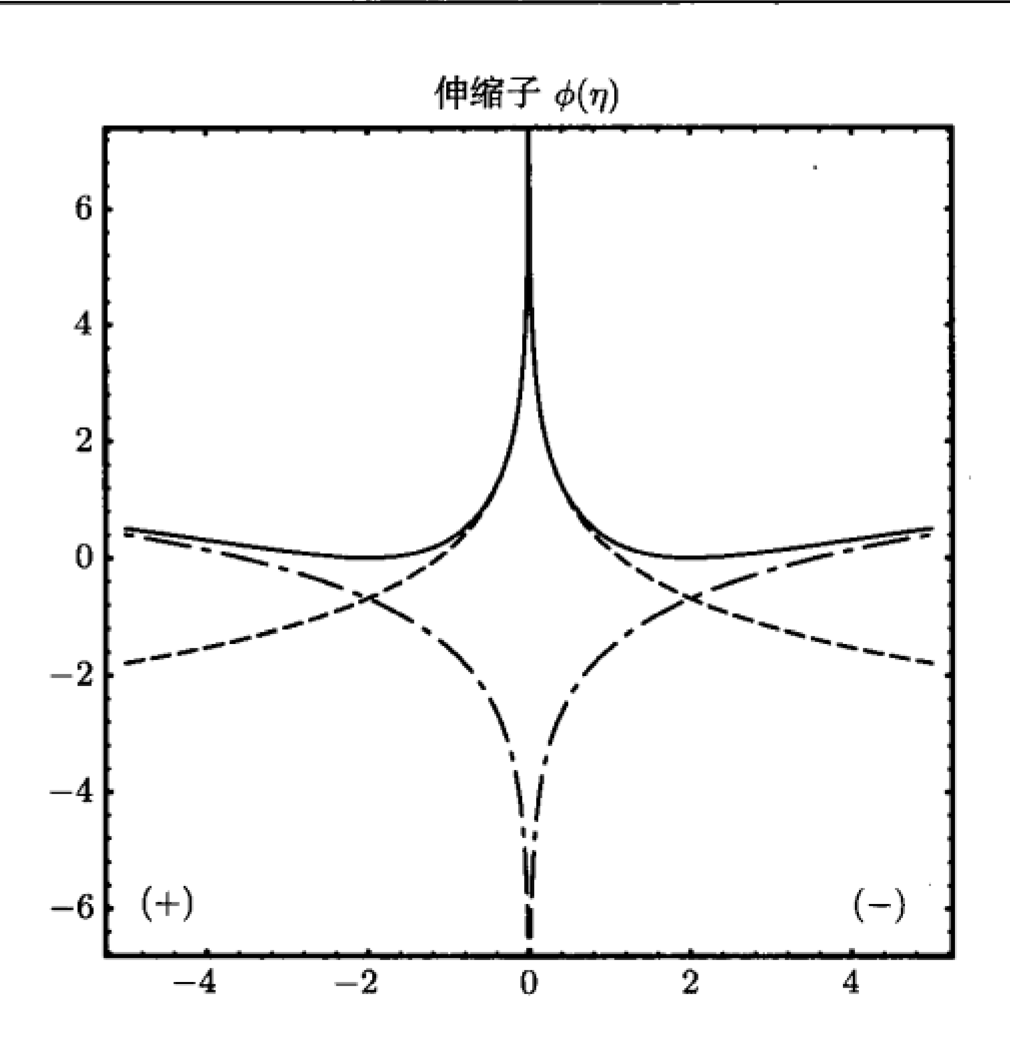


图 3-4 图中在 $\phi_* = 0$ 和与图 3-3 有相同参量值及相同表示的情况下, 给出了伸缩子 ϕ. 轴子–伸缩子结果 [式 (3.2.17)]. 在小 $|\eta|$ 的情况下成为了 r_- 的伸缩子真空结果 [式 (3.2.8)], 而在大 $|\eta|$ 时, 则成为了相应的 r_+ 结果

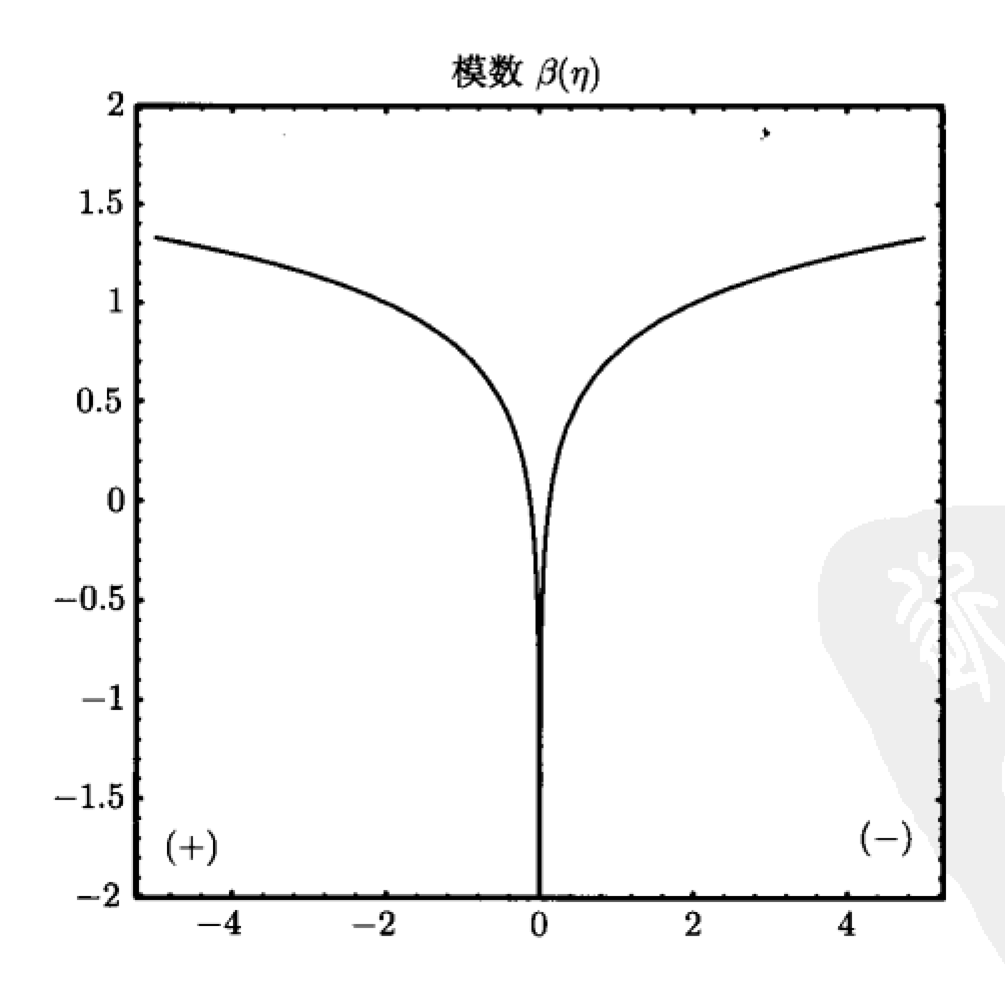


图 3-5 在 $n = 6$ 和 $s = \sqrt{13}/10$ 以及与图 3-3 有相同参数值的情况下, 给出了模数 β. 这个演化同式 (3.2.10) 给出的伸缩子真空和式 (3.2.19) 给出的轴子–伸缩子结果的情况是一样的

$$a = a_* \left|\frac{t}{t_*}\right|^{(1+r_\pm)/(3+r_\pm)}, \tag{3.2.13}$$

$$e^\beta = e^{\beta_*} \left|\frac{t}{t_*}\right|^{2s/(3+r_\pm)}, \tag{3.2.14}$$

那些从 $t=0$ 的奇点出发到 $t \geqslant 0$ 的部分标注为 $(-)$ 分支, 而那些从 $t \leqslant 0$ 到奇点 $t=0$ 的部分则称为 $(+)$ 分支.

我们对时间坐标原点的选择是任意的. 一个对 $(+/-)$ 分支更基本的定义可以通过考虑可变伸缩子的演化而得到

$$\bar{\phi} \equiv \phi - 3\ln(a). \tag{3.2.15}$$

其对应的时间微分为

$$\bar{\phi}' = -\frac{3+r_\pm}{2\eta}, \tag{3.2.16}$$

由于受到 $r_\pm$ [式 (3.2.11)] 的限制, 它在 $(+)$ 分支 (或者 $\eta < 0$) 总是正的, 而在 $(-)$ 分支 (或者 $\eta > 0$) 却总是负的.

这些 $(+/-)$ 分支并没有涉及式 (3.2.11) 中对 $r_\pm$ 符号的选择. 即使在伸缩子真空宇宙的 $(+)$ 或者 $(-)$ 分支下, 由于可能的选择可以为指数 r_+ 或者 r_-, 我们仍有两个不同结果, 它们分别决定了当 $\eta \to 0$ 时, ϕ 是趋向负无穷大还是正无穷大.

从式 (3.2.8)~ 式 (3.2.10) 到更一般化的轴子–伸缩子宇宙 $(\sigma' \neq 0)$ 的推广是非常简单的

$$e^\phi = \frac{e^{\phi_*}}{2}\left\{\left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{-r} + \left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{r}\right\}, \tag{3.2.17}$$

$$a^2 = \frac{a_*^2}{2}\left\{\left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{1-r} + \left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{1+r}\right\}, \tag{3.2.18}$$

$$e^\beta = e^{\beta_*}\left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{s}, \tag{3.2.19}$$

$$\sigma = \sigma_* \pm e^{-\phi_*}\left\{\frac{|\eta/\eta_*|^{-r} - |\eta/\eta_*|^{r}}{|\eta/\eta_*|^{-r} + |\eta/\eta_*|^{r}}\right\}, \tag{3.2.20}$$

式中的指数是通过 $r = \sqrt{3-2ns^2}$ 来表述的. 与时间相关的轴子解表示在图 3-3~图 3-6 中. 轴子的存在为伸缩子的值设置了一个更低的限制. 这样, 在两个轴子–伸缩子真空解中插入了一个近似恒定的轴子场. 当 $\eta \to \pm\infty$ 时, 相应的结果将趋向于 $r_+ = +r$ 的伸缩子真空, 在 $\eta \to 0$ 时, 相关结果将趋向于 $r_- = -r$ 伸缩子真空. 人们很容易发现, 早期和晚期伸缩子真空的近似结果将会导致一个特殊而简单的半经典微扰谱, 而这个半经典微扰谱与中间演化过程无关.

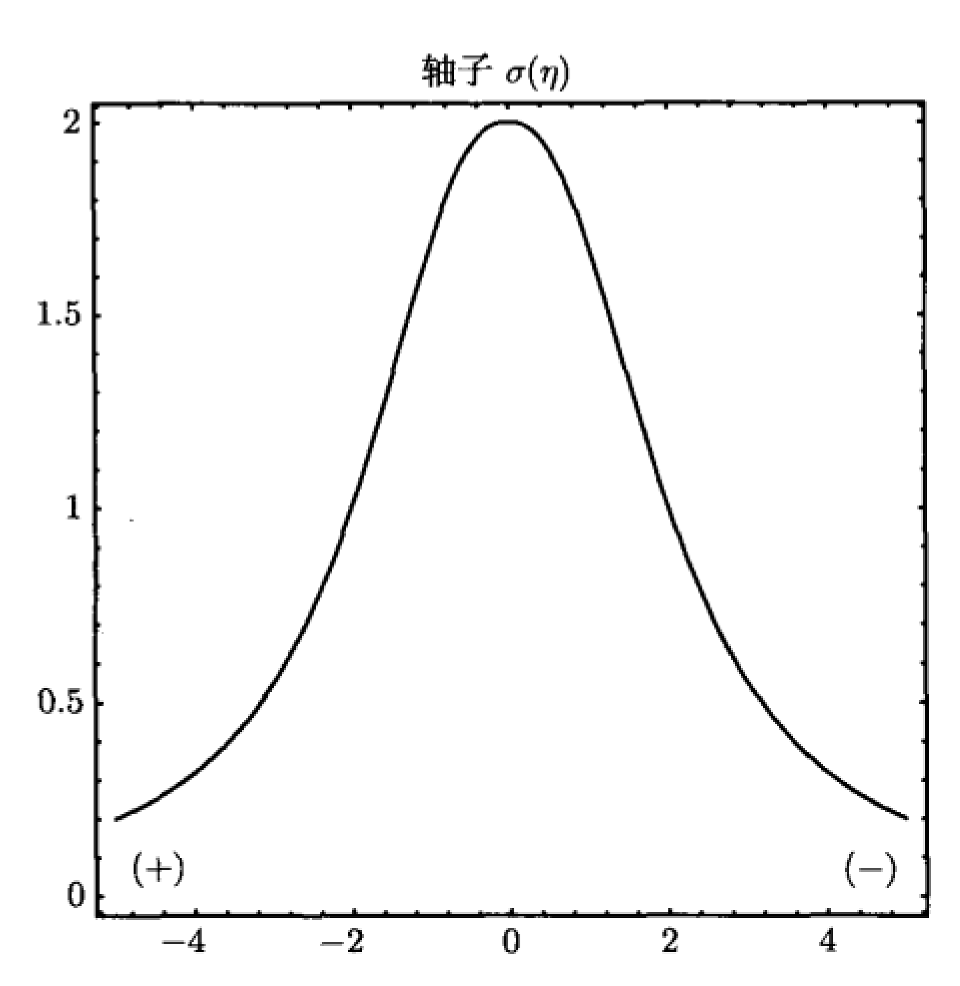


图 3-6　在 $\sigma_* = 1$ 和与图 3-3 具有相同参量值的情况下, 图中给出了由式 (3.2.20) 所给出的轴子–伸缩子结果中的轴子 σ 的情况

当轴子场导致伸缩子出现一个跳跃 $\phi' = 0$ 时, 除了靠近 $\eta \sim \eta_*$ 之外, 轴子场的动力学效应是负的. 如果 $r > 1$, 这时将会导致标度因子的一个跳跃 $a' = 0$. 但我们仍有两个不相连的分支, 正如 (3.2.16) 所定义的那样, 一个分支对应着增加的变化伸缩子, 并到达 (+) 分支的一个奇点, 另一个则对应着减少的变化伸缩子, 并将到达 (−) 分支的奇点.

3.2.2　共形标架表述

前面我们已经给出了在弦标架下的结果. 如果在这个标架下的弦物质有最小耦合, 这时弦试验粒子将沿着此相应度规的测地线而运动. 但是, 为了理解在这些模型下的物理演化, 最好是考察共形相关的度规, $g_{ab} \to \Omega^2 g_{ab}$. 如果共形因子 Ω^2 自身是均匀的, 这时变换的度规将保持为一个 FRW 度规但是标度因子有 $a \to \Omega a$.

这种标度因子的变化可以导致在叙述宇宙解的时候产生一些不确定性. 例如, 暴胀通常被定义为加速膨胀 ($\ddot{a} > 0$). 但这样的一个定义是与共形标架的选择相关的, 在这些标架下人们需要估计加速度的大小.

值得注意的是固有时间在共形变化下也会改变, $t \to \displaystyle\int \Omega \mathrm{d}t$. 人们不必假设在一个标架下的有限的固有时间隔必须与另外一个标架下的固有时间隔相一致, 尤其是我们会发现在某个标架下可能出现奇异演化, 而在另外一个标架下却是非奇异的.

1. 爱因斯坦标架表述

通过选择一个共形因子 $\Omega^2 = \mathrm{e}^{-\phi}$, 我们可以在这样一个标架下工作, 即 $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$, 其中伸缩子与外部度规有最小耦合. 因此, 在作用量 (3.2.5) 中的引力部分将会导出爱因斯坦–希尔伯特作用量

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left\{\widetilde{R} - \frac{1}{2}(\widetilde{\nabla}\phi)^2 - n(\widetilde{\nabla}\beta)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\phi}(\widetilde{\nabla}\sigma)^2\right\}. \tag{3.2.21}$$

而这就是著名的爱因斯坦标架. 伸缩子和模场在这个标架下都有标准动能部分, 因此模粒子和伸缩子 (在一个恒定的轴子场下) 将为此而沿着爱因斯坦标架下的四维时空的测地线运动.

著名的广义相对论场方程为

$$\widetilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{ab}\widetilde{R} = \kappa^2\widetilde{T}_{ab}, \tag{3.2.22}$$

正是在这个标架的应用. 它可以给出一个宇宙的直观形象, 这个形象基于四维广义相对论, 并通过 ϕ 值的度规形式的演化方程中退耦, 给出能动张量

$$\kappa^2\widetilde{T}_{ab} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{g}_a^c\widetilde{g}_b^d - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{ab}\widetilde{g}^{cd}\right)\left(\phi_{,c}\phi_{,d} + 2n\beta_{,c}\beta_{,d} + \mathrm{e}^{2\phi}\sigma_{,c}\sigma_{,d}\right). \tag{3.2.23}$$

对于均匀场, 导致一个与理想流体相关的刚性方程, 即压强等于密度

$$\widetilde{p} = \widetilde{\rho} = \frac{1}{4\kappa^2}\left(\phi'^2 + 2n\beta'^2 + \mathrm{e}^{2\phi}\sigma'^2\right). \tag{3.2.24}$$

在 FRW 度规下, 均匀场方程的演化这时表示为

$$\phi'' + 2\widetilde{h}\phi' = \mathrm{e}^{2\phi}\sigma'^2, \tag{3.2.25}$$

$$\sigma'' + 2\widetilde{h}\sigma' = -2\phi'\sigma', \tag{3.2.26}$$

$$\beta'' + 2\widetilde{h}\beta' = 0, \tag{3.2.27}$$

$$\widetilde{h}' = -\frac{1}{6}\left(\phi'^2 + 2n\beta'^2 + \mathrm{e}^{2\phi}\sigma'^2\right), \tag{3.2.28}$$

加上约束方程

$$\widetilde{h}^2 = \frac{1}{12}\left(\phi'^2 + 2n\beta'^2 + \mathrm{e}^{2\phi}\sigma'^2\right), \tag{3.2.29}$$

式中 $\widetilde{h} \equiv \widetilde{a}'/\widetilde{a}$.

从式 (3.2.28) 和式 (3.2.29), 我们可以发现在通常轴子–伸缩子的情况下, 并且在其中我们还容许轴子、伸缩子场和模场可以演化, 这时爱因斯坦标架下的膨胀遵循 $\widetilde{h}' + 2\widetilde{h}^2 = 0$, 从而得到一个简单的标度因子关系式

$$\widetilde{a} \equiv a\mathrm{e}^{-\phi/2} = \widetilde{a}_*\left(\frac{\eta}{\eta_*}\right)^{1/2}. \tag{3.2.30}$$

由标量场的运动方程 (3.2.25)~(3.2.27), 通过积分可以得到这结果, 见式 (3.2.17)~式 (3.2.20). 甚至在空间弯曲的 FRW 模型下, 运动方程仍然是可积分的而不管场之间是否为非平庸的耦合, 这是因为我们可以对爱因斯坦标架做一个共形变换, 使得所有的场与度规都有最小耦合, 只要它们都是均匀的, 它们总的动力学效应就与一个单一的无质量标量场没什么区别.

由于场之间没有相互作用势, 强能量条件 ($\widetilde{p} > 0$) 是恒满足的 [式 (3.2.24)], 同时广义相对论的奇点理论也必须保留. 因此, 在这些无质量场的爱因斯坦标架下是没有办法构建一个非奇异演化的.

在弦标架下, 通常的广义相对论结果并没有保留. 甚至在没有相互作用势的情况下, 我们能够获得一个加速膨胀 (3.2.13) 的 (+) 伸缩子真空分支 ($t < 0$) 且有 $r_- < -1$. 但是, 与传统的幂律暴胀不同, 在 $p > 1$ 下的 $a \propto t^p$, 我们有 $p < 0$ 的"单极暴胀", 并且在 $t \to 0$ 会接近曲率奇点 $a \to \infty$ 和 $R \sim t^{-2}$.

在爱因斯坦标架下, 我们发现在 (+) 分支的 $\eta \to 0$ 通常是对应着一个塌缩的宇宙 $\widetilde{a} \to 0$. 这仍然算完成了对暴胀的定义, 即入射的哈勃长度 ($|\mathrm{d}\widetilde{a}/\mathrm{d}\widetilde{t}|^{-1} = |\widetilde{a}/\widetilde{a}'| = 2|\eta|$) 随时间而减小. 因此, 一个给定的入射尺度, 它起始于在哈勃尺度范围内的任意远处, 并在共形标架的 $\eta \to -\infty$, 当 $\eta \to 0$ 时, 这个尺度将不可避免的变得比在此标架下的哈勃尺度要大. 这就容许人们在伸缩子、模和引力场中制造微扰, 并且尺度上比由早期平直时空量子涨落产生的现今哈勃尺度要大很多, 具体情况我们将在后面讨论.

在弦标架和爱因斯坦标架下, 我们既可以在将来有限的固有时间 ($\eta < 0$) 到达奇点, 也可以在过去有限的固有时间里 ($\eta > 0$) 从一个曲率奇点出现. 对此唯一期望就是, 当 $r = 1$ ($s = \pm\sqrt{1/n}$) 在式 (3.2.17)~ 式 (3.2.20) 中 $\eta = 0$ 处有跳跃时, 在弦标架下的轴子–伸缩子有解. 但即使在这种情况下, 伸缩子和模子在有限的固有时间内也会变为无限大.

2. 轴子标架表述

在爱因斯坦标架下的伸缩子和模子场是最小耦合的 (也就是它们有标准的运动项). 但是轴子运动项保留了一个同伸缩子的非最小耦合. 这个可以通过共形变换而去掉, 从而变换到另外一个共形相关度规下的"轴子标架", 有 $\bar{g}_{ab} = \mathrm{e}^{-2\phi} g_{ab}$ 并且

$$\bar{a} \equiv \mathrm{e}^{\phi/2} a \equiv \mathrm{e}^{\phi} \widetilde{a}. \tag{3.2.31}$$

在这个标架下轴子场与无质量的标量场是最小耦合的, 因此轴子试验粒子将沿着此度规相关的测地线运动. 虽然这个度规与弦标架和爱因斯坦标架是共形相关的, 但是"看"起来其行为将会与弦标架或爱因斯坦标架下的度规有很大的不同.

在共形时间的条件下, 对于由式 (3.2.8) 和式 (3.2.9) 在 $\sigma' = 0$ 所给出的伸缩子真空解, 其相应的轴子标度因子演化将满足

$$\bar{a} = \bar{a}_* \left(\frac{\eta}{\eta_*}\right)^{r_\pm + (1/2)}. \tag{3.2.32}$$

我们发现在轴子标架下的固有时间为

$$\bar{t} \equiv \int \bar{a}\, \mathrm{d}\eta \sim |\eta|^{r_\pm + (3/2)}, \tag{3.2.33}$$

因此在 $r_- < -3/2$ 时, 将会需要一个无限的固有时间才能到达 $\eta = 0$ (这时 $ns^2 < 3/8$), 并且对于轴子度规曲率标量为 $\bar{R} \sim \bar{t}^{-2}$, 在 $\eta \to 0$ 为零. 但是, 这些同样的伸缩子真空解将在有限的固有时间内到达 $\eta \to \pm\infty$, 而其中 $\bar{R}$ 会发散. 由于共形因子在 $\eta \to 0$ 时会发散, 它将会穿越弦度规曲率奇点变成一个轴子标架下的非奇异演化. 但是如同 $\eta \to \pm\infty$ 一样当 $\Omega^2 = \mathrm{e}^\phi \to 0$ 时, 在弦标架下的非奇异演化被压缩成一个轴子标架下的曲率奇点.

在弦理论的低能限制下, 相似的行为已经在黑洞研究中进行了讨论. 由轴子物质组成的宇航员掉入一个 $D = 4$ 轴子–伸缩子黑洞, 他将需要一个无限长的固有时间 (由他们的轴子时钟去测量) 才能进入在爱因斯坦标架下出现的奇点.

根据轴子标架下的固有时间 $\bar{t}$, 我们有

$$\bar{a} = \bar{a}_* \left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}_*}\right)^{(1+2r_\pm)/(3+2r_\pm)}. \tag{3.2.34}$$

对于 $r_- < -3/2$, 我们传统的幂律暴胀 (不是单极暴胀) 有 $\bar{a} \sim \bar{t}^{\bar{p}}$ 和 $\bar{p} = 1 + [2/(-2r_- - 3)] > 1$. 我们将会发现它将会对轴子场在大尺度范围内所产生的半经典微扰谱的倾斜有重要影响.

这些伸缩子解在 $\bar{t} \to 0$ 时仍然有一个曲率奇点, 因此这些结果仍然只有一个在轴子标架下半无限的寿命, 但是对于 $r_- < -3/2$, 这就与 $\eta \to \pm\infty$ 是一致的, 故就在 $r_- < -3/2$ 的轴子标架下 r_- 的结果而言, 对于 (+) 和 (−) 分支的鉴别, 作为到达或离开奇点的解, 是可以相互交换的.

但是这也隐含着轴子–伸缩子结果在一个与时间无关的轴子场下, 在 $r > 3/2$ 的轴子标架下是没有奇点的. 注意到轴子–伸缩子解在 $\sigma' \neq 0$ 时与在 $\eta \to 0$ 处的 $r_- = -r$ 伸缩子真空结果是相容的.

因此, 对于 $r > 3/2$, 当 $\eta \to 0$, 轴子–伸缩子结果在轴子标架下是没有奇点的 (因为 $-r < -3/2$), 同时当 $\eta \to \infty$ (因为 $+r > -3/2$) 时, 也没有奇点.

一般的轴子–伸缩子系统演化, 式 (3.2.17)∼ 式 (3.2.20) 在轴子标架下由式 (3.2.31) 给出, 因此

$$\bar{a} = \frac{\bar{a}_*}{2} \left\{ \left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{(1/2)-r} + \left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{(1/2)+r} \right\}. \tag{3.2.35}$$

从这里, 我们能够得到固有时间 $\bar{t}$,

$$\frac{\bar{t}}{\bar{t}_*} = \left(\frac{9-4r^2}{12}\right)\left(\frac{2}{3-2r}\left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{(3/2)-r} + \frac{2}{3+2r}\left|\frac{\eta}{\eta_*}\right|^{(3/2)+r}\right). \tag{3.2.36}$$

正如上面所述, 对于 $r < 3/2$ 它是半无限的 $(0 \leqslant \bar{t}/\bar{t}_* < \infty)$, 但是对于 $r \geqslant 3/2$ 它是无界的 $(-\infty < \bar{t}/\bar{t}_* < \infty)$. 根据轴子标架下的固有时, 式 (3.2.35) 和式 (3.2.36) 给我们提供了一个轴子标架标度因子的参数化解.

图 3-8 中, 一典型的例子揭示了对于不同 r 值的相应 $\bar{a}(\bar{t})$ 的行为. 注意到标度因子 $\bar{a}$, 只要 $r > 1/2$ 就有一个非零最小值. 当 $r > 3/2$ 时, 在 $\bar{t} \to -\infty$ 时 $\bar{a}$ 变得无限大, 而在 $\bar{t} \to \infty$ 时, 它通过非零最小值后是不确定地扩展. 尤其是如果稳定的紧致化的出现会使得模场是确定的 $(s = 0)$, 或者 $D = 4$(这样 $n = 0$), 这时 $r = \sqrt{3}$ 并且轴子–伸缩子结果在轴子标架下总没有奇点. 如果 $1/2 < r < 3/2$, $\bar{a}$ 会有跳跃但却是异常的, 因为当 $\bar{t} \to 0$ 时, 它在有限的固有时间内变得无限大. 最后, 当 $r < 1/2$ 时, 相关结果是单调函数, 并且有一个 $\bar{t} = 0$ 使得 $\bar{a}$ 为零的相关奇点.

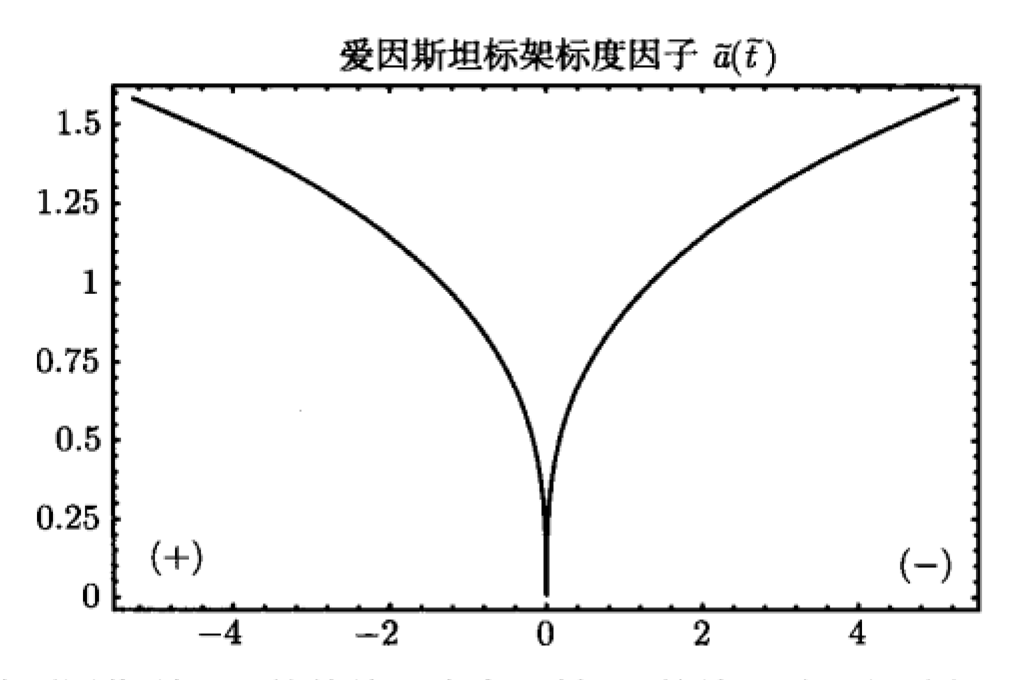
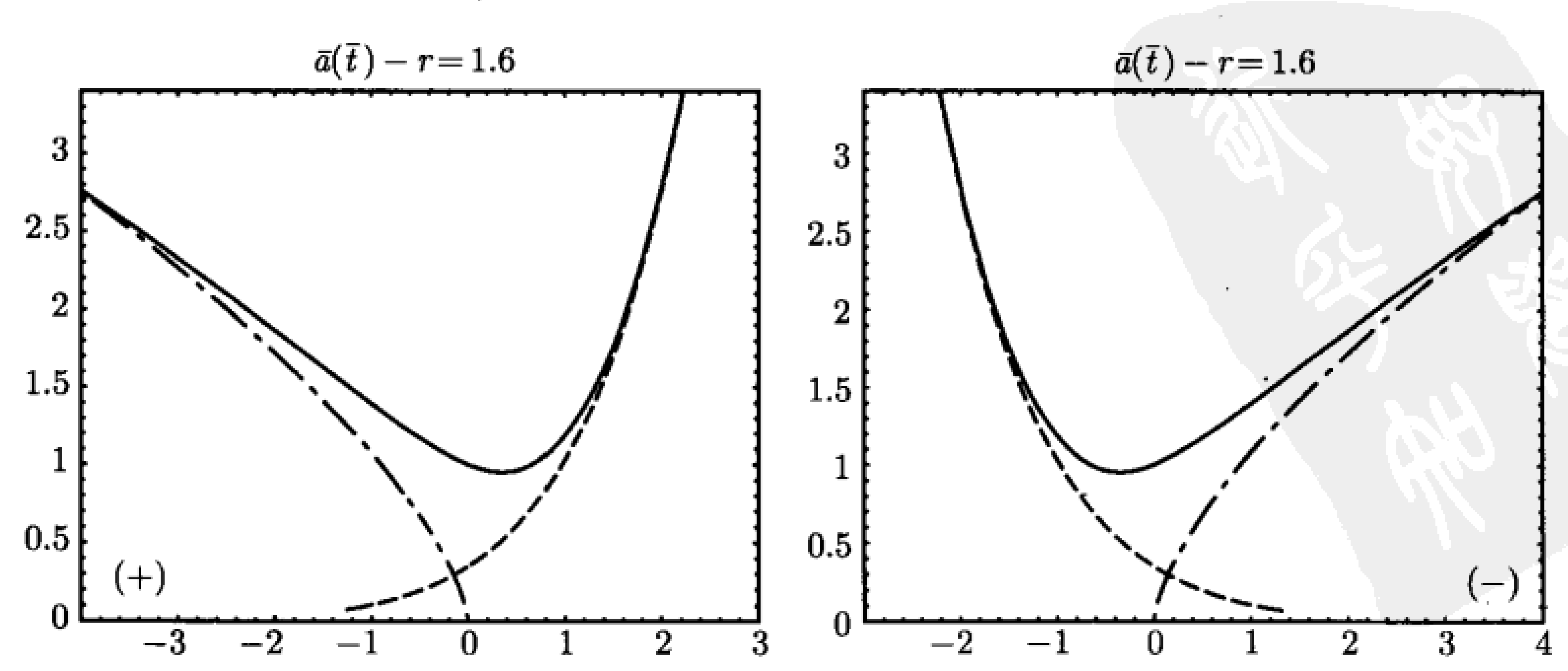


图 3-7　通过与前面图像所展示的伸缩子真空和轴子–伸缩子结果相关的爱因斯坦标架固有时, 我们绘出了爱因斯坦标架标度因子 $\tilde{a}$



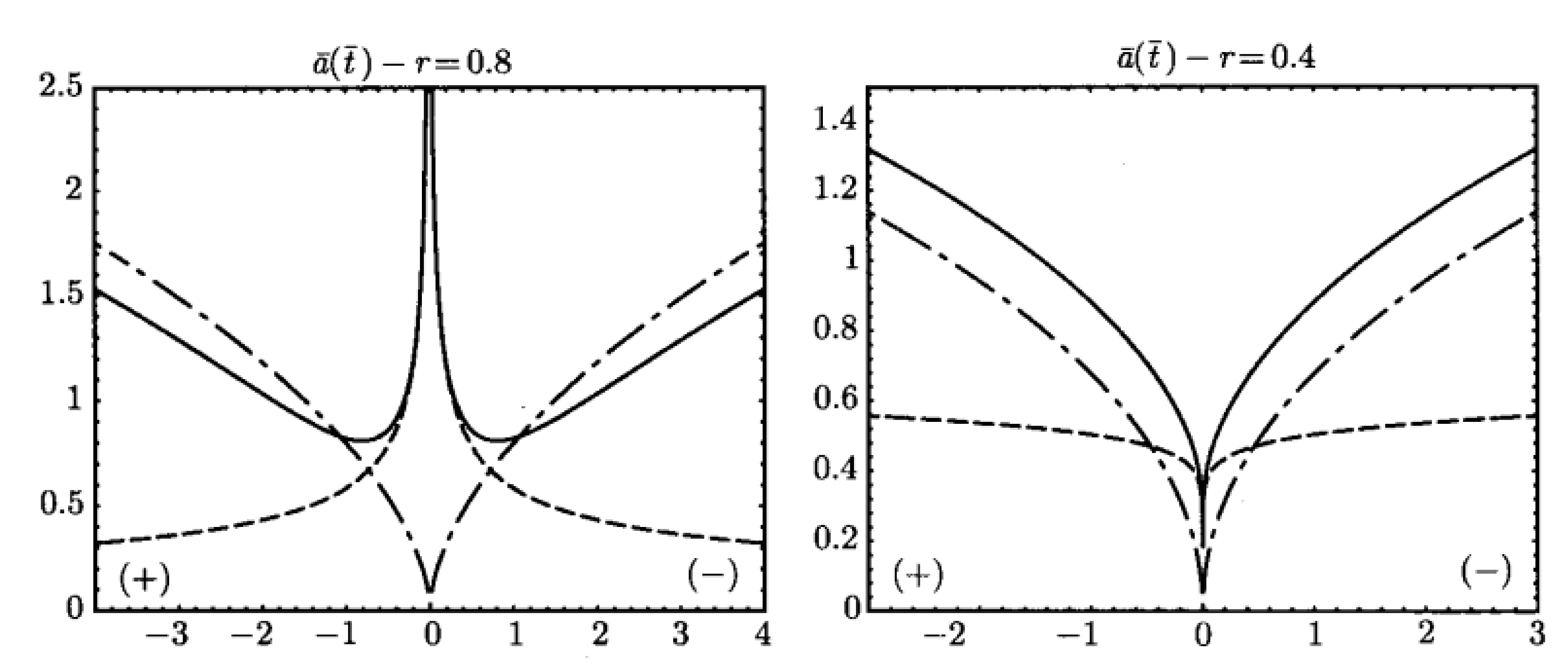


图 3-8 通过轴子标架的关于三个不同 r 值的轴子–伸缩子宇宙 (实线) 的固有时, 图中绘出了轴子标架的标度因子 $\bar{a}$, 而其他的常数同图 3-3 一样. 同时还给出了渐近的伸缩子真空结果在 $r_-=-r$(虚线) 和 $r_+=+r$ (点–虚线) 的情况. 当 $r\geqslant 1.5$ 时, 关于 η 的半无限间隔被映射成一个无界的固有时间隔, 从而 (+) 和 (−) 分支结果可以分别在两个相应的顶部图像中表示

3.2.3 标度因子的对偶性

式 (3.2.12)∼ 式 (3.2.14) 所给出的常数轴子结果可以通过标度因子的对偶转换而联系起来

$$a\to\frac{1}{a},\quad \mathrm{e}^{\phi}\to\frac{\mathrm{e}^{\phi}}{a^6}. \tag{3.2.37}$$

对应于参数变换

$$a_*\to\frac{1}{a_*},\quad \mathrm{e}^{\phi_*}\to\frac{\mathrm{e}^{\phi_*}}{a_*^6},\quad r_\pm\to-\frac{3+2r_\pm}{2+r_\pm}, \tag{3.2.38}$$

这是通常的 $O(d,d)$ 对偶的一种特殊情况, 其中的轴子场为恒定的常数. 当我们忽略模场的演化 ($s=0$ 并且 $r_\pm=\pm\sqrt{3}$) 时, 这与 $r_\pm\to r_\mp$ 是一致的. 注意到这个标度因子的对偶性并没有将 (+) 分支变换到 (−) 分支或者将 (−) 分支变换到 (+) 分支. 这还需要一个时间反演.

前大爆炸方案假定了一个非奇异宇宙, 一个半无限寿命的膨胀 (+) 分支 $a\sim(-\eta)^{-p}$, 起始于 $\eta=-\infty$, 连接另一个半无限膨胀 (−) 分支 $a\sim\eta^p$, 经过一个标度因子的对偶变换脱离 $\eta=+\infty$, 再加上时间反演. $\eta\approx 0$ 为奇点.

一个与时间相关的轴子场是与低能弦作用量在 $SL(2,R)$ 变换下的不变性相关的

$$\lambda\to\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}, \tag{3.2.39}$$

式中 α,β,γ 和 δ 都是实常数, 满足 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, 而 λ 是复伸缩子场

$$\lambda=\sigma+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\phi}. \tag{3.2.40}$$

由此可得

$$e^{\phi} \to \gamma^2 e^{-\phi} + (\delta + \gamma\sigma)^2 e^{\phi}, \tag{3.2.41}$$

$$e^{\phi}\sigma \to (\beta + \alpha\sigma)(\delta + \gamma\sigma)e^{\phi} + \alpha\gamma e^{-\phi}. \tag{3.2.42}$$

在弦理论下, 这代表了复伸缩子的模不变性, 但是如果仅仅考虑低能作用量的经典场, 它将代表一个伸缩子和轴子场的变换, 并保留了不变式

$$dS^2 \equiv e^{2\phi} d\lambda d\lambda^* = d\phi^2 + e^{2\phi} d\sigma^2. \tag{3.2.43}$$

根据 ϕ 和 σ, 或者 λ, 不是很容易发现 dS^2 在式 (3.2.39) 所给出的变换下保持不变.

我们定义矩阵

$$N = \begin{pmatrix} e^{\phi} & e^{\phi}\sigma \\ e^{\phi}\sigma & e^{-\phi} + e^{\phi}\sigma^2 \end{pmatrix}, \tag{3.2.44}$$

有 $N^{\mathrm{T}} J N = J$, 其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.45}$$

可知它是 $SL(2,R)$ 中的一个元素. 特殊地, 对于 $SL(2,R)$ 变换式 (3.2.39) 有

$$N \to \Theta N \Theta^{\mathrm{T}}, \tag{3.2.46}$$

其中

$$\Theta = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{3.2.47}$$

它也是 $SL(2,R)$ 的一个元素. 这时我们有 $dS^2 = \mathrm{tr}(J dN J dN)/2$, 注意到 $\Theta^{\mathrm{T}} J \Theta = J$, 可以直接证明 dS^2 是不变量. 我们将会发现, 这样的表示对于后面构建精确的 S 对偶不变性的伸缩子和轴子场微扰是很方便的.

伸缩子和轴子场的拉格朗日密度在爱因斯坦标架下可写为

$$-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(J\nabla_{\mu} N J \nabla^{\mu} N) = -\frac{1}{2}(\widetilde{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2}e^{2\phi}(\widetilde{\nabla}\sigma)^2. \tag{3.2.48}$$

它是 S-对偶不变的, 因为伸缩子和轴子在爱因斯坦标架下与其他场是最小耦合的, 模场的演化、β 和标度因子 $\widetilde{a}$ 不受对偶变换的影响. 但是在原始的弦标架下, 标度因子必定会改变, 在一个非平庸变换下将不再保持不变.

如果我们选择 $\gamma/\delta = -1/\sigma_*$, 当 $\sigma = \sigma_* =$ 常数时, 式 (3.2.8)~(3.2.10) 所给出的结果通过变换式 (3.2.39) 相对应

$$e^{\phi} \to \gamma^2 e^{-\phi}, \tag{3.2.49}$$

$$\sigma \to \frac{\alpha}{\gamma}, \tag{3.2.50}$$

$$a \to \gamma \mathrm{e}^{-\phi} a, \tag{3.2.51}$$

σ 为常数. 尤其是对于 $\gamma^2 = 1$, 我们有 $\phi \to -\phi$, 因此这是一个强和弱耦合之间的变换. 由式 (3.2.8)~(3.2.10) 所给出的结果没有变化, 但是相应的参量为

$$\mathrm{e}^{\phi_*} \to \mathrm{e}^{-\phi_*}, \quad a_* \to \mathrm{e}^{-\phi_*} a_*, \quad r_\pm \to r_\mp. \tag{3.2.52}$$

与式 (3.2.38) 比较, 我们发现, 当 $ns^2 = 0$, $r_\pm = \pm\sqrt{3}$ 时, 这个结果与式 (3.2.37) 所给出的关于标度因子对偶性的情况是一致的.

式 (3.2.41) 和式 (3.2.42) 给出了更一般的关于 e^ϕ 和 σ 的 S 对偶变换, 可以发现它与伸缩子宇宙真空是相关的, 而对于更一般的轴子–伸缩子宇宙, 如果轴子场与时间相关, 给定 r 的值, 人们可以根据伸缩子真空在 $r_\pm = \pm r$ 的表示式, 通过 S 对偶变换得到一个通常的轴子–伸缩子表示式.

3.2.4 线性微扰

前面我们讨论了运动方程在均匀情况下的经典结果. 下面, 我们将要考虑非均匀微扰情况, 它的产生是由于真空涨落. 为了理解这个演化, 我们首先列出一些所需要的公式来描述在均匀时空度规背景下的线性微扰.

首先考虑在空间平直规范下的四维度规微扰 (或者在更一般的 FRW 模型中, 等同空间曲率规范), 利用爱因斯坦标架, 一阶微扰线元可以写为

$$\mathrm{d}\widetilde{s}^2 = \widetilde{a}^2(\eta)\left[-(1+2\widetilde{A})\mathrm{d}\eta^2 + 2\widetilde{B}_{,i}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x^i + (\delta_{ij} + h_{ij})\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right], \tag{3.2.53}$$

式中 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 都是标量度规微扰, h_{ij} 代表一个横向的无迹张量微扰. 均匀背景场的线性微扰可以写为波数为 k 的傅里叶入射波模之和 (在张量微扰的情况下, 两个极化是相互独立的), 这个波数为 k 的入射波的演化不受其他波的影响.

1. *标量度规微扰*

将度规微扰分成标量和张量部分的好处是标量和张量模型在一阶是独立演化的, 且仅标量微扰与张量场涨落是耦合的. 在空间平直规范下, 我们可以化简演化方程, 使得它在均匀标量场的线性微扰下能够与度规微扰退耦, 虽然此时它们仍然通过一个约束方程相联系.

线性化标量场微扰的场方程为

$$\delta\phi'' + 2\widetilde{h}\delta\phi' + k^2\delta\phi = 2\mathrm{e}^{2\phi}\sigma'^2\delta\phi + 2\mathrm{e}^{2\phi}\sigma'\delta\sigma', \tag{3.2.54}$$

$$\delta\sigma'' + 2\widetilde{h}\delta\sigma' + k^2\delta\sigma = -2(\sigma'\delta\phi' + \phi'\delta\sigma'), \tag{3.2.55}$$

$$\delta\beta'' + 2\widetilde{h}\delta\beta' + k^2\delta\beta = 0, \tag{3.2.56}$$

$$\widetilde{A}'' + 2\widetilde{h}\widetilde{A}' + k^2\widetilde{A} = 0. \tag{3.2.57}$$

加上约束条件

$$\widetilde{A} = -(\widetilde{B}' + 2\widetilde{h}\widetilde{B}), \tag{3.2.58}$$

$$= \frac{\phi'}{4\widetilde{h}}\delta\phi + \frac{e^{2\phi}\sigma'}{4\widetilde{h}}\delta\sigma + \frac{n\beta'}{2\widetilde{h}}\delta\beta. \tag{3.2.59}$$

注意到标量度规微扰在共形变换下不是不变的. 式 (3.2.53) 所表示线元的空间平直属性在共形变换下没有被保留, 因为根据共形因子的一阶微扰 $e^{\phi} = e^{\phi_0}(1+\delta\phi)$, 这个共形变换只是将其变回弦标架. 但是, 此张量微扰在共形变换和规范变换 $\eta \to \eta + \delta\eta$ 下都保持不变.

标量度规微扰的演化方程 (3.2.57) 与不同标量场的演化无关, 仅仅与爱因斯坦标架下的标度因子 $\widetilde{a}(\eta)$ 的演化 [式 (3.2.30)] 相关. 这也就是说它被爱因斯坦标架下关于均匀场的刚性流体方程所唯一确定, 而与时间相关的轴子场无关. 方程 (3.2.57) 可以积分, 得到

$$\widetilde{A} = \left[A_+ H_0^{(1)}(-k\eta) + A_- H_0^{(2)}(-k\eta)\right], \tag{3.2.60}$$

式中 $H_\nu^{(1)}(z) \equiv J_\nu(z) + iY_\nu(z)$, 而 $H_\nu^{(2)} \equiv J_\nu(z) - iY_\nu(z)$ 是二类的一阶汉克尔 (Hankel) 函数. 利用贝塞尔 (Bessel) 函数的循环关系, 我们从式 (3.2.58) 和式 (3.2.60) 可以得到

$$\widetilde{B} = \frac{1}{k}\left[A_+ H_1^{(1)}(-k\eta) + A_- H_1^{(2)}(-k\eta)\right]. \tag{3.2.61}$$

标量度规微扰可以用规范不变的度规势来表示

$$\widetilde{A} \equiv \widetilde{\Phi} + \widetilde{\Psi} + \left(\frac{\widetilde{\Psi}}{\widetilde{h}}\right)', \tag{3.2.62}$$

$$\widetilde{B} \equiv -\frac{\widetilde{\Psi}}{\widetilde{h}}. \tag{3.2.63}$$

注意到规范变换

$$\eta \to \eta - \frac{\widetilde{\Psi}}{\widetilde{h}} \tag{3.2.64}$$

将式 (3.2.53) 的度规变为了更常用的度规, 其中

$$d\widetilde{s}^2 \to \widetilde{a}^2(\eta)\left\{-(1+2\widetilde{\Phi})d\eta^2 + \left[(1-2\widetilde{\Psi})\delta_{ij} + h_{ij}\right]dx^i dx^j\right\}. \tag{3.2.65}$$

在相同能量密度的超曲面上的曲率微扰通常用 ζ 来表示, 其形式为

$$\zeta \equiv \widetilde{\Phi} - \frac{\widetilde{h}^2}{\widetilde{h}' - \widetilde{h}^2}\left(\widetilde{\Phi} + \widetilde{h}^{-1}\widetilde{\Phi}'\right), \tag{3.2.66}$$

对于爱因斯坦标架下标度因子, 即由式 (3.2.30) 所给出的 $\widetilde{h}$, 在任何伸缩子真空或者轴子–伸缩子宇宙中, 我们有

$$\zeta = \frac{\widetilde{A}}{3}. \tag{3.2.67}$$

ζ 是一个对于计算特别有用的量, 对于纯绝热微扰以及尺度比哈勃尺度大很多 ($|k\eta| \ll 1$) 的时候, 甚至当态方程发生了改变的情况下, ζ 都是一个常数. 在单一场暴胀模型里, 由此可以计算后期的密度微扰, 即在物质或辐射为主时期, ζ 在 $k = \widetilde{a}\widetilde{H}$ 处等同于在暴胀时期的视界交叉处. 因此, 为了预言在前大爆炸方案中所产生的密度微扰, 前面的研究已经计算了 $\widetilde{A}$ 谱和 ζ. 但是, 在前大爆炸方案里的这个情形就如同其在单模场暴胀中一样, 并不那么直接和简单, 因为在完备的低能弦有效作用量里必然会有很多种场的存在, 从而导致微扰是非绝热的. 我们必须考虑到, 在后期的密度微扰不能简单地仅与 ζ 有关, 而可能会与其他场的涨落有关. 轴子场就是这样的一个场, 我们下面将指出它可能会有一个与 ζ 很不相同的谱.

标量场微扰自身在规范变换下 $\eta \to \eta + \delta\eta$ 给出 $\delta x \to \delta x - x'\delta\eta$. 故在式 (3.2.64) 的规范变换下, 标量场微扰在 longitudinal 规范下 (δx_l) 与在平直规范下 (δx) 是相关的

$$\delta x \to \delta x_l = \delta x + x'\frac{\widetilde{\Psi}}{\widetilde{h}}. \tag{3.2.68}$$

2. 张量度规微扰

引力波微扰 h_{ij} 是规范和共形不变的. 它们与爱因斯坦标架下的标量微扰退耦后, 给出一个简单的傅里叶模演化方程

$$h_k'' + 2\widetilde{h}h_k' + k^2 h_k = 0. \tag{3.2.69}$$

在长波极限 ($|k\eta| \to 0$) 的生长模 (growing mode) 为 $h_k \sim \ln|k\eta|$ (这里没有考虑引力波在 n 个内部维上的传播). 相应的谱只与爱因斯坦标架下的标度因子的动力学方程 (3.2.30) 相关, 与时间相关的模或轴子场无关. 这导致原始引力波谱在小尺度范围内快速增长, 谱指数为 $n_T = 3$. 根据低阶有效弦作用量, 引力波谱对前大爆炸演化类型的预言已经讨论得比较多, 下面我们更详细地讨论与标量微扰相对应的谱.

3.2.5 前大爆炸谱

均匀的伸缩子、轴子和标度因子在不同标架下的相关结果会影响早期宇宙的行为. 标准大爆炸模型成功之处就在于提出了一个至少到核合成时期应该接近于传统广义相对论的演化. 如果我们能观测到任何早期演化的遗迹, 它将会是我们现在

能观测到的在大尺度范围内的原始非均匀谱. 如此的大范围结构只能由非传统物理来生成, 如暴胀、拓扑缺陷或者前大爆炸时期. 在加速膨胀的时期, 哈勃半径 $|a/a'|$ 会减少, 而起始于平直时空的真空态涨落可能会延伸到指数级的大尺度范围. 谱的精确形式依赖于均匀背景的膨胀和场之间的耦合关系.

我们已经看到, 当 $\eta < 0$ 时, 哈勃长度确实在爱因斯坦标架下的压缩相位中减小了. 由于伸缩子、模场和引力在这个度规下是最小耦合的, 它确保了在这个时期, 小尺度的真空涨落将最终超越哈勃长度.

在大爆炸方案中产生的标量和张量微扰已经有许多作者研究过了. 轴子场在这些结果中可看成一个常数. 但是, 当一个恒定的轴子场作为描述经典场背景的时候就不能忽略这个场的量子涨落. 下面我们首先考虑在前大爆炸类型演化中的轴子产生问题, 然后讨论在更一般情况下 $(\sigma' \neq 0)$ 的微扰谱. 还要讨论这些一阶宇宙真空态在 S-对偶变换下的行为.

首先, 让我们考虑当背景轴子场为常数 $(\sigma' = 0)$ 时所生成的微扰谱. 均匀背景场的演化在式 (3.2.8)~(3.2.10) 中已经给出, 伸缩子和模场作为在爱因斯坦标架下的无质量最小耦合场演化. 尤其是伸缩子微扰会从轴子微扰中退耦, 空间平直规范下的运动方程 (3.2.54)~(3.2.56) 变为

$$\delta\phi'' + 2\widetilde{h}\delta\phi' + k^2\delta\phi = 0, \tag{3.2.70}$$

$$\delta\sigma'' + 2\widetilde{h}\delta\sigma' + k^2\delta\sigma = -2\phi'\delta\sigma', \tag{3.2.71}$$

$$\delta\beta'' + 2\widetilde{h}\delta\beta' + k^2\delta\beta = 0, \tag{3.2.72}$$

加上已有的约束方程 (3.2.58)

$$\widetilde{A} = \frac{\phi'}{4\widetilde{h}}\delta\phi + \frac{n\beta'}{2\widetilde{h}}\delta\beta. \tag{3.2.73}$$

1. 伸缩子和模微扰

从方程 (3.2.73) 可以看到, 对于一阶项, 度规微扰 $\widetilde{A}$ 是由伸缩子和模场微扰所唯一确定的. 正则归一的场微扰为

$$u \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\kappa}\widetilde{a}\delta\phi, \tag{3.2.74}$$

$$w \equiv \frac{\sqrt{n}}{\kappa}\widetilde{a}\delta\beta. \tag{3.2.75}$$

由方程 (3.2.70) 和 (3.2.72) 可知, 所满足的波方程为

$$u'' + \left(k^2 - \frac{\widetilde{a}''}{\widetilde{a}}\right)u = 0, \tag{3.2.76}$$

$$w'' + \left(k^2 - \frac{\widetilde{a}''}{\widetilde{a}}\right) w = 0. \tag{3.2.77}$$

代入由方程 (3.2.30) 给出的爱因斯坦标架下的标度因子, 这些方程可给出更一般的结果

$$u = |k\eta|^{1/2}\left[u_+ H_0^{(1)}(|k\eta|) + u_- H_0^{(2)}(|k\eta|)\right], \tag{3.2.78}$$

$$w = |k\eta|^{1/2}\left[w_+ H_0^{(1)}(|k\eta|) + w_- H_0^{(2)}(|k\eta|)\right]. \tag{3.2.79}$$

在 (+) 分支部分, 也就是当 $\eta < 0$, 我们可以在更早期归一化态模, 当 $\eta \to -\infty$ 时, 其中所有的模矢都是在哈勃尺度以内 $k \gg |\eta|^{-1}$, 并且还假设它处在平直时空的真空下. 正如在传统暴胀里, 在远离视界处 $k \ll |\eta|^{-1}$ 的后期 $\eta \to 0$, 这会产生对标度的微扰.

相反地, 在早期 $\eta \to 0$, 对于 (−) 分支, $\eta > 0$ 的结果是跟初始远离视界 $k \ll |\eta|^{-1}$ 的态相关的. 暴胀的一个周期或者前大爆炸 (+) 分支的作用就是建立在这个相应的初始态上, 而这个初始态是作为一个在传统大爆炸模型里 (非暴胀) 的初始条件. 考虑到平直时空下的真空态正频部分, 对于前大爆炸 (+) 分支, 当 $k\eta \to -\infty$ 时有

$$u \to \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta}}{\sqrt{2k}}, \tag{3.2.80}$$

对 w 进行化简得到

$$u_+ = w_+ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}, \quad u_- = w_- = 0. \tag{3.2.81}$$

微扰功率谱通常表示为

$$\mathcal{P}_{\delta x} \equiv \frac{k^3}{2\pi^2}|\delta x|^2. \tag{3.2.82}$$

因此, 对于远离视界 ($k\eta \to 0$) 的态模, 我们有

$$\mathcal{P}_{\delta\phi} \to \frac{4}{\pi^3}\kappa^2\widetilde{H}^2(-k\eta)^3[\ln(-k\eta)]^2, \tag{3.2.83}$$

$$\mathcal{P}_{\delta\beta} \to \frac{2}{n\pi^3}\kappa^2\widetilde{H}^2(-k\eta)^3[\ln(-k\eta)]^2, \tag{3.2.84}$$

式中 $\widetilde{H} \equiv \widetilde{a}'/\widetilde{a}^2$ 是爱因斯坦标架下的哈勃比, n 是紧致化维数. 微扰的强度将朝着小尺度方向变化, 但是对于外视界态模 ($|k\eta| < 1$), 当 $\kappa^2\widetilde{H}^2 \sim 1$, 即爱因斯坦标架下的普朗克尺度, 微扰的强度将变大. 微扰谱的倾斜为

$$n_x - 1 \equiv \frac{\mathrm{d}\ln\mathcal{P}_{\delta x}}{\mathrm{d}\ln k}. \tag{3.2.85}$$

可以从式 (3.2.83) 和式 (3.2.84) 得到 $n_\phi = n_\beta = 4$ (这里我们忽略了对数相关部分).

下面计算标量度规微扰的强度用来检查线性微扰解释的正确性. 归一化度规微扰谱强度 [式 (3.2.60) 的 $\widetilde{A}$] 要用到约束方程 (3.2.59), 再利用背景场式 (3.2.9) 和 (3.2.10) 以及微扰公式 (3.2.83) 和 (3.2.84), 我们得到

$$\mathcal{P}_{\widetilde{A}} = \frac{3}{\pi^3}\kappa^2 \widetilde{H}^2(-k\eta)^3[\ln(-k\eta)]^2. \tag{3.2.86}$$

[由于引入了随机变量, 式中的 3 来源于 $r_{\pm}^2 + 2ns^2 = 3$.] 注意到这个标量度规微扰谱整体上来说与积分常数无关, 其参数化结果见式 (3.2.9)~(3.2.10). 相应的标量谱, 正如张量微扰谱对任何前大爆炸方案 (其中的宇宙在爱因斯坦表述下是塌缩的) 所预言的一样, 以均匀标量场为主导.

正如场微扰, 标量度规微扰有一个剧烈的蓝谱, $n_{\widetilde{A}} = 4$, 只有在普朗克尺度附近 $\kappa^2\widetilde{H}^2 \sim 1$, 在超视界尺度 $|k\eta| < 1$ 会变大. 再注意到一个 Bardeen 规范不变性微扰 $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\Psi}$ 的定义式 (3.2.62) 和 (3.2.63) 中, 此微扰在更早期将会变大, 但事实上在我们所选择的规范里这个微扰保持为小量, 这同时也表明我们的线性计算一直到普朗克时期都是有效的.

不幸的是, 如果后大爆炸时期起始于接近普朗克尺度, 就会留下一个剧烈倾斜的度规微扰谱, 使得现有宇宙的大尺度下 (超星系), 存在一些有效的非原始的度规微扰. 当在标准的后大爆炸模型中 $T \sim 10^{32}$K, 度规微扰涨落与普朗克尺度 (10^{-33}cm) 是同阶的. 这对应着一个现今的同步尺度为 0.1cm(当 $T = 2.7$K), 大约为微波背景中所探测到涨落尺度的 10^{-29} 倍. 故微波背景温度各向异性应该为 10^{-87} 量级而不是可观测的 10^{-5} 量级. 轴子场的存在能够提供一个可变的微扰谱, 它更适合作为大尺度结构的来源.

2. 轴子微扰

伸缩子和模场作为在爱因斯坦标架下无质量最小耦合场演化, 轴子场则作为一个在轴子标架下的无质量的最小耦合场而演化, 所以正则归一的场微扰为

$$v \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\kappa}\bar{a}\delta\sigma. \tag{3.2.87}$$

下面我们讨论在前大爆炸方案里的轴子谱, 其中背景轴子场为恒量. 由于密度微扰在轴子微扰中是二阶的, 因此我们可以忽略度规的反作用. 当 $\sigma' = 0$ [式 (3.2.68)] 时, 场微扰 $\delta\sigma$ 是规范不变的, 并且在任意的规范下, 轴子微扰遵循退耦的波方程 (3.2.71), 还可以改写成 v 的形式

$$v'' + \left(k^2 - \frac{\bar{a}''}{\bar{a}}\right)v = 0. \tag{3.2.88}$$

鉴于伸缩子和模场作为爱因斯坦标架下无质量最小耦合场演化, 而轴子是在轴子标架下最小耦合的, 由式 (3.2.32) 给出的演化是非常不同的. 事实上, 将式 (3.2.32) 代

入式 (3.2.88), 我们有

$$v = |k\eta|^{1/2}\left[v_+ H_r^{(1)}(|k\eta|) + v_- H_r^{(2)}(|k\eta|)\right], \tag{3.2.89}$$

其中利用了 $r \equiv |r_\pm|$. 对它进行归一化, 当 $(+)$ 分支 $-k\eta \to \infty$ 时, 利用早期的平直时空真空态, 像在式 (3.2.80) 中一样, 可以得到

$$v_+ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}, \quad v_- = 0. \tag{3.2.90}$$

于是

$$\delta\sigma = \kappa\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\pi/4}\frac{\sqrt{-k\eta}}{\bar{a}}H_r^{(1)}(-k\eta). \tag{3.2.91}$$

在后期, 当 $-k\eta \to 0$ 时, 我们发现①

$$\mathcal{P}_{\delta\sigma} = 2\kappa^2\left(\frac{C(r)}{2\pi}\right)^2\frac{k^2}{\bar{a}^2}(-k\eta)^{1-2r}, \tag{3.2.92}$$

其中数值系数为

$$C(r) \equiv \frac{2^r\Gamma(r)}{2^{3/2}\Gamma(3/2)}, \tag{3.2.93}$$

在 $r = 3/2$ 为 1. 当场模穿越到视界面外时, 轴子的功率谱可以写成场微扰的形式

$$\mathcal{P}_{\delta\sigma_c} = 2\kappa^2\left[\frac{C(r)}{r_\pm + (1/2)}\right]^2\left(\frac{\bar{H}_c}{2\pi}\right)^2, \tag{3.2.94}$$

当 $|k\eta| = 1$ 时, $\bar{H}_c$ 是哈勃比率. 这是在幂律暴胀时的无质量的功率谱, 由此可以得到著名的结果 $\mathcal{P}_{\delta\sigma}/2\kappa^2 = (\bar{H}_c/2\pi)^2$, 其中 $r_- \to -3/2$. 此外, 在轴子标架下的膨胀将变成指数膨胀. 谱指数

$$n_\sigma = 4 - 2r = 4 - 2\sqrt{3 - 2ns^2} \tag{3.2.95}$$

依赖于 $r = |r_\pm|$ 的值. 当 $r \to 3/2$ 时, 相应的谱变成了经典的尺度不变的 Harrison-Zel'dovich 谱. 谱倾斜可能的最低值 n_σ 是 $4 - 2\sqrt{3} \approx 0.54$, 此值可以通过稳定的紧致化和取定模场的 β 而得到. 内部维的演化越迅速, 轴子谱结果的变化就越剧烈, 直到 $2ns^2 = 3$, $r = 0$, 我们才有 $n_\sigma = 4$, 类似于伸缩子和模谱. 注意到在轴子标架下, 负倾斜谱的条件与传统幂律暴胀的要求是一致的, 不是单极暴胀.

当背景轴子场是恒定的, 这些微扰不像伸缩子和模的微扰, 它没有影响到标量度规微扰 (也就是说它们是标准的曲率微扰). 如果轴子场影响了后期的能量密度 (如通过轴子场获得质量), 则密度微扰谱不需要一个像伸缩子微扰类似的剧烈倾斜的蓝谱, 可能有一个几乎是尺度不变的谱导致大尺度结构的形成.

① 当 $2ns^2 = 3$ 和 $r = 0$ 时, 伸缩子保持为常数, 轴子标架和爱因斯坦标架是一致的. 因此轴子谱的行为就像对于伸缩子和模场一样, 在此情况下的后期演化与 $-k\eta$ 成对数关系, 见式 (3.2.83) 和 (3.2.84).

3.2.6 一般的轴子 – 伸缩子宇宙中的微扰谱

如果背景均匀的轴子场是与时间有关的, 就必须考虑伸缩子和轴子场的相互作用以及影响度规的一阶项.

我们已经看到, 对于标量和张量微扰式 [式 (3.2.57) 和 (3.2.69)] 在空间平直规范下的演化方程与不同标量场的演化是无关的, 仅仅由爱因斯坦标度因子的演化 (3.2.30) 所决定. 由于模场的微扰保持从伸缩子和轴子场退耦, 它们的演化方程 (3.2.72) 也不受影响. 因此, 标量和张量度规微扰谱的倾斜和模场谱 (3.2.84) 在前大爆炸方案里是一样的.

我们可以通过 S 对偶变换来理解它. 这个 S 对偶变换能把一般的轴子–伸缩子结果和伸缩子真空结果联系起来. 这些变换保持了爱因斯坦标架度规和模场的不变性, 因此不但是这些均匀场本身, 还包括它们相应的微扰在 S 对偶宇宙中都是一样的. 但是伸缩子和轴子场和它们的微扰一般会受到 S 对偶变换的影响.

当 $\sigma' \neq 0$ 时, 伸缩子和轴子微扰场方程 (3.2.54) 和 (3.2.55) 是一阶耦合, 获得相应的解析解非常困难. 但是, 为了找到伸缩子和轴子微扰的线性组合形式 (这个形式一般可以直接积分), 我们可以研究 S 对偶对称性, 它可以把通常的轴子–伸缩子宇宙和更简单的伸缩子真空宇宙联系起来.

我们定义两个新的 S 对偶不变参量

$$x \equiv \mathrm{e}^{\phi}\left(\frac{\phi'}{\widetilde{h}}\delta\sigma - \frac{\sigma'}{\widetilde{h}}\delta\phi\right), \tag{3.2.96}$$

$$y \equiv \frac{\phi'}{\widetilde{h}}\delta\phi + \frac{\mathrm{e}^{2\phi}\sigma'}{\widetilde{h}}\delta\sigma. \tag{3.2.97}$$

根据 x 和 y 的形式, 退耦微扰方程和场方程 (3.2.54) 和 (3.2.25) 变为

$$x'' + 2\widetilde{h}x' + \left[k^2 - (\phi'^2 + \mathrm{e}^{2\phi}\sigma'^2)\right]x = 0, \tag{3.2.98}$$

$$y'' + 2\widetilde{h}y' + k^2 y = 0. \tag{3.2.99}$$

粗看起来, 这些变量好像离式 (3.2.39) 给出的 S 对偶变换不变性相差很远. 为了明显, 可以写成矩阵 N 的形式 [式 (3.2.44)]

$$2\widetilde{h}x = \mathrm{tr}(-JNJN'J\delta N), \tag{3.2.100}$$

$$2\widetilde{h}y = \mathrm{tr}(JN'J\delta N). \tag{3.2.101}$$

我们可以看到, 这些变量是唯一的 S 对偶不变的关于轴子和伸缩子微扰的线性组合. 在纯伸缩子真空背景下, 当 $\sigma' \to 0$ 时, 由它们可以导出 (退耦的) 轴子和伸缩子微扰, 其中有

$$x \to \frac{\phi'}{\widetilde{h}} \mathrm{e}^{\phi} \delta\sigma = 2r_{\pm} \mathrm{e}^{\phi} \delta\sigma, \tag{3.2.102}$$

$$y \to \frac{\phi'}{\widetilde{h}} \delta\phi = 2r_{\pm} \delta\phi. \tag{3.2.103}$$

注意到 x 不但是 S 对偶不变的, 而且还是规范不变的. 这就是说我们选择何种规范来计算 $\delta\sigma$ 和 $\delta\phi$ 都是没什么关系的, 对 x 定义的组合量是一个不变量, 它正比于全同伸缩子超曲面上 $\delta\sigma|_{\phi} \equiv \delta\sigma - \sigma'(\delta\phi/\phi')$ 的轴子微扰. 由对称性可知, 它也正比于在常数轴子超曲面上的伸缩子微扰.

通过找出 S 对偶不变参数, 可以证明这些变量的演化方程 (3.2.98) 和 (3.2.99) 在 S 对偶变换下是不变的. 考虑到一般轴子–伸缩子宇宙解总是与伸缩子真空解通过 S 对偶变换联系起来, 我们发现, 任意轴子–伸缩子宇宙中 x 和 y 的演化方程与伸缩子真空中轴子和伸缩子微扰的演化方程是一样的. 正如常数轴子的情况, 我们可以定义正则归一参量

$$u \equiv \frac{1}{2r\sqrt{2}\kappa} \widetilde{a} y, \tag{3.2.104}$$

$$v \equiv \frac{1}{2r\sqrt{2}\kappa} \widetilde{a} x, \tag{3.2.105}$$

与在伸缩子真空情况下式 (3.2.74) 和 (3.2.87) 给出定义的一致. 一般地, u 的 S 对偶变换不变的运动方程满足 (3.2.76), 更一般的结果为 (3.2.78). 但是 v 的运动方程 (3.2.88) 并不满足 S 对偶变换不变性. 其相应的运动方程为

$$v'' + \left(k^2 - \frac{r^2 - 1/4}{\eta^2}\right) v = 0. \tag{3.2.106}$$

当 $\sigma' = 0$ 时, 与式 (3.2.88) 一致. v 的一般结果仍然由式 (3.2.89) 给出.

在早期的 (+) 分支中当 $\eta \to -\infty$ 时, 我们仍然可以归一化宇宙真空微扰, 因为在这个极限下由式 (3.2.17)~(3.2.20) 所给出的通常轴子–伸缩子结果接近常数轴子的 $r_+ = +r$ 结果. 因此常数 $u_{\pm}$ 和 $v_{\pm}$ 由式 (3.2.81) 和 (3.2.90) 给出. 通过选择 S 对偶变换不变的微扰, 利用纯伸缩子宇宙真空态, 便可以计算通常的轴子–伸缩子微扰谱. 我们有

$$\mathcal{P}_y \to \frac{16r^2}{\pi^3} \kappa^2 \widetilde{H}^2 (-k\eta)^3 [\ln(-k\eta)]^2. \tag{3.2.107}$$

通常的轴子微扰谱为

$$\mathcal{P}_x \to 8r^2\kappa^2 \left(\frac{C(r)}{2\pi}\right)^2 \frac{k^2}{\widetilde{a}^2} (-k\eta)^{1-2r}. \tag{3.2.108}$$

为了恢复真实的轴子和伸缩子微扰情况, 我们通过逆变换式 (3.2.96) 和 (3.2.97) 得到

$$\delta\sigma = \frac{\mathrm{e}^{-\phi}}{4r^2} \left(\frac{\phi'}{\widetilde{h}} x + \frac{\mathrm{e}^{\phi}\sigma'}{\widetilde{h}} y\right), \tag{3.2.109}$$

$$\delta\phi = \frac{1}{4r^2}\left(\frac{\phi'}{\widetilde{h}}y - \frac{\mathrm{e}^{\phi}\sigma'}{\widetilde{h}}x\right). \tag{3.2.110}$$

在后期的 (+) 分支部分, 当 $\eta \to 0$ 时, 通常的轴子–伸缩子结果通过 $r_- = -r$ 得到伸缩子真空结果, 故有 $\delta\phi \to y/2r_-$ 和 $\delta\sigma \to \mathrm{e}^{-\phi}x/2r_-$. 注意到在早期和后期的伸缩子真空结果中从 $r_+ = +r$ 到 $r_- = -r$ 会有个符号的改变, 这导致后期的纯伸缩子真空行为有一个相位移动 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

对于伸缩子和轴子微扰的最终谱, 在通常的轴子–伸缩子宇宙中 $\eta \to 0$ 时, 跟由式 (3.2.83) 和 (3.2.92) 给出的伸缩子真空情况是一致的. 谱的倾斜和强度由参量 $r = |r_\pm|$ 唯一确定, 它在不同的结果中对特定时间相关的轴子场的反映不敏感, 但却是 S 对偶相关的.

$\widetilde{A}$ 的约束方程 (3.2.59) 只包括了 y 和 $\delta\beta$

$$\widetilde{A} = \frac{1}{4}y + \frac{n\beta'}{2\widetilde{h}}\delta\beta. \tag{3.2.111}$$

从式 (3.2.107) 和 (3.2.84) 可以看到, 标量度规微扰谱没有受到与时间相关的轴子场的影响, 与恒定轴子场情况下的结果是一样的, 见式 (3.2.86).

3.2.7 讨论

弦理论的低能极限和 M 理论包括了很多不同的自由度. 在本节中我们考虑了一个非常简单的模型, 它只有一个 $D = 4$ 空间平直的 FRW 度规和一个伸缩子场, 一个无质量的单模场和一个根据 Neveu-Schwarz 反对称张量势得出的赝标量轴子场. 轴子–伸缩子结果可以利用对伸缩子真空结果进行 S 对偶变换而得到. 用一个特别简单的方法推广了幂律的伸缩子真空结果, 改写了两个渐近的伸缩子真空, 它们之间通过 S 对偶变换联系起来.

虽然通常的轴子–伸缩子结果并没有改变在弦标架和爱因斯坦标架下宇宙解的奇点属性, 但在轴子相关的共形标架下 (此时轴子最小耦合) 的宇宙演化可以是非奇异的, 只要轴子场与时间相关. 在这个标架下, 轴子观察者的世界线有一个无限的固有寿命. 这时, 将不存在从前大爆炸 (+) 分支到后大爆炸 (−) 分支的自然退出问题, 但是 (+) 或 (−) 分支自身有一个无限的固有寿命.

大爆炸时期收缩的入射哈勃长度因量子涨落生成了均匀背景场的相关微扰谱. 我们计算了在轴子场下生成的大尺度微扰谱. 轴子谱指数可以在 $0.54 \sim 4$ 的任意处, 它包括了宇宙结构形成过程中需要有的尺度几乎不变的谱 ($n \sim 1$). 这与伸缩子和模微扰 (在 $n = 4$ 有一个剧烈的蓝谱) 相比, 它们与我们现在宇宙的大尺度结构的情况不符. 真实轴子谱指数值依赖于内部维膨胀速率. 如果有稳定的紧致化, 将会得出一个有效四维时空, 谱指数为 $n = 0.54$.

在最简单情况下, 背景轴子场是恒量, 相应的轴子微扰在前大爆炸时期是标准的曲率微扰. 这些轴子微扰能否在后大爆炸宇宙中得到大尺度结构, 关键是轴子和物质 (现在的宇宙是物质为主时期) 的耦合情况. 但是, 原则上说轴子能给出一个几乎尺度不变的谱以及依赖于内部维的紧致化的谱倾斜, 这是很迷人的.

我们已经看到, S 对偶在计算通常的轴子–伸缩子宇宙经典背景结果和计算半经典微扰谱的时候都是一个强有力的工具. 通过构建一个精确的 S 对偶不变的场微扰, 我们可以在更一般的轴子–伸缩子宇宙中计算微扰谱, 就如同伸缩子真空情况一样. 需注意的是, 后期的伸缩子和轴子谱与前面的在不同经典结果之间的演化无关, 但却是 S 对偶相关的. 这个 S 对偶相关的轴子–伸缩子的结果与伸缩子真空的后期结果是一样的.

本节讨论的问题跟从大爆炸时期的自然退出相联系, 但值得注意的是前大爆炸预言有两个明显的优势. 首先, 这个微扰起源于早期的真空涨落, 期间它们的强度在过去无穷远的低曲率、弱耦合机制下是归一化的, 并且在不确定的真空态下, 这个微扰在普朗克时期并不是处在任意小的尺度下. 第二, 人们可以在大尺度下给出渐近微扰的解析表达式, 而不必调用任何在传统暴胀模型中经常使用的慢滚动近似. 这种论断不但在只有伸缩子存在情况下成立, 而且在混合了模和轴子场的情况下也成立.

3.3 dilaton 宇宙动力学方程的解

在 (临界) D 维时空中伸缩于 (dilaton) 标量场 $\Phi(x)$ 的存在是在低能极限下弦理论的推论之一. 伸缩子场和由弦理论导致的对爱因斯坦引力理论的其他低阶修正, 都在宇宙学中有重要的应用. 人们用伸缩子场来解释宇宙暴胀的机制这一至关重要的问题, 于是采用各种方法来寻求 dilaton 宇宙动力学方程的解. 在已有的工作中, 已经求出了具有 FRW 度规的 $(3+1)$ 维解, 其余的 $D-4$ 维具有某种紧致形式 (Barreiro, 1998). Tseytlin (1992) 得到了一系列对于任意维 D 的大的对称空间 (具有伸缩子、中心荷和协变反对称张量场) 的宇宙解. 本节采用 Tseytlin 的方法, 对于任意维数 D, 给出具有中心荷 λ 破缺的 D 维伸缩子宇宙动力学方程的解及其分类. 我们采用与均匀各向同性的常曲率 $(k=0,\pm1)$ 空间对应的 D 维广义 FRW 度规. 所有空间度量都是紧致的. 我们的目的是采用已知的 $D\geqslant 2$ 维的伸缩子宇宙解, 再求出一些新解 (特别是 $k=\pm1$), 以进行系统的分类.

3.3.1 宇宙模型和场方程

伸缩子引力理论的作用量可写为

$$S=\int\sqrt{|g|}\mathrm{e}^{-2\phi(x)}[R+4(\nabla\phi)^2+\lambda]\mathrm{d}^{n+1}X, \tag{3.3.1}$$

式中 $\phi(x)$ 是 $n+1$ 维 $(D=n+1)$ 伪黎曼流形上的标量场 (伸缩子场), 坐标为 x^{μ}, 度规张量为 $g_{\mu\upsilon}$, $g=\det|g_{\mu\upsilon}|$, R 是标曲率, $(\nabla\phi)^2=g^{\mu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi$.

我们采用弦坐标系, 借助于共形变换 $g_{\mu\upsilon}\to \mathrm{e}^{-r\phi}g_{\mu\upsilon}$ 可过渡到爱因期坦系, 其中 $r=4/(D-2)$.

由作用量 (3.3.1) 对引力场 $g_{\mu\upsilon}$ 求变分和对伸缩子场 Φ 求变分, 便得到演化程组

$$\begin{aligned}&R_{\mu\upsilon}-\frac{1}{2}(R+\lambda)g_{\mu\upsilon}+2\phi_{;\mu\upsilon}=g_{\mu\upsilon}[2\phi_{;\alpha}^{;\alpha}-(\nabla\phi)^2],\\&\frac{1}{4}(R+\lambda)+\phi_{;\alpha}^{;\alpha}-(\nabla\phi)^2=0.\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

这一方程组等效于

$$\begin{aligned}&R_{\mu\upsilon}+2\phi_{\mu\upsilon}=0,\\&R+(\nabla\phi)^2=0.\end{aligned}\tag{3.3.2a}$$

下面我们寻求方程组 (3.3.2) 的弗里德曼类宇宙解. 这就是说 $M_{l,n}=R\times S_k^n$, 式中 S_k^n 是用标度因子 $a\,(+)$ 表征的均匀各向同性流形. 流形 S_k^n 的形式为: n 维球 S_l^n, 伪球 S_{-1}^n 和平直空间 $S_0^n\equiv\mathbf{R}^n$. 当 $k=1$ 时因子 a 是球 S_1^n 的半径. 流形 $M_{l,n}=R\times S_k^n$ 上的度规可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\mathrm{d}t^2-a^2(t)\,[(\mathrm{d}x^1)^2+c_k^2(x^1)(\mathrm{d}x^2)^2+\cdots\\&+c_k^2(x^1)c_k^2(x^2)\cdots c_k^2(x^{n-1})(\mathrm{d}x^n)^2],\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

式中

$$c_k(x)=\begin{cases}\cos x, & k=1,\\ 1, & k=0,\\ \operatorname{ch}x, & k=-1.\end{cases}$$

将度规 (3.3.3) 和函数 $\phi=\phi(t)$ 代入方程 (3.3.2), 对于所有 k 值我们有

$$R_0^0=-\frac{n a\ddot{a}}{a^2}\quad R_1^1=R_2^2=\cdots=R_n^n=-[\ddot{a}a+(n-1)(\dot{a}^2+k)]a^{-2},$$

$$R=-n[2a\ddot{a}+(n-1)(\dot{a}^2+k)]a^{-2},\quad \dot{a}=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}.$$

这时方程组 (3.3.2) 可写为

$$-\frac{n\ddot{a}}{a}+2\ddot{\phi}=0,\tag{3.3.4}$$

$$-\ddot{a}-(n-1)(\dot{a}^2+k)a^{-1}+2\dot{a}\dot{\phi}=0,\tag{3.3.5}$$

$$n(n-1)(\dot{a}^2+k)a^{-2}+4\dot{\phi}^2-4n\dot{\phi}\dot{a}a^{-1}=\lambda. \tag{3.3.6}$$

这三个方程不是独立的, 方程 (3.3.6) 可看作 "零能量" 关系式, 因此它只导致对 $a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}$ 初始值的限制.

由方程 (3.3.5) 解出 $\dot{\phi}$, 得到

$$\dot{\phi}=\frac{1}{2}\left[\frac{\ddot{a}}{\dot{a}}+\frac{n-1}{a\dot{a}}(\dot{a}^2+k)\right], \tag{3.3.7}$$

代入方程 (3.3.6), 我们得到一个二阶方程 (相对于 $\ddot{a}$ 平方), 再代入

$$\dot{a}=q\,(a)\,, \tag{3.3.8}$$

此二阶方程化为

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}a}=\frac{q}{a}-k\frac{n-1}{aq}\pm\sqrt{n\frac{q^2}{a^2}-kn\frac{n-1}{a^2}+\lambda}. \tag{3.3.9}$$

为了将此方程以及方程组 (3.3.4)~(3.3.6) 的所有解进行分类, 我们研究某些特殊情况.

1. **平直宇宙**: $k=0$

对于所有 λ 值, 把方程 (3.3.9) 和 (3.3.8) 积分, 得到标度因子演化的表达式

$$a(t)=\begin{cases} a_0\left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\tau\right)\right]^{\pm\frac{1}{\sqrt{n}}}, & \lambda>0,\\ a_0\tau^{\pm\frac{1}{\sqrt{n}}}, & \lambda=0,\\ a_0\left[\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\tau\right)\right]^{\pm\frac{1}{\sqrt{n}}}, & \lambda<0,\end{cases} \tag{3.3.10}$$

式中 a_0 是方程 (3.3.9) 中的积分常数, τ 为时间参量

$$\tau=\pm(t-t_0),\quad \tau\geqslant 0. \tag{3.3.11}$$

引入这一时间参量是为了表述方程 (3.3.4)~(3.3.6) 的所有解. t_0 是方程 (3.3.8) 中的积分常数. 这些解的性质由方程 (3.3.4)~(3.3.6) 的对称性得到. 式 (3.3.11) 和 (3.3.10) 中的 $\pm$ 号是相互独立的.

由关系式 (3.3.7) 得到与式 (3.3.10) 对应的场 $\phi(t)$ 的表达式

$$\mathrm{e}^{2\phi-2\phi_0}=\begin{cases}\left[\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\tau\right)\right]^{-1\pm\sqrt{n}}\left[\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\tau\right)\right]^{-1\mp\sqrt{n}}, & \lambda>0,\\ \tau^{-1\pm\sqrt{n}}, & \lambda=0,\\ \left[\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\tau\right)\right]^{-1\pm\sqrt{n}}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\tau\right)\right]^{-1\mp\sqrt{n}}, & \lambda<0.\end{cases} \tag{3.3.12}$$

式 (3.3.10) 和 (3.3.12) 不仅是方程 (3.3.5) 和 (3.3.6) 的严格解, 也是方程 (3.3.4) 的严格解. 这一结果具有和方程 (3.3.6) 相联系的更普通的性质：方程 (3.3.9) 的所有解, 对于任何 k,λ 都满足方程 (3.3.4).

解簇 (3.3.10) 和 (3.3.12) 还必须补上线性伸缩子解

$$a=\text{const},\quad \phi=\phi_0+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}t,\quad \lambda\geqslant 0,k=0. \tag{3.3.13}$$

它是用 $\dot{a}$ 除方程 (3.3.7) 时丢掉的.

我们发现, 解方程 (3.3.10) 和 (3.3.12) 的几何图像以及这些解的分支结构对于所有 $n\geqslant 0$ 都是类似的. 在 $n\geqslant 0$ 的情况下对于所有的 n 我们有两个不同分支 [若考虑式 (3.3.11) 中只差 ± 号的两个解则有 4 个分支]. 当 $\lambda<0$ 时, 由于式 (3.3.11) 的对称性, 其解只有一个分支.

方程 (3.3.10) 和 (3.3.12) 中的符号 "+" 对应于膨胀 (随着 τ 增大), 平直伸缩子宇宙由奇点 $\tau=0$ 开始膨胀, (随着 ϕ 由 $-\infty$ 开始增大), 相反的符号描述没有奇点 $a=0$ 的演化. 但当 $\tau\to 0$ 时有 $a\to\infty,\phi\to+\infty,\lambda=0$ 总是对应于 a 和 ϕ 的幂律演化. $\lambda>0$ 导致上述膨胀的减慢和宇宙标度因子趋于常数：当 $\tau\to\infty$ 时 $a\to a_0=\text{const}$. 在 $\lambda<0$ 的情况下演化加速, 这一过程在一段有限长的时间内结束.

上面表述的在 dilaton 宇宙中 λ 项的作用, 在某种意义上与通常在 $n+1$ 维弗里德曼宇宙中的相反. 在后一情况下宇宙物质是尘埃形式的[①], 爱因斯坦引力拉格朗日为 $\sqrt{|g|}(R+2\lambda)$, 其平直宇宙 $(k=0)$ 的演化规律为

$$a=\text{const}\begin{cases}\left[\sqrt{\dfrac{n\lambda}{2(n-1)}}\tau\right]^{\frac{2}{n}}, & \lambda>0,\\ \tau^{\frac{2}{n}}, & \lambda=0,\\ \left[\sin\left(\sqrt{\dfrac{-n\lambda}{2(n-1)}}\tau\right)\right]^{\frac{2}{n}}, & \lambda<0.\end{cases}$$

这里 $\lambda>0$ 对应于加速膨胀.

我们发现, 对于二维伸缩子模型 $(n-1)$, 所有的宇宙解都包含在式 (3.3.10)~(3.3.13) 中. 实际上, 一维空间曲率为零, 因此当 $n=1$ 时式 (3.3.5) 和 (3.3.6) 中不出现 k. 在这种情况下, (1+1) 维解 (3.3.10) 和 (3.3.12) 与 $2D$-弦理论中的 "黑洞" 类解相符合 (在解析延拓 $\tau\to\mathrm{i}\tau,\lambda\to-\lambda$ 之后它们具有欧几里得形式).

2. 具有曲率 $k=\pm 1,\lambda=0$ 的空间

把方程 (3.3.9) 积分, 我们可以得到方程组 (3.3.4)~(3.3.6) 对于所有 k 值的解.

① 在作用量 (3.3.1) 中只有 "外来" (伸缩子和 λ 项) 形式的物质.

前面已经提到, 这些解也满足方程 (3.3.4). 但是更方便的是求解方程组 (3.3.4)~(3.3.6), 消去 a, 求出 $\lambda = 0$ 时不同类型的解. 为此, 我们取这些方程的线性组合, 系数分别是 $-1, \frac{n}{a}$ 和 1, 得到

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{n}\left(2\dot{\phi} - \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\right). \tag{3.3.14}$$

积分式 (3.3.14) ($\lambda = 0$), 得到

$$a^n = \frac{C\mathrm{e}^{2\phi}}{\dot{\phi}}, \tag{3.3.15}$$

式中 C 是常数.

在采用式 (3.3.14) 和 (3.3.15) 之前, 让我们研究 $\dot{\phi} = 0$ 是方程组 (3.3.4)~(3.3.6) 的所有解. 对于任意值 k, λ 和 $n > 1$, 我们只有两个这类的解: 平凡解 (3.3.13) (当 $a = a_0, \phi = \phi_0, k = 0, \lambda = 0$) 和线性增长的 a

$$a = a_0 + t, \quad \phi = \phi_0, \quad k = -1, \quad \lambda = 0. \tag{3.3.16}$$

将表达式 (3.3.14) 或 (3.3.15) 代入方程 (3.3.4), 我们得到下面的微分方程:

$$n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = \left(2\dot{\phi} - \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\right)^2. \tag{3.3.17}$$

引入表达式

$$p = \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2}$$

并积分方程 (3.3.17), 得到

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{Q}\left|p + \frac{2}{\sqrt{n}-1}\right|^{\frac{-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}-1)}}\left|p - \frac{2}{\sqrt{n}+1}\right|^{\frac{-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}+1)}}, \tag{3.3.18}$$

式中 Q 是积分常数. 在数轴 $-\infty < p < +\infty$ 上取两个特殊点

$$p_1 = -\frac{2}{\sqrt{n}-1}, \quad p_2 = \frac{2}{\sqrt{n}+1}, \tag{3.3.19}$$

把数轴分成三部分, 在不同的部分 Q 值可以不同.

考虑到 $p\mathrm{d}t = -\mathrm{d}(\dot{\phi})^{-1}$, 我们得到

$$\mathrm{d}t = -\frac{Qn}{n-1}\left|p - p_1\right|^{\frac{2-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}-1)}}\left|p - p_2\right|^{\frac{2-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}+1)}}\,\mathrm{sign}(p - p_1)\mathrm{sign}(p - p_2)\mathrm{d}p. \tag{3.3.20}$$

在数轴任何一段 $(-\infty, p_1), (p_1, p_2), (p_2, +\infty)$ 上, 都可以把 t 用 p 表示出来.

借助于方程 (3.3.15), (3.3.18) 和 (3.3.20), 我们可以用 p 把 ϕ 和 a 表示出来:

$$a(p) = C_a \left|p - p_1\right|^{\frac{1}{2(\sqrt{n}-1)}} \left|p - p_2\right|^{\frac{-1}{2(\sqrt{n}+1)}}, \tag{3.3.21}$$

$$\phi(p) = \phi_0 + \frac{\sqrt{n}}{4} \ln\left|\frac{p - p_1}{p - p_2}\right|. \tag{3.3.22}$$

式 (3.3.21) 和 (3.3.22) 中的常数 C_a, ϕ_0 和式 (3.3.15) 中的常数 C 之间有关系式

$$C_a = \left|CQ\mathrm{e}^{2\phi_0}\right|^{\frac{1}{n}}.$$

式 (3.3.20)~(3.3.22) 是方程组 (3.3.4)~(3.3.6) 的解, 只要求满足条件

$$\left(\frac{nQ}{C_A}\right) = -k\mathrm{sign}(p - p_1)\mathrm{sign}(p - p_2). \tag{3.3.23}$$

由此得到, 解 (3.3.20)~(3.3.22) 成立, 在 $k = 1$ 的情况下只要 $p \in (p_1, p_2)$; 在 $k = -1$ 的情况下只要 $p \in (-\infty, p_1) \bigcup (p_2, +\infty)$. 所以在 $k = 1, \lambda = 0$ 的情况下只存在一个解支, 如图 3-9 (实线). 虚线分别表示 $n = 2$ 和 $n = 9$ 时的函数关系 $\phi = \phi(t)$ $(\phi_0 = 3)$.

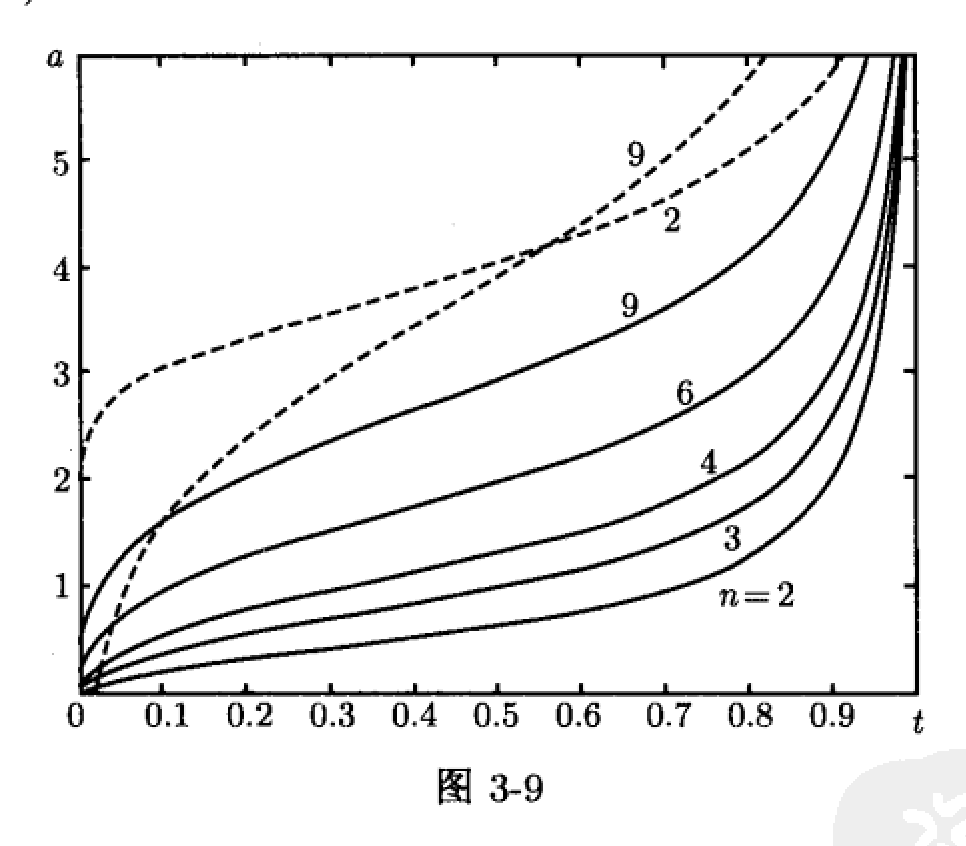


图 3-9

对于任意 n, 这些解都描述膨胀宇宙 (a 从 0 到 $+\infty$ 增长, 对应的 ϕ 由 $-\infty$ 到 $+\infty$, 这时 p 值由 p_1 到 p_2), 在有限长时间内

$$T = Qn\left(\frac{4\sqrt{n}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}\right)\Gamma\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{n-1}\right)}, \tag{3.3.24}$$

式中 $\Gamma(x)$ 是欧拉函数. 在图 3-9 中, $a = a(t)$ 和 $\phi = \phi(t)$ 对于不同的 n 只有一个参量 T 的值 $T = 1$. 我们指出, 解 (3.3.20) 和 (3.3.21) 对于任意确定的 $n > 2$ 和

$k = \pm 1$ 构成二参量的解簇：第一个参量 t_0 [在式 (3.3.11) 中] 是平凡的 (t 轴移动)；第二个参量可以取 C_a, Q 或者 T [它们之间由方程 (3.3.23) 和 (3.3.24) 相联系]；第三个参量 ϕ_0 在式 (3.3.22) 中出现.

在 $k = -1, \lambda = 0$ 的情况下我们有式 (3.3.20)~(3.3.22) 的两个解支, 其依赖关系 $a = a(t)$ 描绘在图 3-10 中. 第一个解支 a 和 ϕ 单调增大：$0 < a < +\infty, -\infty < \phi < \phi_0, p < p_1$ [图 3.10 (a)]. 第二个解支在 $p > p_2$, 表明 a 没有奇点 $a = 0$ 的演化；量 a 由 $+\infty$ 减至最小值 $a_{\min} = C_a \left[|\sqrt{n}p_1|^{p_1} (\sqrt{n}p_1)^{p_2}\right]^{-\frac{1}{4}}$, 然后增大至 $+\infty$, 同时 ϕ 单调减小, 由 $+\infty$ 减至 ϕ_0 [图 3-10 (b)]. 在两种情况下, 当 $\tau \to \infty$ 时具有形式 $\phi \to \phi_0 = \text{const}, a \to \text{const} + \tau$, 即对于 $k = -1$ 所有解 (3.3.20) 和 (3.3.21) 的极限趋近于线性演化 (3.3.16).

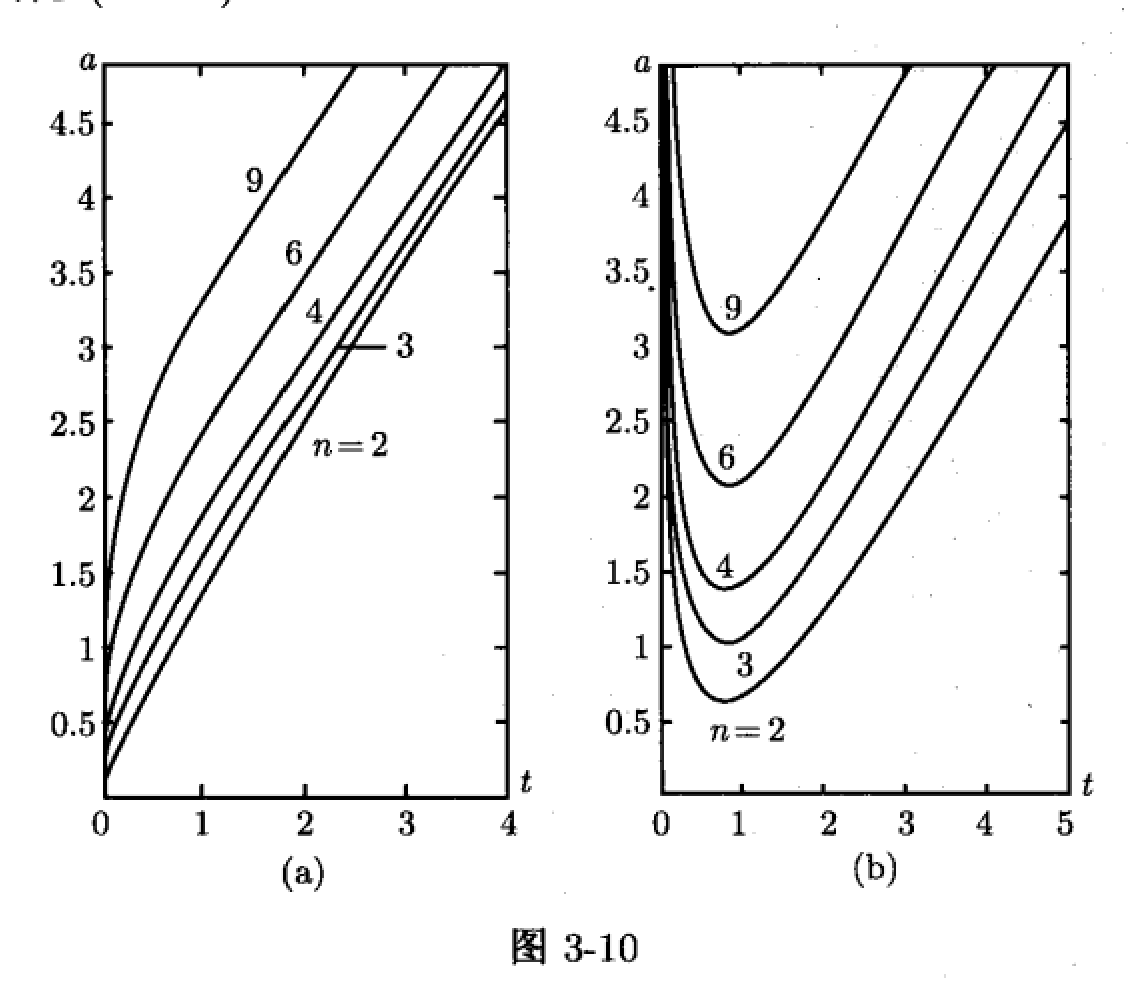


图 3-10

在相反的 (奇点的) 极限情况下 $p \to p_1$ 或者 $p \to p_2$, 当 $k = \pm 1$, 对于所有的解支, 我们得到渐近关系式

$$a \approx \text{const} \cdot \tau^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad e^{2\phi} \approx \text{const} \cdot \tau^{-1+\sqrt{n}}, \quad \tau \to +0, \tag{3.3.25}$$

$$a \approx \text{const} \cdot \tau - \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad e^{2\phi} \approx \text{const} \cdot \tau^{-1-\sqrt{n}}, \quad \tau \to +0, \tag{3.3.26}$$

表达式 (3.3.25) 对应于 $p \to p_1$ 和 $a \to 0$, 表述于图 3-9 ($k = 1$) 和图 3-10 (a) ($k = -1$). 渐近式 (3.3.26) 表述于图 3-10 (b) 和图 3-9 ($t \to T$).

我们看到, 解 (3.3.20)~(3.3.22)($k=\pm 1, \lambda=0$) 的渐近行为和式 (3.3.10)~(3.3.12) ($k = 0$) 的渐近行为是完全相同的, 这使我们可以确定与式 (3.3.25) 和 (3.3.26) 对应的两个解支的对应关系.

仅当 $n=4(D=5)$ 时, 才存在显式的解 (3.3.20)~(3.3.22)

$$a(t)=\left|\frac{\tau^3-T^3}{\tau}\right|^{\frac{1}{2}},\quad \phi(t)=\phi_0+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tau^3-T^3}{\tau^3}\right|, \tag{3.3.27}$$

式中

$$T=\frac{8Q}{\sqrt[3]{3}},$$

与式 (3.3.24) 相对应, τ 与式 (3.3.11) 中的不同, 可以是负的

$$\tau=\pm(t-t_0).$$

表达式 (3.3.27) 具有更简单的形式, 也还具有前面研究过的解 (3.3.20)~(3.3.22) 的图中性质. 在这一表达式中这样选择常数 t_0: 当不断地将 p 轴向 τ 轴映射时, 使点 $\tau=0$ 是点 $p=p_2=\dfrac{2}{3}$ 的像, 点 $\tau=T$ 是点 $p=p_1=-2$ 的像. 因此, 点 $\tau=0$ 和 $\tau=T$ 把 τ 轴分为三部分, 且区间 $0<\tau<T$ 对应与 $k=1$.

3. 具有 $k=\pm1,\lambda\neq0$ 的空间

在这种情况下, 我们解方程组 (3.3.8) 和 (3.3.9), 求出演化表达式 $a(t)$ 和 $\phi(t)$, 方程组 (3.3.8) 和 (3.3.9) 可改写为

$$\dot{a}=q,\quad \dot{q}=a^{-1}[q^2-k(n-1)\pm q\sqrt{n[q^2-k(n-1)+\lambda a^2}]. \tag{3.3.28}$$

在这一节中, 为了研究这一方程组的解, 我们有时会采用数值分析, 因为只在特殊情况下才存在明显的解析解. 例如, 对于 $D=5$, 且 $\lambda>0$, 我们得到具有幂律演化的严格解

$$\begin{aligned}&a=a_0\sqrt{\tau},\quad \mathrm{e}^{2\phi-2\varphi_0}=\tau\mathrm{e}^{k\sqrt{\lambda}\tau},\\&a_0=\sqrt[4]{\frac{36}{\lambda}},\quad n=4,k=\pm1,\lambda>0.\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

对于 n 取其他值的情况也有类似于式 (3.3.29) 的解, 只是当 $\tau\to\infty$ 时渐近式为

$$\begin{aligned}&a\approx a_0\sqrt{\tau},\quad \mathrm{e}^{2\phi-2\varphi_0}\approx\tau^{\frac{n-2}{n}}\mathrm{e}^{k\sqrt{\lambda}\tau},\\&a_0^2=\frac{2(n-1)}{\sqrt{n}},\quad \lambda>0.\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

在相反的极限情况下 $\tau\to0$, 当 $k=\pm1$ 时, 这些解具有渐近式 (3.3.25), 当 $k=-1$ 时有渐近式 (3.3.26)(当 $k=-1$ 时上述两种不同渐近之间边界的膨胀对应于所有的 λ 都是 $a\approx\tau$).

下面我们将指出, 这里给出的解 (3.3.29) 和 (3.3.30) 在 $k=1$ 的情况下, $\tau\to\infty$ 时的渐近行为与所有其他的解有本质的区别. 在 $k=-1$ 的情况下相反, $\tau\to\infty$ 时所有的解都有渐近式 (3.3.30).

分析方程组 (3.3.28) 的解可以发现, 在相平面上存在 aq 区域

$$nq^2+\lambda a^2-kn(n-1)<0, \tag{3.3.31}$$

在这一区域上式 (3.3.28) 或式 (3.3.9) 中根号下面的值为负的, 因此, 方程组 (3.3.28) 的积分曲线在相空间中不能进入区域 (3.3.31) 和穿过其边界 —— 二阶曲线.

当 $k=1$ 时, λ 取任意确定值, 式 (3.3.28) 的积分曲线簇中每一条在相平面 aq 上都切于上述区域 (3.3.31) 的边界, 就是说, 该边界 ($\lambda>0$ 时是椭圆, $\lambda<0$ 时是双曲线) 是环绕曲线簇. 在切点 (坐标视为 a_0,q_0), 对于每个解, 式 (3.3.28) 中根号前的符号都由 "−" 变为 "+". 因此, 在 $k=1$ 的情况下, 每一条积分曲线由两段构成, 这两段具有上述两个不同的符号, 在点 (a_0,q_0) 相连接.

图 3-11 给出了所研究的解簇在 $k=1$ 的情况下的相平面 $+a$ 上的图像. 图 3-11 (a) 对应于 $n=3$ 和不同 λ 值, 图 3-11 (b) 对应于 $n=4,\lambda=1$. 选择式 (3.3.11) 中的参量 t_0, 使当 $t=0$ 时 $a=0$. 在这些条件下, 图 3-11 (b) 中的曲线构成单参量簇. 当 $q_0\geqslant 0$ 时, 我们用 a_0 的值为曲线编号; 当 $q_0<0$, 用 a 的最大值编号 (图 3-11 中的曲线 4 和 5).

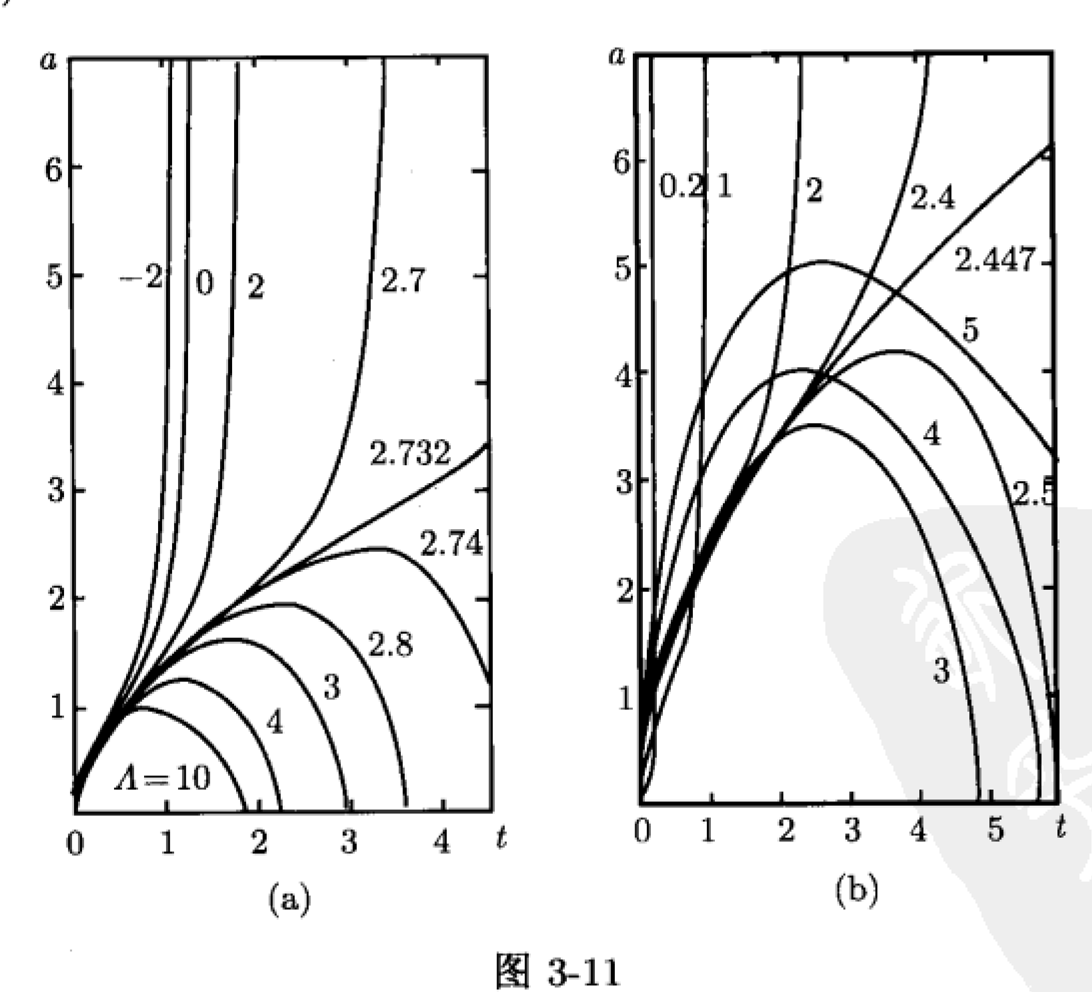


图 3-11

在图 3-11 中, 对于情况 $n=3$ 给出了积分曲线 $a=a(t)$, 对应于相同的 $a_0=1$ (对于曲线 10, a 取最大值 $a=1$) 和不同的 λ 值. 我们看到, $\lambda<0$ 对应于加速膨胀.

当 $\lambda < \lambda_{cr}$ (临界值 λ_{cr} 是负的, 依赖于 a_0) 时, 膨胀具有可逆的性质, 在有限时间 $T = T(a_0\lambda)$ 内, 量 a (以及 ϕ) 增至 ∞ 而且当 $t \to T$ 时, $a(t)$ 的渐近行为具有形式

$$a \approx \cos t \cdot (T-t)^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad e^{2\phi} \approx \cos t \cdot (T-t)^{-1-\sqrt{n}}, \quad t \to T. \tag{3.3.32}$$

如果 $\lambda = \lambda_{cr}(a_0)$, 则随时间的膨胀不再是有限的, 当 $t \to \infty$ 时, 具有幂律渐近式 (3.3.30). 在图 3-11 (a) 中, 当 $n = 3, a_0 = 1$ 时, 临界值 λ_{cr} 稍微超过 2.732. 当 $\lambda > \lambda_{cr}$ 时, 演化的性质发生改变 —— 从某一时刻开始, 膨胀变为收缩, 并在有限时间 $T(a_0, \lambda)$ 内缩至 $a = 0$. 在这段时间内 $\phi(t)$ 由 $-\infty$ 开始增大到最大值, 然后减小到 $-\infty$. 当 $t \to T$ 时渐近行为具有式 (3.3.25) 的形式. 图 3-11 (b) 表明, 当 λ 值确定 ($\lambda > 0$) 时, 临界 (或过渡) 的幂律解 [当 $n = 4$ 时具有式 (3.3.29) 的形式] 可以借助于参量 a_0 的选择得到. 距临界值有小的偏离时, 演化将按照上述具有有限时间 T 的两类规律中的一类进行.

在 $k = -1, \lambda < 0$ 的情况下, 每一条积分曲线在相平面 aq 上都与区域 (3.3.31) 的边界相切. 在切点 (a_0, q_0) 处, 式 (3.3.28) 改变符号, 与 $k = 1$ 的情况相似. 当 $n = 4, \lambda = 1$ 时, a_0 取不同的曲线簇, 由图 3-12 (a) 给出.

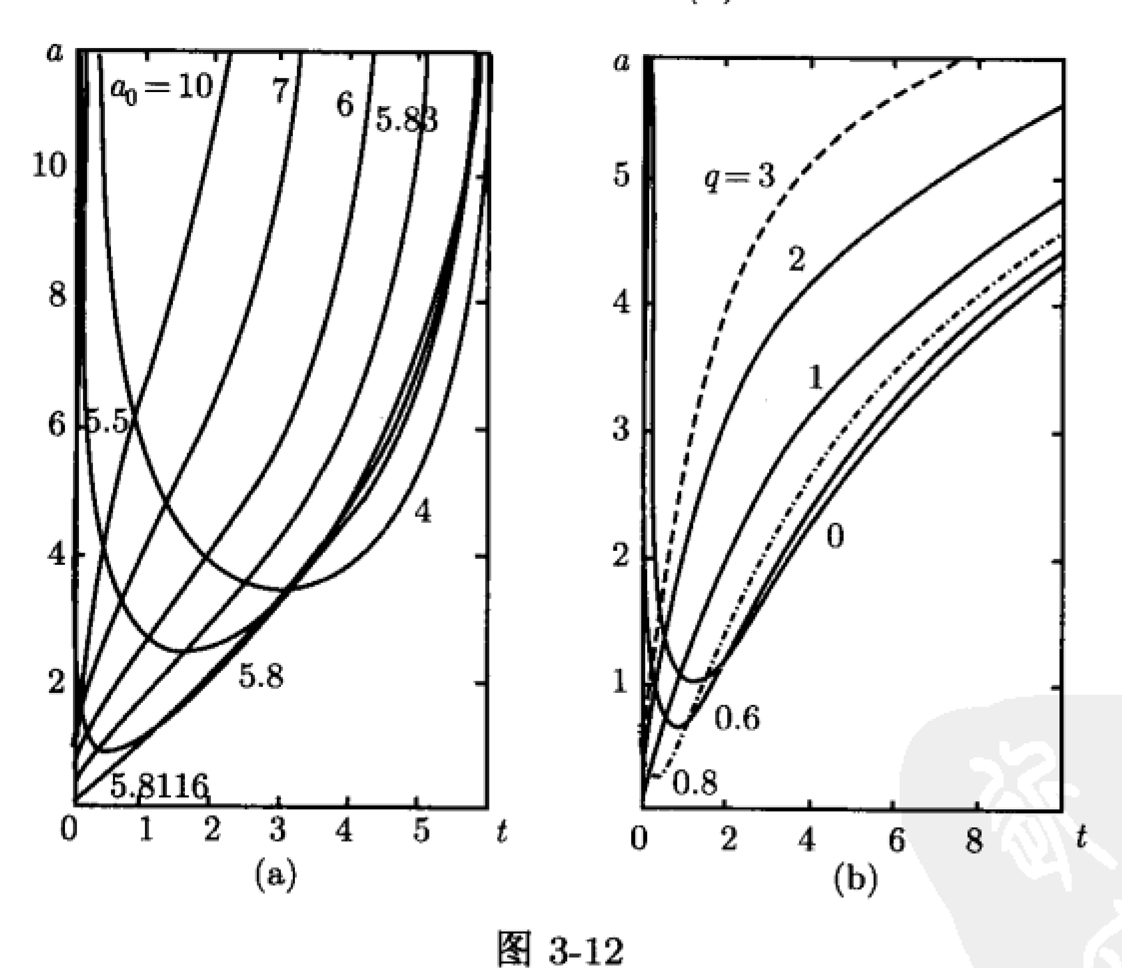


图 3-12

$\lambda < 0$ 的所有解具有有限寿命 $T(a_0, 0)$ 和 $\tau \to T$ 时的渐近行为 (3.3.32), 均表示在图 3-12 (a) 中, 但它们 $t \to 0$ 的行为依赖于 a_0 和 λ. 如果 a_0 不超过某个临界值 $a_0 = a_{cr}(\lambda)$, 则当 $t \to 0$ 时 $a, \phi \to \infty$, 这与式 (3.3.26) 相对应 [与图 3-12 (b) 中 $\lambda = 0$ 的解类似]. 在相反的情况下, $a_0 > a_{cr}$, 则当 $t \to 0$ 时有 $a, e^{2\phi} \to 0$, 这与式 (3.3.25) 对应 [与图 3-12 (a) 比较], 用临界值 $a_0 = a_{cr}$ 来区分这两个解 [图 3-12 (a)].

当 $t \ll T$ 时, 后一个解接近于直线 (3.3.6), $a \approx t, \phi \approx \phi_0$.

在 $k=-1, \lambda>0$ 的情况下禁区 (3.3.31) 不存在. 式 (3.3.28) 中具有不同值的解由时间反演 $(t \to -t, q \to -q)$ 相联系. 因此, 我们有一个解簇, 当 $t \to \infty$ 时具有无限寿命和渐近行为 $a \approx \sqrt{\tau}$ [式 (3.3.30)], $n=2, \lambda=1$ 的情况表示在图 3-12 (b) 中. 用 $q=\dot{a}$ 在点 $a=a_0=1$ 处的值为曲线编号. 对于 $q<q_{\rm cr}(a_0,\lambda)$ $(q_{\rm cr} \approx 1)$, 当 $t \to 0$ 时解具有极限 (3.3.26); 而对于 $q>q_{\rm cr}$, 解具有极限 (3.3.25). 当 t 很小时, $q=q_{\rm cr}$ 的临界解接近于直线 $a \approx t, \phi \approx \phi_0$.

3.3.2 小结

本节讨论了具有作用量 (3.3.1) 的 D 维伸缩子宇宙动力学方程的弗里德曼类宇宙解的分类. 对于不同的空间曲率 $k=0,\pm 1$ 和不同的 λ 值, 分类并研究了方程组 (3.3.4)~(3.3.6) 的宇宙解, 其中包括表达式 (3.3.10)~(3.3.13), (3.3.16), 以及新的解析解 (3.3.20)~(3.3.22), (3.3.27), (3.3.29).

为了醒目, 对于不同种类的解的分类, 列表如下 (表 3-2).

表 3-2

k	$\Lambda<0$	$\Lambda=0$	$\Lambda>0$
1	$0 \to \infty$	$0 \to \infty$	$0 \to \infty$ $0 \to a \approx a_0\sqrt{\tau}$ $0 \to 0$
0	$0 \to \infty$	$\infty \to a \approx a_0\tau^{-1/\sqrt{n}}$ $a=a_0, \phi=\phi_0$ $0 \to a \approx a_0\tau^{1/\sqrt{n}}$	$\infty \to a \approx a_0$ $a=a_0, \phi=\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\tau$ $0 \to a \approx a_0$
-1	$\infty \to \infty$ $a \approx \tau \to \infty$ $0 \to \infty$	$\infty \to a \approx \tau$ $a=\tau, \phi=\phi_0$ $0 \to a \approx \tau$	$\infty \to a \approx a_0\sqrt{\tau}$ $a \approx \tau \to a \approx a_0\sqrt{\tau}$ $0 \to a \approx a_0\sqrt{\tau}$

表中 0 表示演化的开始或者终止, 其渐近行为是式 (3.3.25) $(a, {\rm e}^{2\phi} \to 0)$. 表中的 ∞ 表示式 (3.3.26) 或式 (3.3.32) 类的渐近 $a, \phi \to +\infty$. 我们发现在 $\lambda<0$ 的情况下, 伸缩子宇宙总是有限的, 开始和终止都用上述数字标出 (当 $k=1$, 宇宙演化的开始接近直线 $a \approx \tau, \phi \approx \phi_0$, 且具有有限寿命).

表示演化终止的另外一些数字对应于无限长寿命和幂律演化的属于下面类型之一: 当 $a \approx \sqrt{\tau}$ 时为式 (3.3.30); 当 $k=0, \lambda \geqslant 0$ 时为式 (3.3.13), (3.3.10)~(3.3.12); 当 $k=1, a \approx \tau$ 时为式 (3.3.16), (3.3.20)~(3.3.22).

当 $k=-1, \lambda>0$ 时, 所有解都有同一形式的渐近行为 (3.3.30) $a_0\sqrt{\tau}$; 而当 $k=1, \lambda>0$ 时, 只有唯一的 (对于确定的 λ 和 t_0) 临界解, 此临界解分解为不同种类的演化.

我们发现, 所研究的这许多宇宙解对于不同维数 $n \geqslant 2$ 具有性质相同的奇点 (情况 $D = 2$ 等效于情况 $k = 0$). 在这个意义上, 我们的表中的分类对于所有的维数 D 具有普遍意义.

3.4 dilaton 场的稳定性

前面讨论了 dilaton 标量场在宇宙暴胀模型中的重要地位, 本节讨论 dilaton (伸缩子) 的稳定性问题 (Barreiro, 1998). 在弦宇宙模型中, 产生于超规范凝聚的标势一般是指数形式的. 在一个宇宙学模型中, 这就允许存在准标度解. 对于一个周期, 标量场的能量密度可以是背景密度中的一个固定的部分. 当场离开标度区域时, 它最终会在势的最小值处停下来. 下面我们就各种超规范凝聚模型来研究这种稳定性, 研究表明, 伸缩子的稳定解要远比人们原来想象的普遍.

近几年, 人们广泛地应用弦理论研究宇宙暴胀问题. 而在弦理论中伸缩子场是至关重要的. 它的真空期待值 (VEV) 决定了低能理论中的规范和引力耦合常数, 同时也通过超引力子的质量 $m_{3/2}$ 决定超对称性破缺的标度. 因此, 现在的观测宇宙要求 VEV 为一阶, $m_{3/2} \sim 1$ TeV.

遗憾的是, 在弦理论中按照微扰论, 任意阶的伸缩子的势都是平坦的. 这就意味着我们不可能得到场的稳定的 VEV. 但是可以通过一些非扰动的作用解决这一问题. 其中, 最具可行性的方法就是构造能量标度大约在 10^{14} GeV 的超规范子凝聚场 (de Carlos, 1993). 在这种情况下, 伸缩子的标量势就是指数形式的多项式. 人们对这些凝聚模型的具体研究表明, 如果在负宇宙常数的情况下, 伸缩子的势能逐渐演化到最小值, 也就是现实值, 那么这些凝聚模型中就需要至少两种凝聚物, 这就是所谓的跑道模型.

最近, 为了得到伸缩子场的最小值, 有人提出了另外一种方法, 其优势在于只依赖于一种超规范子凝聚物. 在这种情况下, Kähler 势 (由作用量中伸缩子的动量决定) 要求弦产生非扰动修正. 对这些模型的详细分析指出, 可能得到的最小的修正是零或者是最小的正宇宙常数. 另一个特征是, 给予伸缩子一个很大的质量, 非扰动修正就可能使伸缩子模型问题得到解决.

尽管人们对这两种模型很感兴趣, 但是它们仍然有很多问题. 一个是暴胀困难. 考虑多个超规范子凝聚的模型, 人们论证了与伸缩子场有关的动能将会在它的势能中占主导地位, 直到 ϕ (规范的归一化场, 与一般伸缩子的关系是 $\mathrm{Re}S = \mathrm{e}^{\phi}$) 在势的最小值处保持不变. 这明显是不允许暴胀发生的, 至少是把伸缩子当作暴胀场的话, ϕ 不可能在最小值处保持不变. 于是暴胀将被其他的场所驱动. 然而, 当模型中宇宙常数为负时, 第二种可能性也存在很严重的问题. 虽然 Kähler 势的非扰动修正能够解决这个问题, 但是在这两种情况下, 势在强耦合范围里都是很陡的指数形式.

这就使得我们期望伸缩子滚过最小值, 而不是得到它的 VEV. VEV 是弦宇宙学需要解决的问题.

最近, 在宇宙学中人们转而关注指数标量场势模型中标度解的研究. 如果背景动力学是由一些物质源, 而不是场本身 (辐射、尘埃、真空能量) 主导, 那么当场的势向低处演化时, 场就有可能进入一个标度范围. 在这个范围内, 来自于宇宙展开的摩擦项与场的动能相抵消, 这就使得场进入这个标度区域. 吸引子解存在的地方, 场的能量密度是总能量密度中固定的一部分.

我们可以将这种有趣的行为推广到弦论中的伸缩子场. 假定伸缩子场是从它的势的强耦合区域演化而来, 在以正压流体为主导的背景下, 对于很大范围内的初始场值, 当伸缩子的势向低处演化时, 不管它的陡度如何, 都会进入一个准标度范围. 当场的势达到最小值, 这种标度行为就最终结束, 这时场减速到足够小, 以至于仅仅只是在最小值附近震荡, 场的能量会减少直到它固定在现实的 VEV.

下面, 我们首先引入指数势的标度解的概念, 然后论证标度解是怎样成功地应用于超规范子凝聚的跑道模型和修正的 Kähler 势模型, 给出解析的和数值的解, 以证明伸缩子场在它的最小值是稳定的.

3.4.1 指数势的标度解

下面, 我们将要讨论指数势标量场的宇宙演化的一般特征. 考虑标量场 ϕ 在 FRW 宇宙中演化. 标量场的势能密度由 $V = V_0 \mathrm{e}^{-\lambda\kappa\phi}$ 决定, 其中 $\kappa^2 \equiv 8\pi G$, λ 和 V_0 为常数. FRW 宇宙中充满满足正压态方程 $p_\gamma = (\gamma - 1)\rho_\gamma$ 的流体, 其中 γ 为常数 ($0 \leqslant \gamma \leqslant 2$, 对于辐射控制的情况 $\gamma = 4/3$, 对于物质控制的情况 $\gamma = 1$). 一个空间平直的 FRW 模型, 运动方程可写为与哈勃因子 H 有关的形式

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -\frac{\kappa^2}{2}(\rho_\gamma + p_\gamma + \dot{\phi}^2), \\ \dot{\rho}_\gamma &= -3H(\rho_\gamma + p_\gamma), \\ \ddot{\phi} &= -3H\dot{\phi} - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}, \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

满足约束条件

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\left(\rho_\gamma + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right). \tag{3.4.2}$$

在前面的方程中, 我们假定 ϕ 与其他物质场之间只存在引力相互作用. 下面我们令 $\kappa^2 = 1$, 很容易可以将它恢复. 对于指数势, 可以得到系统渐近行为的解析结果. 我们将集中讨论陡势的解, 也就是 $\lambda^2 > 3\gamma$. 首先回顾一下这些解的结构. 众所周知, 它们包含一个后期吸引子解. 我们按照 Copeland (1997) 的方法, 定义变量 $x \equiv \dot{\phi}/\sqrt{6}H$ 和 $y \equiv \sqrt{V}/\sqrt{3}H$, 采用对数标度因子 $N \equiv \ln(a)$ 作为时间变量. 前面的方程 (3.4.1) 变为

$$
\begin{aligned}
x' &= -3x + \lambda\sqrt{\frac{3}{2}}y^2 + \frac{3}{2}x[2x^2 + \gamma(1 - x^2 - y^2)], \\
y' &= -\lambda\sqrt{\frac{3}{2}}xy + \frac{3}{2}y[2x^2 + \gamma(1 - x^2 - y^2)], \\
H' &= -\frac{3}{2}H[2x^2 + \gamma(1 - x^2 - y^2)],
\end{aligned}
\tag{3.4.3}
$$

这里“$'$”代表对 N 求导. 按照这些变量, 约束条件 (3.4.2) 变成 $x^2+y^2+\rho_\gamma/3H^2=1$, 换言之, 对于 $\rho_\gamma \geqslant 0$, 我们有限制 $0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$. 从图 3-13 可以看出 ϕ 场随 N 的演化. 这里 $\lambda = 85$, $V_0 = 1$, 初始条件 $\phi_0 = 0.5$, $\dot{\phi}_0 = 0.2$ 和 $H_0 = 1$. 场的初始速度使得 ϕ 在一开始的时候有一段增长, 此后, 我们发现摩擦项占主导, 它使得 ϕ 在很长一段时间内被冻结在一个常数值, 直到场进入一个标度范围. 这个标度范围对应的临界点是 $x_c = \sqrt{3/2}\gamma/\lambda$ 和 $y_c = \sqrt{3(2-\gamma)\gamma/2\lambda^2}$ 我们可以通过求解系统方程 (3.4.3) 来获得这种行为.

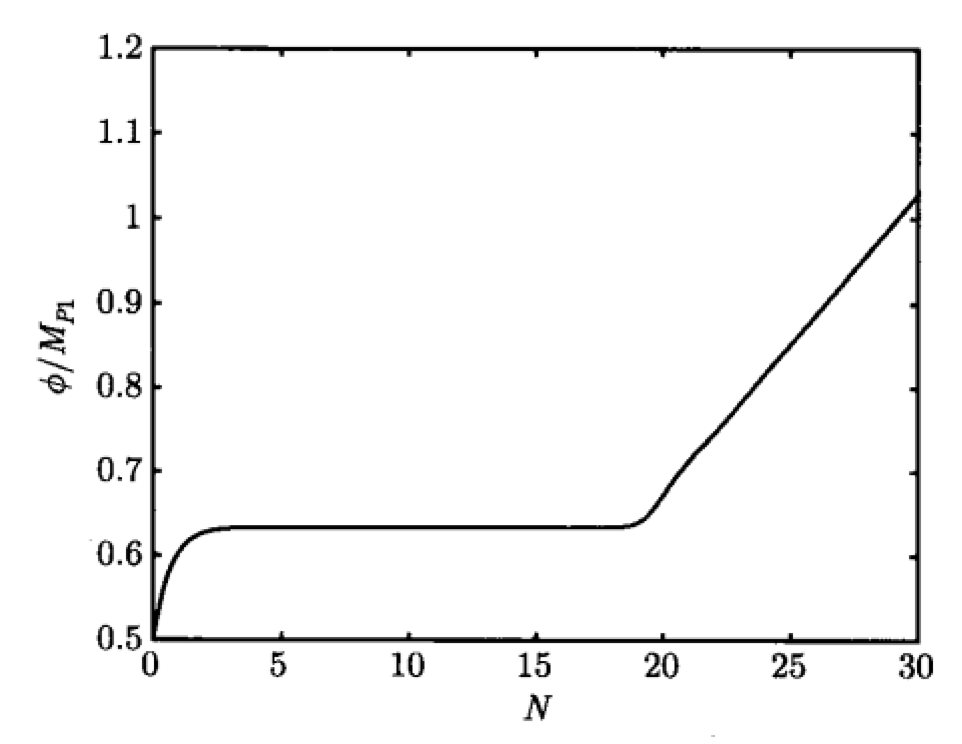


图 3-13　ϕ 对 $N = \ln a$ 的演化. 标量势 $V = \mathrm{e}^{-\lambda\phi}$, 其中 $\lambda = 85$, $\gamma = 1$. 初始条件 $\phi_0 = 0.5$, $\dot{\phi}_0 = 0.2$ 和 $H_0 = 1$

1) 第一阶段 (标度范围前)

因为 $\lambda \gg 1$, H 是增加的, y 在演化早期很小, 在方程 (3.4.3) 中可以忽略. 与 x 有关的方程变为

$$
x' = -3x + \frac{3}{2}x[2x^2 + \gamma(1 - x^2)], \tag{3.4.4}
$$

它的解为

$$
x = \left(1 + \frac{1 - x_0^2}{x_0^2}\mathrm{e}^{3(2-\gamma)N}\right)^{-1/2}, \tag{3.4.5}
$$

式中 x_0 是 x 的初始值 (在 $N = 0$). 对方程 (3.4.5) 积分, 可以得到 ϕ 的解

$$\phi_{\mathrm{I}}(N)=\phi_0+\frac{2\sqrt{6}}{3(2-\gamma)}\left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\right)-\operatorname{arsinh}\left(\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\mathrm{e}^{-3(2-\gamma)N/2}\right)\right], \tag{3.4.6}$$

式中 ϕ_0 是场的初始值. 当 N 增加时, 这个解趋于常数值 $\tilde{\phi_0}$, 记为

$$\tilde{\phi_0}=\phi_0+\frac{\sqrt{6}}{3(2-\gamma)}\ln\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\right). \tag{3.4.7}$$

很明显, 当速度为零时, $\tilde{\phi_0}$ 还原为 ϕ_0.

2) 第二阶段 (标度范围)

如上所述, 标度范围由 x 和 y 的常数值 (如临界点) 定义. 然后, 我们得到 $H=H_0\mathrm{e}^{-3\gamma N/2}$ 和

$$\phi_{\mathrm{II}}(N)=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\lambda^2V_0}{9H_0^2(2-\gamma)\gamma}\right)+\frac{3\gamma}{\lambda}N, \tag{3.4.8}$$

式中清楚地给出了场对特征势的依赖关系 (如 λ 和 V_0).

我们注意到背景演化是由另外出现的物质场而不是 ϕ 场决定的, 这个物质场由 γ 给出, ϕ 场主导演化. 标量场和背景的同时演化使得前者达到一个标度范围, 尽管它的 (指数) 势很陡. 这种情况就使我们想到了由超规范子凝聚引起的 SUSY 破缺中产生的势, 其中的超势以指数形式依赖于伸缩子场.

3.4.2 超规范子凝聚的标度解

超引力理论模型中的标量势具有形式

$$V=\mathrm{e}^K|W|^2\left[\left(K^i+\frac{W^i}{W}\right)(K_i^j)^{-1}\left(K_j+\frac{\bar{W}_j}{\bar{W}}\right)-3\right], \tag{3.4.9}$$

式中 K 是 Kähler 势, W 是超势, 下标 i, j 代表对不同场函数求导. 人们感兴趣的是超弦导出模型, 特别是对理论中隐藏部分的研究, K 和 W 都将与伸缩子 (S) 和模量 (T_i, $i=1,2,3$) 场有关. 实际上, 在紧致化的情况下, Kähler 势为

$$K=-\lg(S+\bar{S})-\sum_{i=1}^{3}\lg(T_i+\bar{T}_i), \tag{3.4.10}$$

我们的研究将限制在隐藏部分相互作用的情况. 这种相互作用是由两个规范群 $SU(N_1)\times SU(N_2)$ 决定的. 在这两个规范群内, 可以得到与一系列单态场的 Yukawa 耦合有关的 $M_1(N_1+\bar{N}_1)$ 和 $M_2(N_2+\bar{N}_2)$"夸克"表示. 为了简单, 假设所有模量 $T=T_1=T_2=T_3$, 和一个分别适合于规范场 A_1,A_2 的普通单态场. 在这种情况下, 超势为

$$W=\sum_{i=1}^{2}\left[-\frac{d_i}{\eta(T)^{\beta_i}}A_i^{M_i/N_i}\mathrm{e}^{-\alpha_i S}+h_iA_i^3\right], \tag{3.4.11}$$

式中 $\alpha_i = 8\pi^2/N_i$, $\beta_i = 2(3N_i - M_i)/N_i$, $d_i = N_i(32\pi^2 e)^{(M_i/N_i-1)}$, $\eta(T)$ 是 Dedekind 函数, 设定 $h_i = 1$, 则 A_i 场为自耦合场. 许多学者研究过这些模型, 我们总结一下它们的主要特征: 目标空间的模对称条件必然导致 η 函数的出现, 通常与 T 有关的势确保了 $T \sim 1.2$ (在普朗克单位下) 时最小值的存在, 并且它与特殊规范群或者质量表示无关 (只要伸缩子获得一个 VEV). 同样, 如果两个凝聚的相相反的话, 在 S 的虚轴方向上会存在最小值. 最后, 可以证明在 S 的实轴方向上存在一个最小值, 它的合理值是 $\mathrm{Re}S \sim 2$, 超引力子的质量也是合理值 (~ 1 TeV), 但是势能总为负. 图 3-14 (a) 表示一个典型的例子. 伸缩子势的陡度阻止场在它的 (负的) 最小值停下来, 但是允许它越过最大值接近无穷.

我们要在伸缩子场 (更准确地说是它的实部) 停止在最小值前来研究它的演化. 前面已经对一个单一的指数标势进行了解析求解, 并且得到了标度解. 但是与更现实的超规范子凝聚模型还有较大的不同. 首先, 伸缩子不仅与引力场耦合, 而且还直接与物质场耦合. 为了简单并避免对特殊模型的任何假定, 下面我们将忽略此效应. 其次, 考虑两种凝聚物的情况下, 超势 (3.4.11) 包含了两种 $\mathrm{Re}S$ 的两种不同的指数函数, 因此标势 (3.4.9) 将包含全部的来自于 $|W|^2$ 的不同项. 特别是在伸缩子中会出现指数函数和多项式的混合项. 最后, 一个规范地归一化的场遵守方程 (3.4.1) 中与 ϕ 有关的微分方程, 但是 $\mathrm{Re}S$ 却不遵守. 众所周知, 在超引力拉氏量中, 标量场的动力学项为 $K_i^j \mathrm{D}_\mu\phi_i \mathrm{D}^\mu\bar{\phi}^j$, 在 $\mathrm{Re}S$ 的情况下会引入一个额外因子 $1/(2\mathrm{Re}S)^2$. 因此, 研究伸缩子的演化就要对场 ϕ 有关的系统求解, 其中 $\mathrm{Re}S \equiv \mathrm{e}^\phi$, 或者说要对方程 (3.4.1) 做出修正, 来对非规范的动力学项做出解释.

所幸的是, 这些问题我们都能够做到. 首先, 我们注意到, 即使对两种凝聚物进行仔细微调, 使得 $\mathrm{Re}S$ 为某一合适值时能够得到一个最小值, 对于大多数的朝着这个最小值的演化, 仅仅只有一个 (α_i 值最小的一个) 起主导作用. 为了简单, 在 $\mathrm{Re}S$ 的演化过程中, 我们始终认为物质场常数的最小值为

$$A_{i\min} = (3N_i/d_iM_i)^{-2/\beta_i}\exp(-2\alpha_i S_{\min}/\beta_i)/\eta(T)^2.$$

因此, 在所研究的范围内, 可以对超规范势做近似, 如通过第一种凝聚物; 此外, 很容易证明在方程 (3.4.9) 中, 对于括号中的各项来说, 正比于 $\partial W/\partial A_1$ 的项起主要作用. 在到达最小值前的区域, 标势可以很好地表示为

$$V = \left|\frac{d_1 M_1 A_{1\min}^{(M_1-N_1)/N_1}}{\sqrt{6}N_1(2\mathrm{Re}T)\eta(T)^{\beta_1}}\right|^2 \mathrm{e}^{-2\alpha_1 \mathrm{Re}S}. \tag{3.4.12}$$

相应地, 我们只考虑前面提到的主导项, 并且除指数以外让其他地方的 $\mathrm{Re}S = 1$. 这种近似的结果在图 3-14 (a) 中可以看到, 由虚线表示 (文中任何地方 $\mathrm{Re}T = 1.2$). 这可以很好的证明, 当研究远离最小值时 $\mathrm{Re}S$ 的演化时, 使用方程 (3.4.12) 仍然是合理的.

我们还注意到, ReS 并不是规范的归一化场. 首先我们给出 ϕ 场演化的数值结果. 对于辐射为主的宇宙 (如 $\gamma=4/3$) 和初始条件 $H_0=1$, Re$\dot{S}_0$ = Re$S_0/4$, 考虑 Re$S=\mathrm{e}^{\phi}$ 随 N 变化, 已经在图 3-14 (b) 中将结果描绘出来. 不同的线对应不同的 ReS 初始条件. 明显地, 第一阶段的演化行为与图 3-13 中所表示的纯指数演化很相似, 不同之处出现在 $N\sim 11$ 的指数递减的数以后, 这是最小值的出现所引起的. 依赖于初始位置的场可能会, 也可能不会降低到最小值. 但是如果场达到标度范围, 前者肯定会发生, 因为对于很大范围内的 ReS_0 值, 所有的值都在最小值附近, 伸缩子将会停止在它的最小值. 实际上, 在图 3-14 (b) 中, 只有顶部的曲线没有在最小值终止, 它对应于场的近似值 Re$\tilde{S}_0\equiv \mathrm{e}^{\tilde{\phi}_0}$, 远离势的最大值.

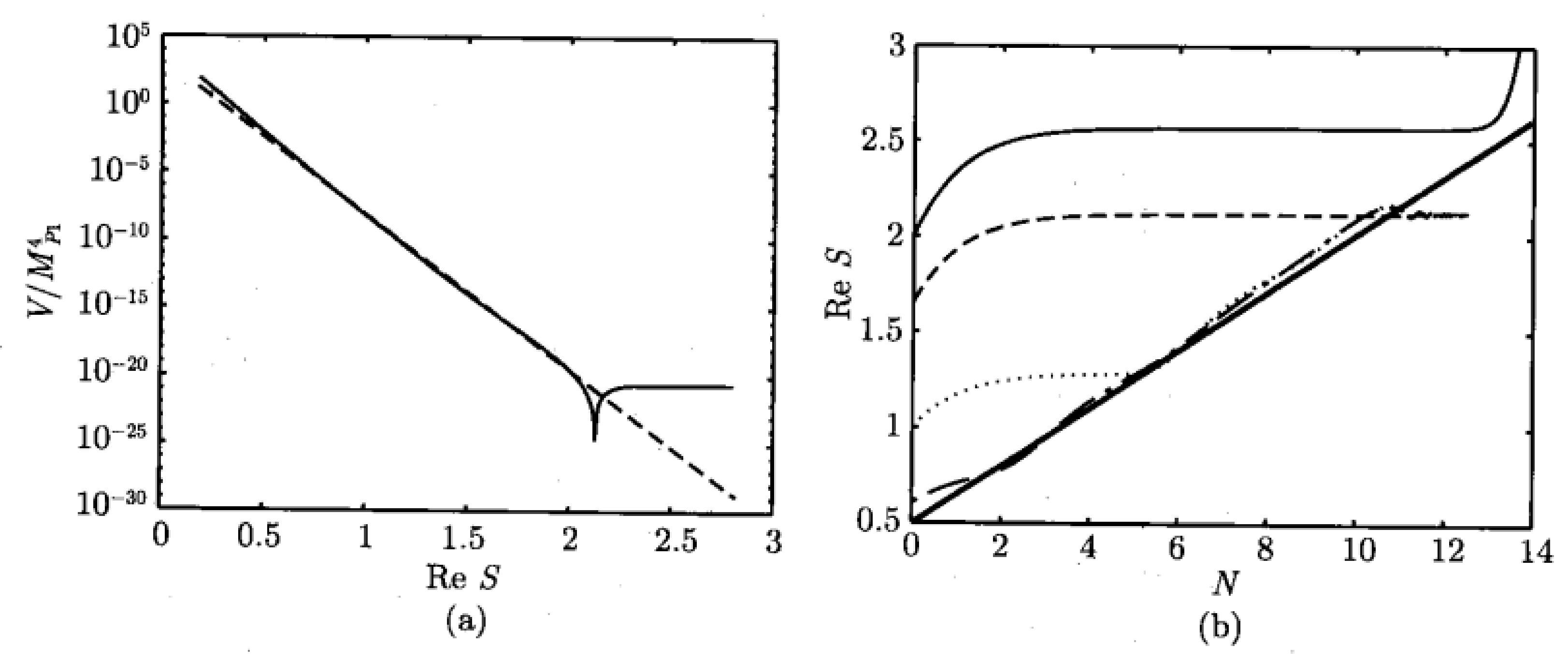


图 3-14 (a) 实线: 关于两种凝聚物, 描述了标势 V(以对数单位) 随 Re S 的变化, 标势与规范群 $SU(6)\times SU(7)$, 以及物质表示 $M_1=2$ 和 $M_2=8$ 有关; 虚线: 由方程 (3.4.12) 给出的指数近似. (b) 关于 (a) 中描述的两种凝聚势, Re S 随 N 的演化, 其中 $H_0=1$, $\gamma=4/3$, 不同的初始位置为 Re $S_0=0.6$ (点虚线), Re$S_0=1$ (点线), Re $S_0=1.65$ (虚线), Re$S_0=2$ (实线), 初始速度由 Re$\dot{S}_0$ = Re$S_0/4$ 给出. 粗实线代表方程 (3.4.18) 中指数势在标度范围 (3.4.12) 的解

我们已经论证了在势由方程 (3.4.12) 给出的情况下, 如 $\lambda=2\alpha_1$ 和 $V_0=|d_1M_1A_{1\min}^{(M_1-N_1)/N_1}/\sqrt{6}N_1(2\mathrm{Re}T)\eta(T)^{\beta_1}|^2$, 方程 (3.4.8) 很好地表示了图 3-14 (b) 中的标度解. 就好像 ReS 是一个规范地归一化场. 这个近似解对应图 3-14 (b) 中的粗实线.

在这种情况下, 通过解析地求解方程 (3.4.1), 我们将注意力集中到解释非规范伸缩子场的标度行为. 关于归一化的伸缩子场 ϕ, 其方程为

$$x_\phi' = -3x_\phi + \lambda \mathrm{e}^{\phi}\sqrt{\frac{3}{2}}y_\phi^2 + \frac{3}{2}x_\phi[2x_\phi^2 + \gamma(1-x_\phi^2-y_\phi^2)],$$

$$y_\phi' = -\lambda \mathrm{e}^{\phi}\sqrt{\frac{3}{2}}x_\phi y_\phi + \frac{3}{2}y_\phi[2x_\phi^2 + \gamma(1-x_\phi^2-y_\phi^2)], \tag{3.4.13}$$

$$H' = -\frac{3}{2}H[2x_\phi^2 + \gamma(1 - x_\phi^2 - y_\phi^2)],$$

式中 x_ϕ 和 y_ϕ 就是方程 (3.4.3) 中的 x 和 y. 更复杂的势的出现要求做代换 $\lambda \to \lambda e^{\phi}$. 纯指数的情况一样, 可以在前面定义的两个不同阶段对方程求解. 第一阶段的解并不重要, 因为在这个范围内关键是忽略任何对势的依赖, 因此 ϕ 的解与方程 (3.4.6) 相同. 于是

$$\mathrm{Re}S_{\mathrm{I}} = \mathrm{Re}\tilde{S}_0 \left(\frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}} e^{-\frac{3}{2}(2-\gamma)N} + \sqrt{1 + \frac{x_0^2}{1 - x_0^2} e^{-3(2-\gamma)N}} \right)^{-\sqrt{\frac{8}{3}}/(2-\gamma)}, \tag{3.4.14}$$

式中 $\mathrm{Re}\tilde{S}_0 \equiv e^{\tilde{\phi}_0}$, 其中 $\tilde{\phi}_0$ 由方程 (3.4.7) 给出. 第二阶段标度范围内的解要复杂得多. 首先, 我们感兴趣的势的形式和 ϕ 值的范围确保了 $x, y \ll 1$, 因此可以对 H 求解, 以得到一般的结果 $H = H_0 e^{-3\gamma N/2}$, 并且再一次表明背景场决定宇宙的演化. 关于另外的两个方程, 依照 $\mathrm{Re}S$ 和新的变量 $x_S \equiv \mathrm{Re}S'/\sqrt{6}$(注意 $y_S = y_\phi$) 来改写它们. 同样考虑 x 和 y 很小的近似, 可以得到前两个方程

$$\begin{aligned} x_S' &= -\frac{3}{2}(2-\gamma)x_S + \lambda\sqrt{\frac{3}{2}}(\mathrm{Re}S)^2 y_S^2, \\ y_S' &= -\lambda\sqrt{\frac{3}{2}} x_S y_S + \frac{3}{2}\gamma y_S. \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

很明显, 对于图 3-14 (b) 中的标度区域 (如第二阶段), 可以得到 $x_S' = y_S' = 0$. 从方程 (3.4.15) 中的第二个方程得到关于 x_S 的我们所期望的解, 与纯指数的情况类似

$$x_S^{\mathrm{c}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\gamma}{\lambda}. \tag{3.4.16}$$

然而从第一个方程我们发现

$$y_S^2 = \frac{3(2-\gamma)\gamma}{2\lambda^2}\frac{1}{(\mathrm{Re}S)^2}, \tag{3.4.17}$$

即 y_S 并没有达到一个关键值, 它与 $(\mathrm{Re}S)^{-2}$ 有关. 如果已知 λ 的大小 ($\geqslant 20$) 和我们所考虑的 $\mathrm{Re}S$ 的范围 (在 0.3 和 2 之间), 则 y_S 与我们所期待的关键值的偏差为 $y_S^{\mathrm{c}} = 3(2-\gamma)\gamma/(2\lambda^2)$, 这并不是很重要, 从图 3-14 (b) 中可以明显地看出. 在任何情况下人们都会计算这种修正, 它通过因子 $\epsilon(N)$ 修正纯标度结果. 于是, 我们设

$$\mathrm{Re}S_{\mathrm{II}} = \frac{3\gamma}{\lambda}N + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2V_0\lambda^2}{9H_0^2(2-\gamma)\gamma}\right] + \epsilon(N), \tag{3.4.18}$$

将其带入方程 (3.4.17), 并利用 y_S 的定义 ($\equiv \sqrt{V_0}e^{-\frac{\lambda}{2}\mathrm{Re}S}/(\sqrt{3}H)$) 和 H 的解, 得到

$$\epsilon(N) = -\frac{2}{\lambda}\ln\left[\frac{3\gamma}{\lambda}N + \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2V_0\lambda^2}{9H_0^2(2-\gamma)\gamma}\right)\right]. \tag{3.4.19}$$

与标准的结果相比, 它是一个非常小的数值修正; 在对指数势而非最小运动项标量场求得的解中, 它是最值得注意的和非常令人鼓舞的结果.

当伸缩子接近最小值 $\mathrm{Re}S_{\min}$ 时, 纯指数势近似地最终中断. 从图 3-14 (b) 中可以看出, 如果场在它的标度区域内, 就没有足够的能量去越过势的最大值. 但是, 它会围绕最小值以指数衰减的振幅振荡, 并很快地在它的最终值停下来. 在标度解方程 (3.4.18) 中, 使 $\mathrm{Re}S_{\mathrm{II}}$ 等于 $\mathrm{Re}S_{\min}$, 就可以简单地估计出达到最小值所要求的指数递减的数值. 我们得到

$$N_{\min} = \frac{1}{3\gamma}\left\{\lambda \mathrm{Re}S_{\min} - \ln\left[\frac{2V_0\lambda^2}{9H_0^2(2-\gamma)\gamma}\right]\right\}, \tag{3.4.20}$$

(这里我们忽略了 ϵ 修正, 因为这个结果已经足够精确). 因此, 一旦对要研究的实例和背景作出定义, 就能得到 $N_{\min}$. 实际上, 还可以用这个结果来计算 $H_{\min}$

$$H_{\min} = H_0 \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma N_{\min}} = \sqrt{\frac{2V_0\lambda^2}{9(2-\gamma)\gamma}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}\mathrm{Re}S_{\min}}. \tag{3.4.21}$$

很显然, 它与 H_0 无关. 在以辐射为主的宇宙中 ($\gamma = 4/3$), 对于许多 $\mathrm{Re}S \sim 2$ 和 $m_{3/2} \sim 1$ 的隐藏部分规范群, 人们已经估计了 $N_{\min}$ 和 $H_{\min}$, 并且得到了几乎不变的结果

$$\begin{aligned} &N_{\min} \sim 11, \\ &H_{\min} \sim 5.10^{-10} M_P. \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

假定一个辐射为主的宇宙, $H \propto T^2/M_P$, 这意味着 $T_{\min} \sim 10^{13}$ GeV. 对于这个结果的不变性, 我们可以或多或少地理解为将方程 (3.4.20) 按照超引力子质量和两种凝聚的规范群因子来改写. 要求模型是唯象可行的, 就要固定大部分的参量, 这就使得 $N_{\min}$, $H_{\min}$ 和 $T_{\min}$ 为常数.

从这些结论我们可以估计初始条件的范围, 它最终将导致一个稳定的伸缩子. 只要场在其到达最小值以前进入标度解, 我们就可以确保它是稳定的. 其充分条件是, $\mathrm{Re}S_0$ 的初始值在 $N = 0$ 的标度解和 $\mathrm{Re}S_{\min}$ 之间, 初始速度使得方程 (3.4.14) 的渐进解 $\mathrm{Re}\tilde{S}_0$ 小于 $\mathrm{Re}S_{\min}$. 也就是说, 关于 $\mathrm{Re}S_0$ 和 x_0 我们可以得到以下限制:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2V_0\lambda^2}{9H_0^2(2-\gamma)\gamma}\right] < \mathrm{Re}S_0 < \mathrm{Re}S_{\min}, \\ &0 < x_0 < \tanh\left[\frac{\sqrt{6}}{4}(2-\gamma)\ln\left(\frac{\mathrm{Re}S_{\min}}{\mathrm{Re}S_0}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

在图 3-14 (b) 给出了一些例子. 注意到随着 H_0 的减小, 这个范围也变小, 这和我们预期的一样. 在这些限制以外同样也存在一些初始条件将会导致一个稳定

的伸缩子, 如初始值在最大值和最小值之间, 接近 $\mathrm{Re}S_0$ 的下限, 或者允许负的初始速度. 即使我们不考虑这些, 在参数空间仍然存在一个大小相当的范围, 允许伸缩子演化到它的最小值并停在那儿.

宇宙的暴胀对应于 γ 很小 (和变化) 的情况. 注意到产生暴胀的是正压流体, 我们不考虑任何一种伸缩子驱动的暴胀. 从方程 (3.4.18) 可以看出, 对于 $\gamma \approx 0$ 标度解实际上是横向的. 可以得到大量关于这个解的指数递减的量, 来达到势的最小值. 此外, 对于一些暴胀模型, γ 会迅速地变化, 在这些情况下人们不期望场为精确的标度解. 然而, 只有少数的指数递减的量能够打开一个大范围的参数空间. 除非能量密度完全地由伸缩子主导, 暴胀情况下的准常数 H 将会迅速地将场冻结在一个常数值, 这将导致一个重新加热的标度解 ($\gamma = 1$). 方程 (3.4.23) 中对 x_0 的限制仍然适用, 但是为 $\gamma = 0$ 时的最大值. 如果存在一个初始的小周期的暴胀, 人们期望参数空间大多数的区域都演化到一个稳定的伸缩子.

现在我们继续分析伸缩子场的宇宙演化. 它们包括一个单一的凝聚物, 通过对 Kähler 势的非微扰修正, 这个凝聚物趋于稳定. 我们要处理的一个标量势, 仍然由方程 (3.4.9) 给出, 其中超势为

$$W = \frac{C}{\eta(T)^6}\mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{Re}S}, \tag{3.4.24}$$

对于 $SU(N)$ 群 $\alpha = 8\pi^2/N$, $C = -N/(32\pi^2 e)$. Kähler 势更为复杂, $K = K_0 + K_{np}$, 这里 K_0 的定义在方程 (3.4.10) 中 (关于全部的模数), 非微扰的修正被参数化

$$K_{np} = \frac{D}{B\sqrt{\mathrm{Re}S}}\lg\left(1 + \mathrm{e}^{-B(\sqrt{\mathrm{Re}S} - \sqrt{S_0})}\right), \tag{3.4.25}$$

它与三个常数 S_0, D 和 B 有关, 第一个常数决定了最小值情况下 $\mathrm{Re}S$ 的值.

关于非微扰的修正, 以下的表达式给出了很好的近似:

$$\mathrm{e}^{K_{np}} = \mathrm{e}^{-D(\sqrt{\mathrm{Re}S} - \sqrt{S_0})/\sqrt{\mathrm{Re}S}}. \tag{3.4.26}$$

于是, 标量势为

$$V = \frac{\mathrm{e}^{-D(1-\sqrt{S_0/\mathrm{Re}S})}}{2\mathrm{Re}S}\left[\frac{4(1 - D\sqrt{S_0/\mathrm{Re}S} + 2\alpha\mathrm{Re}S)^2}{4 + 3D\sqrt{S_0/\mathrm{Re}S}} - 3\right]|W|^2. \tag{3.4.27}$$

将方程 (3.4.27) 写成普通的指数形式 $V = V_0\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{Re}S}$, 在任何地方让 $\mathrm{Re}S = 1$, 得到

$$V \approx \mathrm{e}^{D}\frac{2(D\sqrt{S_0} + 2\alpha)^2}{(4 + 3D\sqrt{S_0})}\left(\frac{C}{\eta(T)^6}\right)^2\mathrm{e}^{-(2\alpha + D/S_0)\mathrm{Re}S}, \tag{3.4.28}$$

它是一个纯指数, 其中指数与 D 的值有关. 正如前面所提到的, 对于一个给定的隐藏规范群, 存在一系列的 (D, B) 的值, 使得 V 在宇宙常数为零的 S_0 处有一个

最小值. 这意味着一个特殊隐藏部分相互作用的宇宙演化将会依赖于我们所考虑的 (D, B) 的值. 在图 3-15 中这可以很清楚地看出来, 我们描绘了伸缩子场的宇宙演化随相同规范群 $SU(5)$ 下指数递减的数 N 的变化, 初始条件为 $H_0 = 1$, $\gamma = 1$, $\mathrm{Re}\dot{S}_0 = 0.15$, $\mathrm{Re}S_0 = 0.6$. 我们发现与 D 值 (为了在最小值 S_0 处得到一个零宇宙常数, 我们将对应的 B 固定) 有关的场会降到最小值.

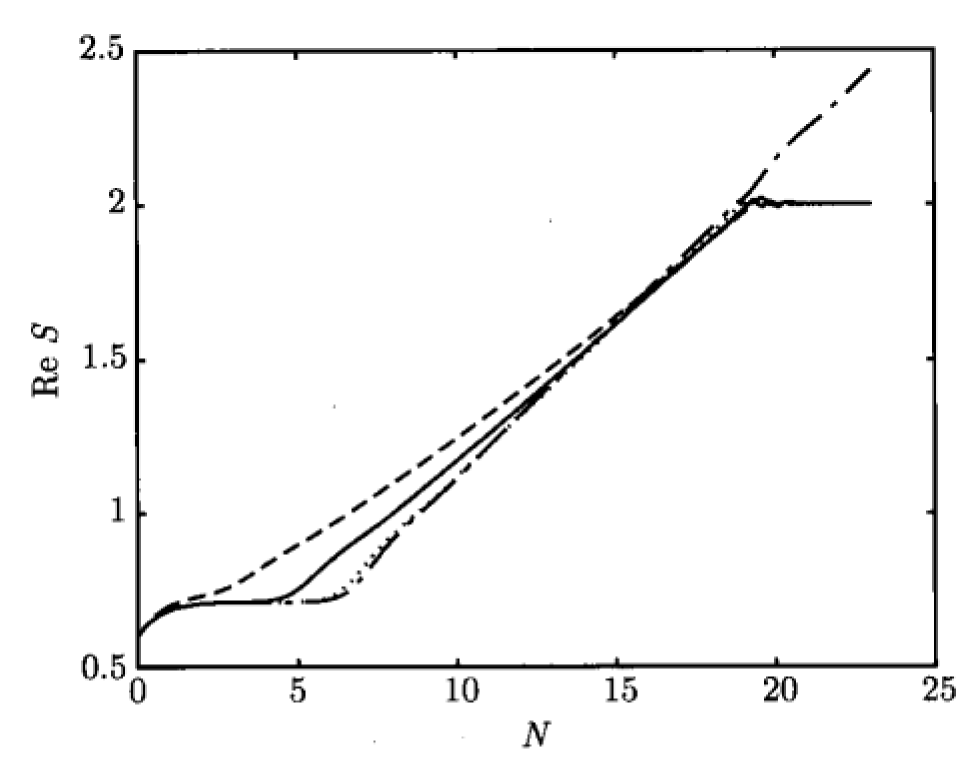


图 3-15 对于具有 $SU(5)$ 规范群的方程 (3.4.27) 的势, $\mathrm{Re}\,S$ 随 N 的演化, 初始条件为 $H_0 = 1$, $\gamma = 1$, $\mathrm{Re}\dot{S}_0 = 0.15$, $\mathrm{Re}S_0 = 0.6$. 不同的线对应于方程 (3.4.28) 中不同的 D 值: $D = 1$ (点划线), $D = 3$ (点线), $D = 10$ (实线), $D = 20$ (虚线)

对于前面的两种凝聚物模型, 可以就演化方程 [我们使用方程 (3.4.28)] 的解析解做类似的分析. 第一阶段的解与前面的一致 [方程 (3.4.14)], 因为由微分方程 (3.4.3) 所给出的系统与这个范围内势的特性无关. 对于第二阶段, 我们可以得到与方程 (3.4.18) 类似的表达式, 在这种情况下 $\lambda = 2\alpha + D/S_0$ 和 $V_0 = \mathrm{e}^D 2(D\sqrt{S_0} + 2\alpha)^2 C^2/[(4 + 3D\sqrt{S_0})\eta^{12}]$. 关于指数递减的数, 它的表达式必须达到最小值 $N_{\min}$ 和 $H_{\min}$, 在方程 (3.4.20) 和 (3.4.21) 中将表达式替换成 α 和 V_0, 同样能得到这样的结果. 事实上, 在低能的条件下我们采用了一致的唯象模型 ($\mathrm{Re}S \sim 2$ 和 $m_{3/2} \sim 1$ TeV), 这就意味着 $N_{\min}$ 和 $H_{\min}$ 的数值与 3.3 节得到的结果很相似. 特别是, 可以将 $N_{\min}$ 表示为

$$N_{\min} = \frac{-2}{3\gamma}\left[\ln\left(\frac{m_{3/2}}{M_P}\right) + \ln\left(\frac{(D\sqrt{S_0} + 2\alpha)2\alpha}{\sqrt{(4 + 3D\sqrt{S_0})}}\right) - \ln\left(\frac{3H_0\sqrt{(2-\gamma)\gamma}}{2\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{3.4.29}$$

对于图 3.4.3 中的例子, 即 $\gamma = 1$, $H_0 = 1$, 在很好的近似下可以得到几乎不变的值 $N_{\min} \sim 19$, 它导致 $H_{\min} \sim 10^{-13}$.

第4章　关于宇宙的加速膨胀和时空涨落

在第二篇 3.8 节中，我们已经简单地介绍了 Phantom 暗能量模型，由于 Phantom 标量场是一个动能为负的场，超负的态方程参数 ($w < -1$) 带来了许多新的物理性质. 如 Phantom 标量场在量子尺度上的不稳定性，Phantom 暗能量宇宙中弱能条件被破坏，Phantom 场的有效声速 $v = \sqrt{|\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho|}$ 大于光速，Phantom 暗能量宇宙的能量密度随着宇宙的膨胀而增加导致宇宙未来的大破裂 (Big Rip)，等等. 当然 Big Rip 这一特性并不是对所有的 $w < -1$ 的暗能量模型都存在，比如 Chaplygin gas Phantom 模型和 Brane Phantom 模型就没有这个性质. 值得注意的是尽管 Phantom 暗能量模型是一个唯象的模型，但在拉氏量中动能项为负的情况在超引力和高阶微分引力理论中都有可能出现. 这一章，我们将详细地讨论 Caldwell Phantom 暗能量宇宙模型中的宇宙大破裂和时空涨落. 暗能量的效应体现为一种斥力，使宇宙加速膨胀. 时空涨落则体现为一种引力效应，可以扼制宇宙的大破裂.

4.1　动力学方程

在本节中我们讨论 Phantom 暗能量宇宙的动力学方程，讨论宇宙标度因子、能量密度随时间的演化. 我们讨论一个特殊情况：假定 Phantom 暗能量的态方程参数 w 是一个小于 -1 的常数，并假设宇宙的能量只由无压物质和 Phantom 暗能量组成而忽略成分很少的辐射能量，且只考虑空间平直的情况. 这时 Friedmann 方程和 Phantom 的能量守恒方程可分别表示为 (Johri, 2004)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_p) = H_0^2\left[\Omega_m^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_p^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}\right], \tag{4.1.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}[\rho_m + \rho_p(1+3w)] = -\frac{4\pi G}{3}\rho_p(\Omega_p^{-1} + 3w) \\ &= -\frac{4\pi G}{3}\rho_p\left[\frac{\Omega_m^0}{\Omega_p^0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{-3w} + 1 + 3w\right]\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

和

$$\dot{\rho}_p + 3H\rho_p(1+w) = 0, \tag{4.1.3}$$

式中 $\Omega_m = \rho_m/\rho_c\,(\rho_c = 3H^2/8\pi G)$ 和 $\Omega_p = \rho_p/\rho_c$ 分别表示物质和 Phantom 暗能量的无量纲密度因子，对空间平坦的情况有 $\Omega_m + \Omega_p = 1$，上 (下) 标 0 表示该量是

当前的值. 由方程 (4.1.2) 可知, 当

$$\Omega_p^{-1}+3w>0 \tag{4.1.4}$$

时, $\ddot{a}<0$, 宇宙做减速膨胀. 而当

$$\Omega_p^{-1}+3w<0 \tag{4.1.5}$$

时, $\ddot{a}>0$, 宇宙加速膨胀. 根据方程 (4.1.4) 我们发现随着宇宙膨胀, Phantom 暗能量的能量密度将增加, 又因为物质的能量密度随宇宙膨胀减小, 所以 Ω_p^{-1} 随着时间减少, 当宇宙进入全部由 Phantom 暗能量控制时期, $\Omega_p^{-1}=1$. 因为 $w<-1$, 这样在某一时刻必然会发生 $\Omega_p^{-1}+3w<0$ 的情况, 即宇宙从此进入加速膨胀时期. 如果假定 $t=t_m$ 时宇宙正好由减速膨胀演化到加速膨胀即 $\ddot{a}(t_m)=0$; 利用方程 (4.1.2) 可得与 t_m 相应的红移 z_m $\left(z=\dfrac{a_0}{a}-1\right)$ 为

$$1+z_m=\left[\frac{-(3w+1)\Omega_p^0}{\Omega_m^0}\right]^{-\frac{1}{3w}}. \tag{4.1.6}$$

显然不同的 w 会导致不同的 t_m 和 z_m.

下面我们分别来讨论宇宙在物质控制时期和 Phantom 暗能量控制时期标度因子的演化. 我们先来研究在 Phantom 暗能量控制时期 $(t>t_m)$ 即宇宙做加速膨胀时的情况. 因为在加速膨胀过程中有 $\Omega_p^{-1}+3w<0$, 这样方程 (4.1.1) 可表示为

$$\frac{\dot{a}}{a}=H_0\sqrt{\Omega_p^0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)/2}\left[1+\frac{\Omega_m^0}{\Omega_p^0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3w}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1.7}$$

因为在宇宙刚开始做加速膨胀时有 $\dfrac{\Omega_m^0}{\Omega_p^0}\left(\dfrac{a}{a_0}\right)^{3w}=1$, 又因为 $w<-1$, 我们发现当 $t>t_m$ 时有 $\dfrac{\Omega_m^0}{\Omega_p^0}\left(\dfrac{a}{a_0}\right)^{3w}<1$, 因此可将式 (4.1.7) 做二项式展开. 展开后再做积分可得

$$\Gamma t+c=\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3(1+w)/2}\left[\frac{2}{3(1+w)}-\frac{\Omega_m^0a^{3w}}{\Omega_p^0a_0^{3w}(9w+3)}+\cdots\right], \tag{4.1.8}$$

式中 $\Gamma=H_0\sqrt{\Omega_p^0}$, c 为积分常数. 可见在方程 (4.1.8) 的中括号中除了第一项之外, 所有其他项都随宇宙膨胀而减小很快. 这样我们可以只保留第一项而忽略其他项, 因此宇宙标度因子在 Phantom 暗能量控制时期可近似表示为

$$a^{3(1+w)/2}(t)=\frac{3(1+w)}{2}\Gamma t+c. \tag{4.1.9}$$

接着我们来讨论 $t < t_m$ 时即在无压物质控制时期, 宇宙标度因子随时间的变化. 将方程 (4.1.2) 变形, 我们得到

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0\sqrt{\Omega_m^0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2}\left[1+\frac{\Omega_p^0}{\Omega_m^0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3w}\right]^{1/2}. \tag{4.1.10}$$

因为 $w < -1$, 由减速条件 (4.1.4) 可知 $\frac{\Omega_p^0}{\Omega_m^0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3w} < 1$, 所以也可将式 (4.1.10) 做二项式展开. 积分并考虑到初始条件 $t \to 0$ 时 $a \to 0$, 有

$$\Gamma t = a^{3/2}\left[\frac{2}{3} - \frac{(1+z)^{3w}\Omega_p^0}{3(1-2w)\Omega_m^0} + \frac{(1+z)^{6w}}{4(1-4w)}\left(\frac{\Omega_p^0}{\Omega_m^0}\right)^2 + \cdots\right]. \tag{4.1.11}$$

显然式 (4.1.11) 中括号中除了第一项之外所有其他项都随着红移的增大而飞快减小, 因此在物质控制时期宇宙标度因子可近似表示为

$$a^{3/2}(t) = \frac{3}{2}\Gamma t. \tag{4.1.12}$$

由于宇宙标度因子是连续变化的, 这样利用式 (4.1.12) 我们可以确定方程 (4.1.9) 中的常数 c. 从而可以得到当 $t > t_m$ 时, 有

$$\left[\frac{a(t)}{a(t_m)}\right]^{3(1+w)/2} = 1 + \frac{3/2(w+1)\Gamma(t-t_m)}{a^{3(1+w)/2}(t_m)} = 1 + (w+1)\frac{t-t_m}{t_m}. \tag{4.1.13}$$

将式 (4.1.13) 变形, 我们得到在 Phantom 暗能量控制时期宇宙标度因子可表示为

$$a(t) = \frac{a(t_m)}{[-w+(1+w)t/t_m]^{-\frac{2}{3(1+w)}}}, \quad t > t_m. \tag{4.1.14}$$

因为对 Phantom 暗能量 $1+w<0$, 由式 (4.1.14) 很容易发现 $a(t)$ 在

$$t^* = \frac{w}{1+w}t_m \tag{4.1.15}$$

时发散, 此时宇宙的标度因子趋向无穷大. 可见 Phantom 暗能量所控制的宇宙存在一个未来奇点. 下面我们来看看 Phantom 暗能量的能量密度和压强随时间的演化情况.

利用方程 (4.1.14) 和 (4.1.3), Phantom 暗能量 $(t > t_m)$ 的能量密度可表示为

$$\rho_p(t) = \frac{\rho(t_m)}{[-w+(1+w)t/t_m]^2}, \tag{4.1.16}$$

式中

$$\rho(t_m) \approx \frac{1}{6\pi G t_m^2}, \tag{4.1.17}$$

又由于 $p_p = w\rho_p$, 可见 Phantom 的能量密度和压强在 $t^* = \frac{w}{1+w}t_m$ 时也发散. 当 $t^* = \frac{w}{1+w}t_m$ 时, Phantom 能量密度为无穷大而压强则为负无穷大. 因为暗能量有排斥作用, 所有现存的物质结构都会最终会被 Phantom 暗能量所破坏, 即发生宇宙的 Big Rip. 这说明如果宇宙由 Phantom 暗能量控制, 我们的宇宙只有一个有限的生命. 根据对未来奇点的分类理论, 上面讨论的 Big Rip 属于第一类未来奇点.

4.2 宇宙的大破裂

由 4.1 节我们已经知道, 如果宇宙由 Phantom 暗能量所控制, 则宇宙会在将来的某一时刻发生 Big Rip. 在这节我们讨论 Phantom 暗能量是怎样破坏引力束缚系统的.

今天暗能量正控制着我们整个宇宙的演化, 为了研究它对一个局部的引力束缚系统的作用, 我们首先必须找到一个适当的度规, 它能描述一个被放在膨胀背景下的点质量 M 周围邻近的时空, 然后来研究在这个度规下实验粒子的短程线方程. 这个度规在小尺度上对应着一个静态的 Schwarzschild 度规而在大尺度上则对应一个随时间变化的 Friedmann 时空, 这样的度规已经被很多学者所研究 (Nesseris and Perivolaropoulos, 2004). 在牛顿近似下, 这种度规可表示为

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{a(t)\varrho}\right) \cdot \mathrm{d}t^2 - a(t)^2 \cdot [\mathrm{d}\varrho^2 + \varrho^2 \cdot (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)], \tag{4.2.1}$$

式中 ϱ 是随动的径向坐标. 利用 $r = a(t) \cdot \varrho$ 和上面度规所对应的短程线方程, 我们可以得到在牛顿近似下试验粒子的运动方程

$$-\left(\ddot{r} - \frac{\ddot{a}}{a}r\right) - \frac{GM}{r^2} + r\dot{\varphi}^2 = 0 \tag{4.2.2}$$

和

$$r^2\dot{\varphi} = L, \tag{4.2.3}$$

式中 L 是一常数, 它描述单位质量的角动量. 这样在牛顿近似下试验粒子的径向运动方程可表示为

$$\ddot{r} = \frac{\ddot{a}}{a}r + \frac{L^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}. \tag{4.2.4}$$

显然, 式 (4.2.4) 中右边第一项表示的就是宇宙膨胀对试验粒子运动的影响, 第二项

表示的是离心力的影响, 第三项则表示的是引力势的影响. 利用方程 $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$ 和 $\dot{\varphi}(t_m)^2 = \omega(t_m)^2 = G\frac{M}{r_m^3}$, 并定义无量纲量 $\bar{r} = \frac{r}{r_0}$, $\bar{\omega}_m = \omega_m t_m$ 和 $\bar{t} = \frac{t}{t_m}$, 这样式 (4.2.4) 可以表示为 (为了书写简单我们去掉字符上的 "–")

$$\ddot{r} - \frac{\omega_0^2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{2}{9}\frac{(1+3w)r}{(-w+(1+w)t)^2} = 0. \tag{4.2.5}$$

它表示在宇宙背景下, 在质量为 M 的星体外试验粒子的无量纲短程线方程. 我们假定运动方程 (4.2.5) 的初始条件为 $r(t=1) = r_{\min}$ 和 $\dot{r}(t=1) \approx 0$, 即开始时刻试验粒子做圆周运动. 从方程 (4.2.5) 可见, 因为对 Phantom 宇宙 $w < -1$, 宇宙膨胀作用项给试验粒子一个排斥力的作用并最终导致试验粒子在某一临界时间 t_{rip} 脱离星体的控制, 引力束缚系统破裂. 在表 4-1 中, 给出了 $w = -1.5$ 时 Phantom 暗能量宇宙中不同束缚系统被破坏的时间. 可见半径越大的系统, 破裂的时间越早. 通过数值计算, 在图 4-1 中给出了银河系中试验粒子的演化轨迹, 可见引力束缚系统

表 4-1　在 $w = -1.5$ 的 Phantom 暗能量宇宙中束缚系统的 "Rip" 时间

时间	事件
约 15 Gyr*	现在
$t_{\text{rip}} - 1$ Gyr	星系团破裂
$t_{\text{rip}} - 60$ Myr	银河系破裂
$t_{\text{rip}} - 3$ months	太阳系破裂
$t_{\text{rip}} - 30$ minutes	地球破裂
$t_{\text{rip}} - 10^{-19}$ s	原子破裂
$t_{\text{rip}} = 35$ Gyrs	大破裂

* 1Gyr = 10^9 年.

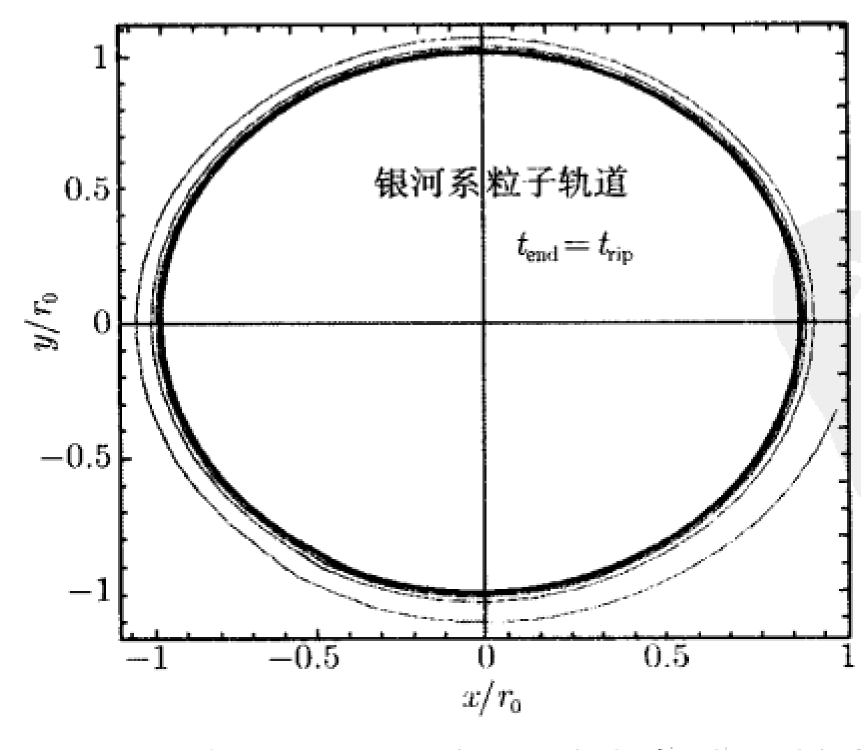


图 4-1　在 $w = -1.5$ 的 Phantom 暗能量宇宙中, 银河星系中试验粒子随时间的演化, 可见在某一时刻引力束缚系统开始破裂

在某一时刻开始破裂.

4.3 Phantom 和宇宙的暴胀

从前面的讨论可知, Phantom 标量场能够很好地解释现在宇宙的加速膨胀. 而我们知道, 在早期宇宙也经历了一个加速膨胀时期: 暴胀时期. 根据新暴胀理论, 暴胀宇宙是由慢滚的标量场来控制并以近似指数形式加速膨胀. 当慢滚条件不再满足时, 暴胀结束. 暴胀子在势能最小处振荡, 将自身的能量全部转化为热能从而使宇宙重新加热, 这样宇宙顺利进入辐射控制时期. Phantom 标量场是否也能用来解释宇宙早期的加速膨胀呢? 这一节, 我们就来讨论 Phantom 在早期宇宙中的应用, 即 Phantom 暴胀. 假定在一个均匀且各向同性的宇宙中, 存在一个与引力最小耦合的 Phantom 标量场, 由于 Phantom 场的动能为负, 因此它不同于普通标量场是随时间沿势往下滚动, 而是随时间从势能小的地方爬向势能大的地方, 所以要获得近似的指数膨胀, 我们不能像对普通标量场那样来定义慢滚因子, 而只能定义慢爬因子. 若假定在暴胀开始时, Phantom 处在势能的底部, 慢爬因子可以定义为 (Piao and Zhang, 2004)

$$\epsilon_{\text{pha}} \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \delta_{\text{pha}} \equiv -\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}H}. \tag{4.3.1}$$

若慢爬因子满足 $|\epsilon_{\text{pha}}| \ll 1$ 和 $|\delta_{\text{pha}}| \ll 1$, 则 Friedmann 方程和 Phantom 场的动力学方程可分别简化为

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3}V(\varphi) \tag{4.3.2}$$

和

$$3H\dot{\varphi} - V'(\varphi) = 0. \tag{4.3.3}$$

这样可以得到 $a \sim \mathrm{e}^{Ht}$, 显然在慢爬条件下, Phantom 标量场也能导致宇宙按近似的指数形式膨胀, 并且研究表明 Phantom 场的扰动也可以产生用来形成宇宙现在物质结构的标度不变谱. 但是, 我们知道一般的标量场在暴胀结束时能自然地将自身的能量转变为辐射能量, 从而使宇宙重热. 而 Phantom 场几乎不可能将自身的能量转变为辐射能量, 即使可以, 由于辐射能量密度随宇宙膨胀以 a^{-4} 减少, 而 Phantom 能量密度是随宇宙膨胀增加的, 因此宇宙也会很快的又进入 Phantom 控制时期. 这样对 Phantom 暴胀, 存在怎样顺利的从暴胀时期进入辐射控制时期这样一个问题, 即自然退出问题. 虽然在文献 (Piao and Zhang, 2004) 中引入一个额外标量场和虫洞来解决 Phantom 暴胀的退出问题, 但这些方法都不是很自然.

4.4 Phantom 宇宙模型中的时空涨落

从 4.1 节和 4.2 节中, 我们已经知道如果宇宙是由 Phantom 暗能量控制, 我们的宇宙将只有有限的生命, Phantom 能量最终会撕裂所有的宇宙物质结构. 是否能避免 Big Rip 的发生呢? Nojir 等给出了量子效应能使宇宙避免 Big Rip, 另外通过修改原始的 Caldwell Phantom 模型 Big Rip 也能避免. 这里我们讨论一个比较自然的方法来避免宇宙 Big Rip 的发生, 即 Phantom 暗能量控制时期宇宙自身的时空涨落.

4.4.1 时空涨落

时空涨落 (主动的时空涨落和被动的由物质场涨落引起的时空涨落的统称) 的传播由引力场的一阶微扰方程来描述, 并且微扰在全空间上的平均为 0, 但由于它们自身带有的能量是微扰的平方的函数, 因此在全空间上求平均时不为 0. 又由于爱因斯坦场方程是一个非线性方程, 时空中物质的分布是和背景时空相联系的, 这样当大量微扰在宇宙背景中传播时, 必然会影响背景时空中的能量分布, 从而会反过来影响背景时空的演化. 此即时空涨落的宇宙学效应, 它体现为一种引力效应, 恰与暗能量的效应相反.

通常用一个由宇宙微扰表示的有效能量–动量张量来描述时空涨落对背景度规的影响. 宇宙微扰一般可分为张量微扰、矢量微扰和标量微扰. 由于矢量微扰随宇宙膨胀是衰减的, 所以它的效应应该很小从而不予考虑. 张量微扰导致引力波的产生. 关于引力波在时空背景中传播对时空背景的影响在 20 世纪六七十年代就有很多学者研究. 他们发现在短波近似下 (引力波波长小于宇宙 Hubble 长度)反作用可以看作是辐射物质因为它们的物态方程为 $p_{\rm gw}=\dfrac{1}{3}\rho_{\rm gw}$; 但在长波近似下 $p_{\rm gw}\approx-\dfrac{1}{3}\rho_{\rm gw}$. 如果在宇宙早期有大量的引力波出现, 它们的引力效应可能对宇宙的演化产生重要的影响, 比如能加快核合成的速度和增加氦元素的丰度, 这也表明在宇宙早期不可能有太多的引力波. 在大多早期宇宙模型中, 标量微扰是最重要的, 因为正是它的存在为当今宇宙结构的形成提供了种子, 因此研究宇宙中标量微扰的引力效应也非常重要, 但是要得到一个用来描述引力效应的规范不变的有效能量–动量张量十分困难. 最近, Mukhanov 等提出一种规范不变的方法来讨论引力效应, 这种方法既适用于标量微扰也适用于张量微扰. 下面我们来简单介绍一下这种方法.

考虑一个空间平直的被扰动的 FRW 宇宙, 其度规可以表示为

$$\begin{aligned}{\rm d}s^2=&(1+2\varPhi){\rm d}t^2-2a(t)(B_{,i}-S_i){\rm d}x^i{\rm d}t-a^2(t)[(1-2\varPsi)\delta_{ij}\\&+2E_{,ij}+F_{i,j}+F_{j,i}+h_{ij}]{\rm d}x^i{\rm d}x^j,\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

式中 Φ, Ψ, B 和 E 是标量微扰, S_i 和 F_i 为横向三维矢量表示的是矢量微扰, h_{ij} 是三维无迹张量, 它表示的是张量微扰即引力波. 另外还假定宇宙中存在物质场 φ 及其微扰 $\delta\varphi$, 为了简单我们将度规和物质场统一用 q^a 来表示, 而它们的微扰则统一用 δq^a 来表示, 这样有

$$q^a = q_0^a + \delta q^a, \tag{4.4.2}$$

式中 q_0^a 是背景场, 它定义为 q^a 在等时超曲面上的均匀分布部分, 因此它只是时间的函数而与空间坐标无关; 但 δq^a 既是时间的函数也是空间的函数, 它满足条件

$$|\delta q^a| \ll q_0^a, \tag{4.4.3}$$

$$\langle \delta q^a \rangle = \lim_{V\to\infty} \frac{\displaystyle\int_V \delta q^a \mathrm{d}^3 x}{\displaystyle\int_V \mathrm{d}^3 x} = 0, \tag{4.4.4}$$

式中 $\langle\rangle$ 表示的是对空间求平均, 注意的是求平均是对背景度规而言的, 而不是对包含微扰的整体度规而言的.

若考虑一个无穷小的坐标变换

$$x'^0 = x^0 + \xi^0, \quad x'^i = x^i + \frac{1}{a^2}\delta^{ij}\xi_j, \tag{4.4.5}$$

这可以诱导出一个对 q 的变换

$$\tilde{q}^a = \mathrm{e}^{-L_\xi} q^a. \tag{4.4.6}$$

式中 L_ξ 表示 Lie 导数, 显然变量 q^a 不满足规范不变性, 如果用它来研究引力效应, 将得不到满足规范不变的有效能量–动量张量, 为此 Mukhanov 等定义一个新的变量 Q

$$Q = \mathrm{e}^{L_X} q, \tag{4.4.7}$$

式中 L_X 是一个对 X 的李微分算子, X 是一个四维量 X^μ 的简写, 这个四维量并不要求是一个四维矢量并且它的选择也不是唯一的. 一般可以用度规的微扰变量来构造

$$X^\mu = (a(B - a\dot{E}), \delta^{ij} E_{,j}), \tag{4.4.8}$$

式中 "·" 表示对坐标时间的微分. 这样在坐标变换 (4.4.5) 下有

$$\tilde{Q} = \mathrm{e}^{L_X L_\xi} \tilde{q} = \mathrm{e}^{L_X} q = Q. \tag{4.4.9}$$

显然, Q 满足规范不变性. 利用方程 (4.4.7), 我们可得

$$Q_0^a = q_0^a + \langle L_X \delta q^a \rangle + \frac{1}{2}\langle L_X^2 q_0^a \rangle \tag{4.4.10}$$

和线性微扰

$$\delta Q^a = \delta q^a + L_X q_0^a, \tag{4.4.11}$$

式中因为 X 是由度规微扰来构成, 所以有 $\langle X \rangle = 0$.

利用这个满足规范不变的变量 Q, 我们可以来讨论引力效应问题. 因为 q 满足爱因斯坦场方程

$$G_{\mu\nu}(q) - 8\pi G T_{\mu\nu}(q) \equiv \Pi_{\mu\nu}(q) = 0, \tag{4.4.12}$$

式中 $G_{\mu\nu}$ 是爱因斯坦张量, $T_{\mu\nu}$ 是物质的能量–动量张量. 因为在坐标变换下任意张量 $\Theta(\partial/\partial x, g(x)$ 满足关系

$$\tilde{\Theta}(\partial/\partial x, g(x)) = (\mathrm{e}^{-L_\xi}\Theta)(\partial/\partial x, g(x)) = \Theta(\partial/\partial x, (\mathrm{e}^{-L_\xi} g)(x)), \tag{4.4.13}$$

式中 $g(x)$ 是度规张量, 这样可以得到

$$\mathrm{e}^{L_X}\Pi_{\mu\nu}(q) = \Pi_{\mu\nu}(\mathrm{e}^{L_X} q) = \Pi_{\mu\nu}(Q) = 0. \tag{4.4.14}$$

将式 (4.4.14) 按微扰 δQ^a 展开并保留到二阶, 有

$$\Pi_{\mu\nu}(Q_0^a) + \Pi_{\mu\nu,a}|_{Q_0^a}\delta Q^a + \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu,ab}|_{Q_0^a}\delta Q^a \delta Q^b + O(\delta Q^3) = 0. \tag{4.4.15}$$

其中不考虑引力效应影响零阶近似应该满足爱因斯坦场方程

$$\Pi_{\mu\nu}(Q_0^a) = 0. \tag{4.4.16}$$

一阶微扰则满足线性爱因斯坦场方程

$$\Pi_{\mu\nu,a}\delta Q^a = 0. \tag{4.4.17}$$

由方程 (4.4.4) 可知, 对方程 (4.4.15) 求空间平均时, 一阶项 δQ^a 消失, 但二阶项存在, 这说明包含二阶微扰的场方程肯定不成立, 因此必须考虑这些涨落的引力效应对原方程的修正. 被修正的场方程可表示为

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(Q_0^a) = & -\frac{1}{2}\langle \Pi_{\mu\nu,ab}\delta Q^a \delta Q^b \rangle = -\frac{1}{2}\langle G_{\mu\nu,ab}\delta Q^a \delta Q^b \rangle \\ & + 4\pi G \langle T_{\mu\nu,ab}\delta Q^a \delta Q^b \rangle,\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

显然这个表达式是规范不变的, 利用方程 (4.4.12) 它可以表示为

$$G_{\mu\nu}(Q_0^a) = 8\pi G[T_{\mu\nu}(Q_0^a) + \tau_{\mu\nu}(\delta Q^a)], \tag{4.4.19}$$

式中

$$\tau_{\mu\nu}(\delta Q^a) = -\frac{1}{16\pi G}\langle \Pi_{\mu\nu,ab}\delta Q^a \delta Q^b\rangle. \tag{4.4.20}$$

这个规范不变的有效能量–动量张量就表示着引力微扰的引力效应对背景的作用.

利用上面简述的讨论引力效应的方法, Abramo 等讨论了混沌暴胀中的引力效应, 他们发现长波长微扰的引力效应像负的宇宙常数并且能缩短宇宙的暴胀期, 后来 Brandenberger 利用引力效应像负宇宙常数这个特性来解释宇宙学常数问题. 另外, 研究表明 Quintessence 中的引力效应能结束 Quintessence 暗能量控制时期. 下面我们利用上面的方法来讨论引力效应对 Phantom 暗能量所控制的宇宙以及 Phantom 暴胀模型的影响.

4.4.2 Phantom 暗能量宇宙中的引力效应

首先计算 Phantom 暗能量宇宙中微扰的有效能量–动量张量. 因为在膨胀宇宙中矢量微扰是衰减的, 并且张量微扰的有效能量–动量张量在 Phantom 宇宙中和在一般标量场宇宙中一样, 因此我们只考虑标量微扰的引力效应, 此时有

$$\tau_{\mu\nu}(\delta Q^a) = \tau_{\mu\nu}^{\text{scalar}}(\delta Q^a). \tag{4.4.21}$$

假定在 $t = t_m$ 时无压物质的能量密度和 Phantom 的能量密度相等, 并认为从此之后宇宙就进入 Phantom 控制时期. 这样在 $t < t_m$ 时宇宙主要由无压物质控制, 而在 $t > t_m$ 时宇宙则主要由 Phantom 暗能量控制. 另外我们假定 $t < t_m$ 时 Phantom 场的引力效应是非常小的从而可以忽略, 否则宇宙将不会进入 Phantom 控制相, 于是我们只考虑在由 Phantom 暗能量控制时期宇宙微扰的引力效应. 由于在 Phantom 暗能量控制时期, Hubble 常数随时间增加, 这样会导致宇宙的 Hubble 半径随时间减小, 另外由于宇宙的标度因子 a 随时间增长很快, 因此绝大部分宇宙微扰的波长都很快被拉伸到 Hubble 视界之外, 所以长波微扰的引力效应起主要作用. 尽管单个长波微扰的引力效应很弱, 但大量的长波微扰的引力效应可以对宇宙的演化产生很重要的作用. 因此我们只考虑长波近似下宇宙微扰的引力效应.

在牛顿规范下 $B = E = 0$, 微扰度规可表示为

$$ds^2 = (1 + 2\Phi)dt^2 - a^2(t)(1 - 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{4.4.22}$$

从线性爱因斯坦方程, 我们可以得到在牛顿规范下有

$$\Phi = \Psi, \tag{4.4.23}$$

因此标量微扰完全由 Φ 决定, Φ 叫做 Bardeen 势. 在牛顿规范下有效的能量–动量张量可表示为

$$\tau_{\mu\nu}(\delta Q^a) = \tau_{\mu\nu}(\delta q^a). \tag{4.4.24}$$

这样, 利用方程 (4.4.20) 式 (4.4.24) 可表示为

$$\tau_{\mu\nu} = \langle T^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi G} G^{(2)}_{\mu\nu} \rangle, \tag{4.4.25}$$

式中 $T^{(2)}_{\mu\nu}$ 和 $G^{(2)}_{\mu\nu}$ 分别是物质场能量–动量张量和爱因斯坦张量的二阶微扰表达式. 爱因斯坦张量的二阶微扰表达式可以利用公式

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^a \delta g^b = \frac{1}{2} \bigg[& \frac{1}{2} \delta g^{\alpha\beta}_{|\mu} \delta g_{\alpha\beta|\nu} + \delta g^{\alpha\beta} (\delta g_{\alpha\beta|\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu|\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\mu|\nu\beta} \\ & - \delta g_{\alpha\nu|\mu\beta}) + \delta g^{\alpha|\beta}_{\nu} (\delta g_{\alpha\mu|\beta} - \delta g_{\beta\mu|\alpha}) - \left(\delta g^{\alpha\beta}_{|\beta} - \frac{1}{2} \delta g^{|\alpha} \right) \\ & \cdot (\delta g_{\alpha\mu|\nu} + \delta g_{\alpha\nu|\mu} - \delta g_{\mu\nu|\alpha}) \bigg] \end{aligned} \tag{4.4.26}$$

求得, 其中短竖线表示求协变导数, 上下指标的升降由背景度规来实现.

根据 Phantom 标量场的 Lagrangian 量, 我们可以得到 Phantom 标量场的能量–动量张量

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi + V(\varphi) \right]. \tag{4.4.27}$$

将上面的能量–动量张量按 δg 和 $\delta\varphi$ 展开到二阶, 并利用公式 (4.4.26), 我们得到有效能量–动量张量 $\tau_{\mu\nu}$ 中的非 0 分量

$$\begin{aligned} \tau_{00} = & \frac{1}{8\pi G} [12H \langle \Phi \dot{\Phi} \rangle - 3 \langle \dot{\Phi}^2 \rangle + 9a^{-2} \langle \nabla \Phi^2 \rangle] - \frac{1}{2} \langle \delta \dot{\varphi}^2 \rangle \\ & - \frac{1}{2} a^{-2} \langle (\nabla \delta\varphi)^2 \rangle + \frac{1}{2} V_{,\varphi\varphi} \langle \delta\varphi^2 \rangle + 2V_{,\varphi} \langle \Phi \delta\varphi \rangle \end{aligned} \tag{4.4.28}$$

和

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = a^2 \delta_{ij} \bigg\{ & \frac{1}{8\pi G} \bigg[(24H^2 + 16\dot{H}) \langle \Phi^2 \rangle + 24H \langle \Phi \dot{\Phi} \rangle + \langle \dot{\Phi}^2 \rangle + 4 \langle \Phi \ddot{\Phi} \rangle \\ & - \frac{3}{4} a^{-2} \langle \nabla \Phi^2 \rangle \bigg] - 4\dot{\varphi}_0^2 \langle \Phi^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta \dot{\varphi}^2 \rangle - \frac{1}{2} a^{-2} \langle (\nabla \delta\varphi)^2 \rangle + 4\dot{\varphi}_0 \langle \Phi \delta \dot{\varphi} \rangle \\ & - \frac{1}{2} V_{,\varphi\varphi} \langle \delta\varphi^2 \rangle + 2V_{,\varphi} \langle \Phi \delta\varphi \rangle \bigg\}. \end{aligned} \tag{4.4.29}$$

显然, 要得到有效能量–动量张量 $\tau_{\mu\nu}$ 的值, 我们必须知道微扰的演化, 它们由线性爱因斯坦场方程决定. 对平直的宇宙, 一阶微扰方程可表示为

$$-3h(h\Phi + \Phi') + \nabla^2\Phi = 4\pi G a^2 \delta T_0^0, \tag{4.4.30}$$

$$(h\Phi + \Phi')_{,i} = 4\pi G a^2 \delta T_i^0, \tag{4.4.31}$$

$$\delta_i^j[(2h' + h^2)\Phi + \Phi'' + 3h\Phi'] = -4\pi G a^2 \delta T_i^j. \tag{4.4.32}$$

其中对包含微扰的 Phantom 标量场 $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$, 可得

$$\delta T_0^0 = a^{-2}(\varphi_0'^2\Phi - \varphi_0'\delta\varphi + V_{,\varphi}a^2\delta\varphi), \tag{4.4.33}$$

$$\delta T_i^0 = -a^{-2}\varphi_0'\delta\varphi_{,i}, \tag{4.4.34}$$

$$\delta T_i^j = a^{-2}(-\varphi_0'^2\Phi + \varphi_0'\delta\varphi' + V_{,\varphi}a^2\delta\varphi)\delta_i^j, \tag{4.4.35}$$

这里 “$'$” 表示对共形时间 $\eta = \int 1/a\mathrm{d}t$ 求导数, $h = a'/a$. 如果我们不考虑 Phantom 宇宙中的其他物质, Friedmann 方程可表示为

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[-\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right]. \tag{4.4.36}$$

将式 (4.4.36) 对时间求导数, 并利用 Phantom 场的运动方程

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - V'(\varphi) = 0, \tag{4.4.37}$$

可得一有用的关系式

$$\dot{H} = 4\pi G\dot{\varphi}^2. \tag{4.4.38}$$

将式 (4.4.38) 用共形时间表示, 得到

$$h^2 - h' = -4\pi G\varphi_0'^2. \tag{4.4.39}$$

这样, 由式 (4.4.30)~(4.4.34) 和 (4.4.35), 利用式 (4.4.39), 我们得到 Phantom 暗能量控制时期的一阶微扰方程

$$\Phi' + h\Phi = -4\pi G\varphi_0'\delta\varphi, \tag{4.4.40}$$

$$\nabla^2\Phi - 3h(h\Phi + \Phi') = 4\pi G(\varphi_0'^2\Phi - \varphi_0'\delta\varphi' + V_{,\varphi}a^2\delta\varphi), \tag{4.4.41}$$

$$\Phi'' + 3h\Phi' + (2h' + h^2)\Phi = -4\pi G(-\varphi_0'^2\Phi + \varphi_0'\delta\varphi' + V_{,\varphi}a^2\delta\varphi). \tag{4.4.42}$$

利用方程 (4.4.40), 可以将有效能量–动量张量 $\tau_{\mu\nu}$ 中的 $\delta\varphi$ 用 Φ 及其微分来表示. 这样, 要求出 $\tau_{\mu\nu}$ 我们只需求 Φ 及其导数. 下面我们利用上面的微扰方程求 Φ 和它的一阶以及二阶导数. 用方程 (4.4.42) 减去方程 (4.4.41) 并利用方程 (4.4.40) 和 (4.4.37), 我们得到一个 Φ 的二阶微分方程

$$\Phi'' - \nabla^2\Phi + 2\left(h - \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'}\right)\Phi' + 2\left(h' - h\frac{\varphi_0''}{\varphi_0'}\right)\Phi = 0. \tag{4.4.43}$$

这个方程和在一般标量场控制的宇宙中得到的微分方程一致. 引入一个新的变量 u

$$u = \frac{a}{\varphi_0'}\Phi, \tag{4.4.44}$$

这样方程 (4.4.43) 可以表示为

$$u'' - \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta}u = 0, \tag{4.4.45}$$

式中 $\theta = h/a\varphi_0'$. 如果我们考虑平面波微扰, k 为波矢, 这样在短波近似下 $k^2 \gg \theta''/\theta$, 式 (4.4.45) 中的第三项可以忽略, 容易得到

$$u \propto \mathrm{e}^{\pm ik\eta}. \tag{4.4.46}$$

而在长波近似下 $k^2 \ll \theta''/\theta$, 方程 (4.4.45) 中的第二项可以忽略, 便有

$$u \approx C_1\theta + C_2\theta\int\frac{\mathrm{d}\eta}{\theta^2} = \frac{A}{\varphi_0'}\left(\frac{1}{a}\int\mathrm{d}\eta a^2(\eta)\right)', \tag{4.4.47}$$

式中 C_1, C_2 和 A 是积分常数. 这样, 我们得到在长波近似下

$$\Phi_k \approx A_k\left(1 - \frac{H}{a}\int a\mathrm{d}t\right), \tag{4.4.48}$$

式中 A_k 是积分常数. 在短波近似下

$$\Phi_k \propto \dot{\varphi}_0. \tag{4.4.49}$$

这里 "·" 表示对坐标时间 t 求导. 联合方程 (4.4.48) 和 (4.1.14) 我们得到在长波近似下

$$\Phi_k = \begin{cases} \beta A_k = \tilde{A}_k, & w \neq -5/3, \\ A_k[1 - \ln\tilde{\chi}(t)] \equiv A_k z(t), & w = -5/3, \end{cases} \tag{4.4.50}$$

式中 β 是积分常数, 且

$$\widetilde{\chi}(t) \equiv \frac{5}{3} - \frac{2t}{3t_m}. \tag{4.4.51}$$

显然, 当宇宙从 t_m 演化到 $t_{\rm brip}$ 时, $\widetilde{\chi}(t)$ 变化为从 1 到 0, $z(t)$ 从 1 变化到 ∞. 由式 (4.4.51) 我们很容易得到当 $w \neq -5/3$ 时

$$\dot{\Phi}_k = \ddot{\Phi}_k = 0, \tag{4.4.52}$$

而当 $w = -5/3$ 时

$$\dot{\Phi}_k = \frac{2}{3t_m\widetilde{\chi}(t)z(t)}\Phi_k \tag{4.4.53}$$

和

$$\ddot{\Phi}_k = \frac{4}{9t_m^2\widetilde{\chi}(t)^2 z(t)}\Phi_k. \tag{4.4.54}$$

如果定义一个新变量

$$\zeta = \frac{2}{3}\frac{h^{-1}\dot{\Phi} + \Phi}{1+w} + \Phi, \tag{4.4.55}$$

将这个变量对坐标时间求导, 容易得到

$$\frac{3}{2}\dot{\zeta}h(1+w) = \ddot{\Phi} + 2\left(H - \frac{\ddot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}_0'}\right)\dot{\Phi} + 2\left(\dot{H} - H\frac{\ddot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}_0}\right)\Phi. \tag{4.4.56}$$

由方程 (4.4.43) 可见, 在长波近似下

$$\dot{\zeta} = 0. \tag{4.4.57}$$

这说明当波长大于 Hubble 半径时, ζ 是个守恒量. 这个守恒量首先由 Bardeen 用一种完全不同的方法求得, 它在宇宙的任何时期都是不变的, 这对研究暴涨宇宙模型中密度微扰的涨落谱非常有用.

有了上面的讨论, 下面我们就可以来计算 Phantom 暗能量宇宙中引力作用的有效能量–动量张量了. 由本篇第 1 章, 我们知道 Phantom 暗能量的态方程因子 $w < -1$, 这导致了如果宇宙由 Phantom 暗能量控制, 宇宙标度因子和能量密度在 $t = wt_m/(1+w)$ 时发散即发生 Big Rip, 这说明了我们的宇宙只有有限的生命. 为了说明引力效应对 Big Rip 的可能影响, 我们考虑一个 w 为常数的 Phantom 暗能量模型. 利用方程 (4.1.16) 和 $p = w\rho$, 我们得到

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{-(w+1)\rho(t_m)}{[-w + (1+w)t/t_m]^2} \tag{4.4.58}$$

和

$$
\begin{aligned}
V(\varphi) &= \frac{(-w+1)\rho(t_m)}{2[-w+(1+w)t/t_m]^2} \\
&= \frac{(-w+1)\rho(t_m)}{2}\exp\left[\frac{-2(1+w)\varphi}{t_m\sqrt{-(w+1)\rho(t_m)}}\right].
\end{aligned} \tag{4.4.59}
$$

根据引力效应对应的有效能量-动量张量, 我们可以定义引力效应对应的能量密度和压强为

$$
\rho_{\rm br} \equiv \tau_0^0, \quad p_{\rm br} \equiv -\frac{1}{3}\tau_i^i. \tag{4.4.60}
$$

如果我们只考虑长波微扰的引力效应, 则方程 (4.4.28) 和 (4.4.29) 中包含对空间坐标求微分的项都可以忽略, 这样利用上面的式子和公式 (4.1.14), (4.1.16), (4.4.40), (4.4.52), (4.4.53), (4.4.54), 在长波近似下表达式 $\tau_{\mu\nu}$ 可简化为

$$
\rho_{\rm br} = \begin{cases} -\dfrac{(1-w)}{6\pi G t_m^2[-w+(1+w)t/t_m]^2}\langle\Phi^2\rangle, & w \neq -5/3, \\[2ex] \dfrac{2}{9\pi G t_m^2 \chi'(t)^2}\left(\dfrac{1}{z(t)^2}+\dfrac{3}{z(t)}-2\right)\langle\Phi^2\rangle, & w = -5/3, \end{cases} \tag{4.4.61}
$$

$$
p_{\rm br} = \begin{cases} -\rho_{\rm br}, & w \neq -5/3, \\[2ex] -\dfrac{2}{9\pi G t_m^2 \chi'(t)^2}\left(\dfrac{2}{z(t)^2}+\dfrac{3}{z(t)}-2\right)\langle\Phi^2\rangle, & w = -5/3, \end{cases} \tag{4.4.62}
$$

式中下标 br 表示引力效应. 如果给引力效应的长波贡献类似的定义一个态方程参数 $w_{\rm br} = p_{\rm br}/\rho_{\rm br}$, 则有

$$
w_{\rm br} = \begin{cases} -1, & w \neq -5/3, \\[2ex] -\dfrac{2+3z(t)-2z(t)^2}{1+3z(t)-2z(t)^2}, & w = -5/3. \end{cases} \tag{4.4.63}
$$

显然当 $w \neq -5/3$ 时, 引力效应的长波贡献像一个负的随时间变化的宇宙学常数, 这个结果与暴胀宇宙学中的结果非常相似. 然而对于 $w = -5/3$, $w_{\rm br}$ 随时间变化, 在 $t = t_m$ 时 $w_{\rm br} = -3/2$, 而在 $t = t_{\rm brip}$ 时 $w_{\rm br} = -1$. 为了说明引力效应对整个暗宇宙演化的影响, 我们可以比较 $\rho_{\rm br}$ 和宇宙中 Phantom 的能量密度 $\rho_{\rm phan}$, 从方程 (4.1.16) 和 (4.4.61) 有

$$
\frac{\rho_{\rm br}}{\rho_{\rm phan}} = \begin{cases} -(1-w)\langle\Phi^2\rangle, & w \neq -5/3, \\[2ex] \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{z(t)^2}+\dfrac{3}{z(t)}-2\right)\langle\Phi^2\rangle, & w = -5/3. \end{cases} \tag{4.4.64}
$$

如果上面的比值为负数, 则说明引力效应将抵消 Phantom 的能量密度, 并且比值若为 -1, Phantom 的能量密度则完全被引力效应所抵消, 宇宙将重新进入物质控制时期. 要确定这个比值, 显然需要知道两点函数 $\langle \Phi^2 \rangle$ 的值, 它能够通过对所有的 Φ_k 求积分而获得

$$\langle \Phi(t)^2 \rangle = \int_{k_\mathrm{i}}^{k_\mathrm{t}} \frac{k^3}{2\pi^2} \langle \Phi_k(t)^2 \rangle \frac{\mathrm{d}k}{k}, \tag{4.4.65}$$

式中 $k_\mathrm{i} = a_\mathrm{i} H_\mathrm{i}$ 和 $k_\mathrm{t} = a(t)H(t)$ 分别是红外和紫外截断. 红外截断可以选择为这样一个长度标度: 在这个标度之上所有的涨落都没有物理意义. 如果存在暴胀时期, 这个标度可选为暴胀开始时的 Hubble 半径. 而紫外截断 $k_\mathrm{t} = a(t)H(t)$ 是随时间演化的, 其中时间 t 为我们计算引力效应时的时间.

4.4.3 Phantom 暗能量宇宙的结束

为了简单起见, 我们假设宇宙正好在现在进入 Phantom 暗能量控制时期, 即 $t_m \sim t_0$. 事实上这个假设也比较合理, 因为如果宇宙暗能量是 Phantom 能量, 观测表明宇宙加速要比由宇宙常数或 Quintessence 引起的发生得更近. 为了计算引力作用的红外效应, 由上一节我们知道必须对所有的 Φ_k 求积分. 因为在 Phantom 暗能量控制时期, 宇宙做加速膨胀, 这样将大量本来在视界之内的 Φ_k 很快拉伸到视界之外, 因此所有的红外 Φ_k 包含两部分: 第一部分是今天已经在视界之外的; 第二部分是今天在视界之内但在时间 $t(t > t_0)$ 之前被拉到视界之外的. 所以我们要将 Phantom 控制时期 Φ_k 的值 Φ_pk 与物质控制时期的 Φ_mk 值联系起来. 对第一部分, $\Phi_\mathrm{pk}(t)$ 和 $\Phi_\mathrm{mk}(t_0)$ 可以利用守恒量 ζ[式 (4.4.57)] 联系起来. 在物质控制时期, $w = 0$ 且 $\dot{\Phi}_\mathrm{mk} = 0$, 我们得到

$$\zeta(\Phi_\mathrm{mk}) = \frac{5}{3} \Phi_\mathrm{mk}. \tag{4.4.66}$$

在 Phantom 暗能量控制时期, 当 $w \neq -5/3$ 时, 因为 $\dot{\Phi}_\mathrm{pk} = 0$, 所以有

$$\zeta(\Phi_\mathrm{pk}) = \frac{5 + 3w}{(3 + 3w)\Phi_\mathrm{pk}}. \tag{4.4.67}$$

根据 $\zeta(\Phi_\mathrm{mk}) = \zeta(\Phi_\mathrm{pk})$, 可得

$$\Phi_\mathrm{pk} = \frac{5(1 + w)}{3w + 5} \Phi_\mathrm{mk}. \tag{4.4.68}$$

对第二部分, 我们假定在时间 t_H 微扰谱的波长刚好等于 Hubble 半径, 其中时间 t_H 由 $a(t_\mathrm{H})H = k$ 决定. 方程 (4.4.49), (4.4.58) 和 (4.4.50) 给出了 Φ 在波长大

于和小于 Hubble 半径时随时间的演化. 利用这些方程, 我们可以将 $\Phi_{\mathrm{pk}}(t>t_{\mathrm{H}})$ 表示为

$$\Phi_{\mathrm{pk}}(t)=\Phi_{\mathrm{mk}}(t_0)\frac{t_0}{[-wt_0+(1+w)t_{\mathrm{H}}]}. \tag{4.4.69}$$

而当 $w=-5/3$ 时, 从方程 (4.4.48), 我们得到物质控制时期在长波近似下 $\Phi_{\mathrm{mk}}=\frac{3}{5}A_k$, 这样利用方程 (4.4.50), 对那些现在波长大于 Hubble 半径的模式, 有

$$\Phi_{\mathrm{pk}}(t)=\frac{5}{3}\Phi_{\mathrm{mk}}(t_0)z(t). \tag{4.4.70}$$

而对那些现在波长小于 Hubble 半径但在时间 $t(t>t_0)$ 超过 Hubble 半径的模式, 利用方程 (4.4.49), (4.4.58) 和 (4.4.50), 我们得到

$$\Phi_{\mathrm{pk}}(t)=\Phi_{\mathrm{mk}}(t_0)\frac{\chi'(t_0)}{\chi'(t_{\mathrm{H}})}\frac{z(t)}{z(t_{\mathrm{H}})}. \tag{4.4.71}$$

根据对宇宙微波背景各向异性和涨落谱的观测结果, 我们可以假设今天密度涨落谱的结构为

$$P(k)\equiv\frac{k^3}{2\pi^2}|\Phi_{mk}(t_0)|^2=C\left(\frac{k}{k_{\mathrm{COBE}}}\right)^{\lambda}, \tag{4.4.72}$$

式中 $k_{\mathrm{COBE}}\equiv\alpha a_0H_0$, $C^{1/2}\approx10^{-5}$, $\alpha\approx7.5$. 综合探测器 Maxima-1, Boomerang 和 COBE 对宇宙微波背景各向异性观察的结果并估计系统误差, 蓝谱倾斜率应该在区域 $0\leqslant\lambda<0.27$, 最近的数据表明这个上限要稍微小于 WMAP 的结果 (Jaffe et al., 2001). 将方程 (4.4.68), (4.4.69) 和 (4.4.72) 代入到方程 (4.4.65) 中, 我们得到, 当 $w\neq-5/3$ 时

$$\begin{aligned}\langle\Phi(t)^2\rangle\approx&\frac{25C(w+1)^2}{(3w+5)^2(\alpha a_0H_0)^{\lambda}}\int_{k_i}^{k_0}k^{\lambda-1}\mathrm{d}k\\&+\frac{Ct_0^2}{(\alpha a_0H_0)^{\lambda}}\int_{k_0}^{k_t}\frac{k^{\lambda-1}}{[-wt_0+(1+w)t_H]^2}\mathrm{d}k\equiv g_1+g_2,\end{aligned} \tag{4.4.73}$$

式中 g_1 指的是第一个积分, 而 g_2 指的是第二个积分, 计算可得

$$g_1\equiv\frac{25C(w+1)^2}{(3w+5)^2(\alpha a_0H_0)^{\lambda}}\int_{k_i}^{k_0}k^{\lambda-1}\mathrm{d}k=\frac{25C(w+1)^2}{(3w+5)^2}f_1, \tag{4.4.74}$$

这里我们定义了

$$f_1=\begin{cases}\ln\dfrac{a_0H_0}{k_i}, & \lambda=0,\\ \lambda^{-1}\alpha^{-\lambda}[1-k_i^{\lambda}(a_0H_0)^{-\lambda}], & \lambda\neq0.\end{cases} \tag{4.4.75}$$

因为暴胀 e-folding 数 N 大约为 60 ~ 70, 这说明 $\ln(a_0H_0/k_i) \sim \mathcal{O}(10^1)$. 另外, 因为 $C \sim 10^{-10}$, 所以有 $g_1 \ll 1$.

$$
\begin{aligned}
g_2 \equiv & \frac{Ct_0^2}{(\alpha a_0 H_0)^\lambda}\int_{k_0}^{k_t}\frac{k^{\lambda-1}}{[-wt_0+(1+w)t_H]^2}\mathrm{d}k \\
= & \frac{(1+3w)}{6(1+w)+(1+3w)\lambda}\frac{C}{\alpha^\lambda}\left\{\left[-w+(1+w)\frac{t}{t_0}\right]^{-\frac{1+3w}{3(1+w)}\lambda-2}-1\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.4.76}
$$

显然在开始时 $(t \sim t_0)$ $g_2 \sim 0$, 但它随时间增长并当 $t = t_{\mathrm{brip}}$ 时达到无穷大. 因此在讨论引力效应时我们可以忽略 g_1.

对于 $w = -5/3$ 的情况, 将方程 (4.4.70)~(4.4.72) 代入方程 (4.4.65), 有

$$
\begin{aligned}
\langle \Phi(t)^2\rangle = & \frac{25Cz(t)^2}{9k_{\mathrm{COBE}}^\lambda}\int_{k_i}^{k_0}k^{\lambda-1}\mathrm{d}k+\frac{Cz(t)^2}{k_{\mathrm{COBE}}^\lambda}\int_{k_0}^{k_t}\frac{k^{\lambda-1}}{z(t_H)^2\widetilde{\chi}(t_H)^2}\mathrm{d}k \\
= & 2Cz(t)^2\left[\frac{25}{18}f_1+f_2(t)\right],
\end{aligned}
\tag{4.4.77}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
f_2(t) \equiv & \frac{1}{2k_{\mathrm{COBE}}^\lambda}\int_{k_0}^{k_t}\frac{k^{\lambda-1}}{z(t_H)^2\widetilde{\chi}(t_H)^2}\mathrm{d}k \\
= & 2\alpha^{-\lambda}(1+\lambda)\mathrm{e}^{-2(1+\lambda)}Ei[2(1+\lambda)z(t)]-\frac{\widetilde{\chi}(t)^{-2(1+\lambda)}}{\alpha^\lambda z(t)},
\end{aligned}
\tag{4.4.78}
$$

式中 $Ei(x)$ 为指数积分函数. 当 $x \to \infty$ 时 $Ei(x)$ 可展开为

$$
Ei(x) \sim \mathrm{e}^x(x^{-1}+x^{-2}+\cdots),
\tag{4.4.79}
$$

这样当 t 接近 t_{brip} 时, 我们有

$$
f_2(t) \approx \alpha^{-\lambda}\widetilde{\chi}(t)^{-2(1+\lambda)}\left[\frac{z(t)^{-2}}{2(1+\lambda)}+\cdots\right].
\tag{4.4.80}
$$

因为上面的结果在 Big Rip 时趋向无穷大, 我们可以忽略方程 (4.4.77) 中的 $\frac{25}{18}f_1$ 项. 这样利用方程 (4.4.64), (4.4.73), (4.4.76) 和 (4.4.77), 可得

$$
\frac{\rho_{\mathrm{br}}}{\rho_{\mathrm{phan}}} \approx \begin{cases} -\dfrac{(1+3w)(1-w)}{6(1+w)+(1+3w)\lambda}\dfrac{C}{\alpha^\lambda}\left(\left[-w+(1+w)\dfrac{t}{t_0}\right]^{-\frac{1+3w}{3(1+w)}\lambda-2}-1\right), & w \neq -5/3, \\ \dfrac{8C}{3}[1+3z(t)-2z(t)^2]f_2(t), & w = -5/3. \end{cases}
\tag{4.4.81}
$$

从式 (4.4.81) 可见, 对 $w \neq -5/3$ 的情况, 因为 $w < -1$, 所以能量密度的比值一直为负, 并且在 Big Rip 发生之前 $t \to t_{\rm brip}$ 达到 -1. 然而, 当 $w = -5/3$ 时, 这个比值在现在是正的并会在一段时间内保持为正值然后再变为负值. 在图 4-2 中我们给出了能量密度比值随 t/t_0 的演化曲线, 由图可知大约在 $t \approx 1.81t_0$ 时, 这个比值都变为负值. 这说明了在 $w = -5/3$ 的情况, 引力效应在开始一段时间内加强了 Phantom 暗能量产生的效应, 然后再抵消它. 在 $t = t_{\rm brip}$ 时, 这个比值趋向无穷大. 因此, Phantom 暗能量控制时期将会在 Big Rip 之前被引力效应终止.

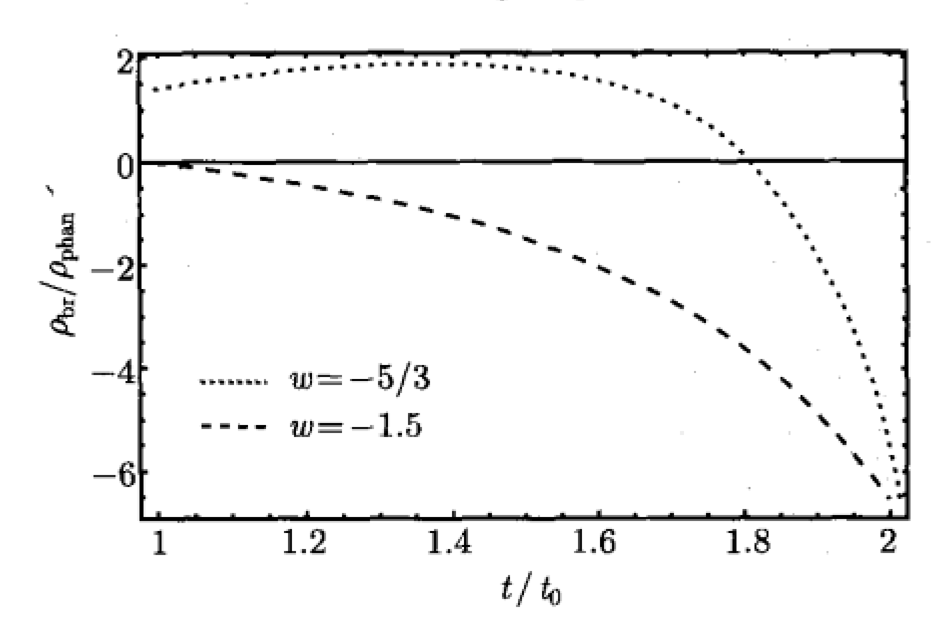


图 4-2　$w = -1.5$ 和 $w = -5/3$ 时 $\rho_{\rm br}/\rho_{\rm phan}$ 在 Phantom 控制早期随时间 t/t_0 的演化曲线. 图中参数被选定为 $\lambda = 0.27, \alpha = 7.5, C = 10^{-10}$ 并且纵坐标的标度为 10^{-10}

在图 4-3 中我们给出了能量密度比值随 t/t_0 在接近 Big Rip 时间的一段时间内的演化曲线, 由图可见在 Big Rip 发生之前, $|\rho_{\rm phan}/\rho_{\rm br}|$ 的值达到 -1(即 $\lg(|\rho_{\rm phan}/\rho_{\rm br}|)$ 为零), 这说明引力效应在 Big Rip 发生之前能完全抵消 Phantom 暗能量, 从而阻止 Big Rip 的发生. 虽然在图上看来这个时间离 $t_{\rm rip}$ 很近, 但因为 t_0(≈15Gyr) 很大, 引力效应还是能在离 Big Rip 比较远的时间来结束 Phantom 暗能量的控制, 在表 4-2 中我们给出了一些数值结果. 下面我们来做一些详细的理论推导. 对 $w \neq -5/3$, 当 $\dfrac{\rho_{\rm br}}{\rho_{\rm phan}} \approx -1$ 时, Phantom 暗能量宇宙结束, 这样我们有

$$t \approx \frac{t_0}{1+w}\left(\left[\frac{6(1+w)+(1+3w)\lambda}{(1+3w)(1-w)}\frac{\alpha^\lambda}{C}+1\right]^{-\frac{3(1+w)}{(1+3w)\lambda+6(1+w)}}+w\right). \tag{4.4.82}$$

如果定义 $t' \equiv t_{\rm brip} - t$, 它表示 Phantom 暗能量宇宙结束的时间离 Big Rip 发生的时间还有多久, 则有

$$t' \equiv t_{\rm brip} - t = -\frac{t_0}{1+w}\left[\frac{6(1+w)+(1+3w)\lambda}{(1+3w)(1-w)}\frac{\alpha^\lambda}{C}+1\right]^{-\frac{3(1+w)}{(1+3w)\lambda+6(1+w)}}. \tag{4.4.83}$$

若 w 不变, 显然 t' 随 λ 的增加而增加, 这说明引力作用大小正比于涨落谱的倾斜率. 如果涨落谱为标度不变谱, 即 $\lambda = 0$, 引力效应对 Quintessence 很微弱, 但在 Phantom 情况, 方程 (4.4.83) 表明它仍然能产生很强的效应以致能结束 Phantom 暗能量所控制的宇宙. 当 $w = -5/3$ 时, 方程 (4.4.81) 不能给出一个严格的解析结果, 因此只能用数值的方法. 在表 4-2 中, 我们给出了 $w \neq -5/3$ 和 $w = -5/3$ 时的数值结果.

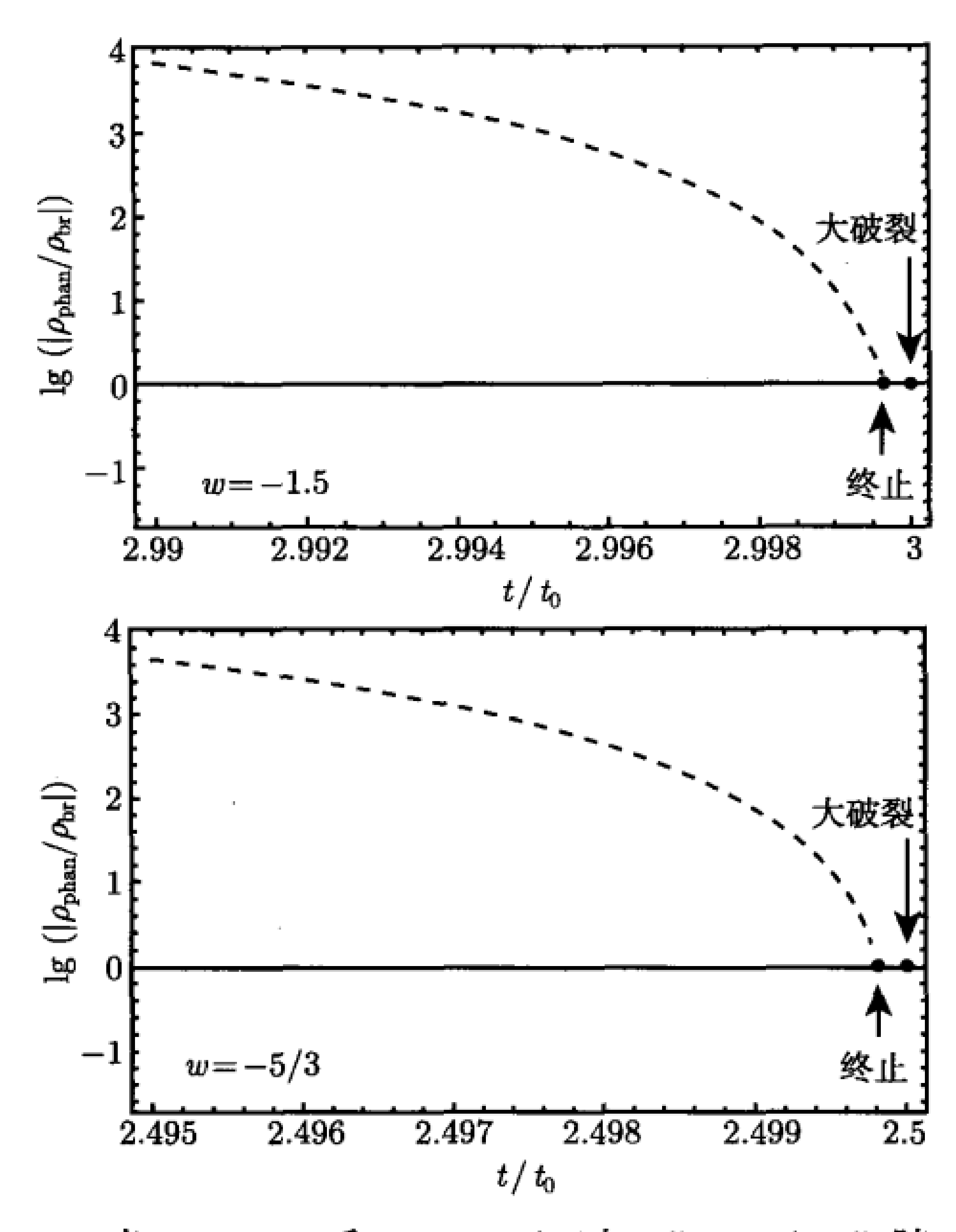


图 4-3 当 $w = -1.5$ 和 $w = -5/3$ 时 $\lg(|\rho_{\rm phan}/\rho_{\rm br}|)$ 随 t/t_0 的演化曲线, 其中参数被选定为 $\lambda = 0.27, \alpha = 7.5, C = 10^{-10}$. 横坐标的步长为 0.0005 并且 $t_0 \approx$15Gyr

通过对比表 4-1 和表 4-2, 我们发现 Phantom 暗能量宇宙的引力效应能够阻止宇宙 Big Rip 的发生. 若假定 $w = -1.5$, 从这两个表可见虽然比太阳系更大的星系都会被 Phantom 暗能量所破坏, 但是太阳系以及比它小的星系都会被保存. 并且 λ 越大, Phantom 暗能量宇宙被结束得越早. 当 $\lambda \to \infty$ 时, 我们发现对 $w \neq -5/3$ 和 t_0 = 15Gyr 的情况 $t' \approx$ 13Gyr, 这说明在这种极限情况下引力效应不能阻止 Phantom 暗能量宇宙的出现. 另外若固定 λ, 我们发现 w 越大, Phantom 暗能量宇宙被结束得也越早.

表 4-2　Phantom 相结束时距宇宙 Big Rip 的时间

w	$t'(yr)(\lambda=0)$	$t'(yr)(\lambda=0.27)$
-1.1	4.2×10^6	6.4×10^8
-1.3	9.6×10^5	1.9×10^7
-1.5	5.1×10^5	5.2×10^6
$-5/3$	3.4×10^5	2.7×10^6
-1.8	3×10^5	2×10^6
-2	2.4×10^5	1.3×10^6

注：其中参数为 $t_0=15\text{Gyr}, \alpha=7.5, C=10^{-10}$

4.4.4　Phantom 暴胀宇宙中的引力效应

Mukhanov 等 (1997) 指出，在通常标量场引起的暴胀宇宙中，当满足一定条件时，长波的引力效应是可能结束暴胀过程的，是否在 Phantom 暴胀宇宙中长波的引力效应也能达到这样的效果呢？如果能，我们就可以利用 Phantom 和宇宙中长波的引力效应来解释整个宇宙的演化：在宇宙极早期即暴胀时期，宇宙由 Phantom 能量控制，宇宙做近似的指数膨胀，这样能解决标准宇宙模型中的几个疑难. 当暴胀持续一段时间后，由于大量的宇宙微扰都被拉到 Hubble 半径之外，长波的引力效应将导致暴胀宇宙的结束，由于产生大量的引力波以及 Curvaton 效应，宇宙被重新加热从而进入辐射控制时期，然后进入物质控制时期. 由于在辐射和物质控制时期宇宙做减速膨胀，长波微扰慢慢进入 Hubble 视界，这样长波微扰的引力效应慢慢减弱，被引力效应抵消的 Phantom 能量又重据优势，最终导致宇宙又进入加速膨胀时期. 其实，现在的加速膨胀可以看作下一个暴胀的开始，而这个暴胀最终又被引力效应所终止.

因为在暴胀模型中，波长以指数的形式被拉伸，所以红外模式的相空间快速增长，而 Hubble 半径近似不变，因此我们可以认为长波的引力效应增加并起主要作用. 在牛顿规范下，包含标量微扰的度规也可由方程 (4.4.22) 给出，其中 $\Phi=\Psi$ 为 Bardeen 势. 在暴胀宇宙中，表示引力效应的能量-动量张量也由式 (4.4.28) 和 (4.4.29) 表示. 因为由式 (4.4.43) 可知，Phantom 宇宙中 Bardeen 势 Φ 的二阶微分方程和通常标量场宇宙中一样，所以在 Phantom 暴胀宇宙中，在长波近似下

$$\Phi_k \approx -\frac{A_k m_{\rm p}^2}{16\pi}\frac{V'^2}{V^2}, \tag{4.4.84}$$

式中 A_k 为积分常数，V 为 Phantom 标量场的势函数. 由式 (4.4.84)，考虑到慢爬条件，我们有

$$\dot{\Phi}_k \approx -\frac{2V}{3H}\left(\frac{V''}{V}-\frac{V'^2}{V^2}\right)\Phi_k \tag{4.4.85}$$

和

$$\ddot{\varPhi}_k \approx \frac{m_{\mathrm{p}}^2}{24\pi}\left(4\frac{V''^2}{V} - 2\frac{V'V'''}{V} - 3\frac{V''V'^2}{V^2} + \frac{V'^4}{V^3}\right)\varPhi_k. \tag{4.4.86}$$

因为 $\delta\varphi$ 和 $\varPhi$ 之间可由一阶爱因斯坦方程组中的 $0i$ 方程来联系

$$\dot{\varPhi} + H\varPhi = -\frac{4\pi}{m_{\mathrm{p}}^2}\dot{\varphi}_0\delta\varphi, \tag{4.4.87}$$

所以 $\delta\varphi$ 可用 $\varPhi$ 来表示, 这样, 我们可以得到

$$\delta\varphi \approx \left[-2\frac{V}{V'} + \frac{m_{\mathrm{p}}^2}{2\pi}\left(\frac{V''}{V'} - \frac{V'}{V}\right)\right]\varPhi \tag{4.4.88}$$

和

$$\begin{aligned}\delta\dot{\varphi} \approx \frac{V'}{3H}\bigg[&-2 + 2\frac{VV''}{V'^2} + 4\frac{V''}{V} - 4\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \\ &+ \frac{m_{\mathrm{p}}^2}{2\pi}\left(\frac{V'''}{V'} - 3\frac{V''^2}{V'^2} + 3\frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{V^2}\right)\bigg]\varPhi.\end{aligned} \tag{4.4.89}$$

将式 (4.4.85), (4.4.86), (4.4.88) 和 (4.4.89) 带入式 (4.4.28) 和 (4.4.29), 并和前面一样定义 $\rho_{\mathrm{br}} \equiv \tau_0^0, p_{\mathrm{br}} \equiv -\frac{1}{3}\tau_i^i$来表示 Phantom 暴胀宇宙中引力效应对应的有效能量密度和压强, 可得

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{br}} = \bigg[&2V\left(\frac{VV''}{V'^2} - 2\right) + \frac{m_{\mathrm{p}}^2}{2\pi}\left(5V'' - \frac{3V'^2}{2V} - \frac{7V''^2V}{2V'^2}\right) + \frac{m_{\mathrm{p}}^4}{2\pi^2}\bigg(\frac{V''^3}{V'^2} \\ &- \frac{V'''V''}{4V'} - \frac{3V'^4}{8V^3} + \frac{3V''V'^2}{2V^2} - \frac{17V''^2}{8V} + \frac{V'''V'}{4V}\bigg) \\ &- \frac{m_{\mathrm{p}}^6}{192\pi^3V}\left(\frac{V'^3}{V^2} - \frac{3V''V'}{V} + \frac{3V''^2}{V'} - V'''\right)^2\bigg]\langle\varPhi^2\rangle\end{aligned} \tag{4.4.90}$$

和

$$\begin{aligned}p_{\mathrm{br}} = \bigg[&2V\left(2 - \frac{VV''}{V'^2}\right) + \frac{m_{\mathrm{p}}^2}{2\pi}\left(V'' - \frac{7V'^2}{6V} + \frac{V''^2V}{2V'^2}\right) + \frac{m_{\mathrm{p}}^4}{2\pi^2}\bigg(\frac{V''^3}{2V'^2} \\ &- \frac{V'''V''}{4V'} - \frac{V'^4}{3V^3} + \frac{25V''V'^2}{24V^2} - \frac{31V''^2}{24V} + \frac{V'''V'}{3V}\bigg) \\ &- \frac{m_{\mathrm{p}}^6}{192\pi^3V}\left(\frac{V'^3}{V^2} - \frac{3V''V'}{V} + \frac{3V''^2}{V'} - V'''\right)^2\bigg]\langle\varPhi^2\rangle.\end{aligned} \tag{4.4.91}$$

因为只有红外模式被考虑, 所以所有包含对空间坐标求微分的项都被忽略了. 又因为在慢爬的 Phantom 暴胀过程中宇宙背景的能量密度为 $\rho_{\rm bg}\approx V(\varphi)$, 所以有

$$\begin{aligned}\frac{\rho_{\rm br}}{\rho_{\rm bg}}\approx&\left[2\left(\frac{VV''}{V'^2}-2\right)+\frac{m_{\rm p}^2}{2\pi}\left(\frac{5V''}{V}-\frac{3V'^2}{2V^2}-\frac{7V''^2}{2V'^2}\right)+\frac{m_{\rm p}^4}{2\pi^2}\left(\frac{V''^3}{V'^2V}\right.\right.\\&\left.-\frac{V'''V''}{4V'V}-\frac{3V'^4}{8V^4}+\frac{3V''V'^2}{2V^3}-\frac{17V''^2}{8V^2}+\frac{V'''V'}{4V^2}\right)\\&\left.-\frac{m_{\rm p}^6}{192\pi^3V^2}\left(\frac{V'^3}{V^2}-\frac{3V''V'}{V}+\frac{3V''^2}{V'}-V'''\right)^2\right]\langle\Phi^2\rangle.\end{aligned}\tag{4.4.92}$$

和上一节中讨论的一样, 如果上面的比值为负, 则长波的引力效应将抵消 Phantom 能量, 若比值达到 -1, 则 Phantom 能量完全被抵消, 这样 Phantom 暴胀将结束. 由于大量的引力波被产生和一些轻的标量场将自身的能量转化为辐射能量, 宇宙由 Phantom 暴胀顺利进入辐射控制时期. 显然要确定这个比值, 我们首先应该来计算 Phantom 暴胀宇宙中的两点函数 $\langle\Phi^2\rangle$, 它可以通过对所有傅里叶模 Φ_k 求积分来获得

$$\langle\Phi^2\rangle=\int_{k_i}^{k_t}\frac{{\rm d}k}{2\pi^2}k^2|\Phi_k^2|,\tag{4.4.93}$$

式中 $k_i=H(t_i)a(t_i)$, 其中 t_i 表示暴胀开始的时间. 因为 Phantom 宇宙中 Φ 满足的微分方程和普通标量场一样, 因此我们假定 Φ_k 的值和普通标量场引起的暴胀宇宙中一样, 这样当 $k_{\rm i}<k<k_{\rm t}$ 时有 (Mukhanov,1992)

$$\Phi_k=\frac{2\sqrt{2}}{k^{3/2}m_{\rm p}^2}\left(\frac{\dot{\varphi}_0H^2}{\dot{H}}\right)_{t_{\rm H}(k)}\left(\frac{1}{a}\int a{\rm d}t\right)=\sqrt{\frac{\pi}{3k^3\pi m_{\rm p}^2}}\frac{V'^2}{V^2}\left(\frac{V^{3/2}}{V'}\right)_{t_{\rm H}(k)},\tag{4.4.94}$$

式中 $t_{\rm H}(k)$ 表示标度 k 穿过 Hubble 半径的时间, 这样我们可得

$$\langle\Phi^2\rangle=\frac{1}{6\pi m_{\rm p}^2}\frac{V'^4}{V^4}\int_{k_i}^{k_t}\left(\frac{V^3}{V'^2}\right)_{t_{\rm H}}{\rm d}\ln k.\tag{4.4.95}$$

因为

$${\rm d}\ln k={\rm d}\ln a+{\rm d}\ln H,\tag{4.4.96}$$

并且 ${\rm d}\ln H=-\epsilon_{\rm pha}{\rm d}\ln a$ 可以忽略, 又因为由式 (4.3.2) 和 (4.3.3) 可得

$$a(\varphi)\sim\exp\left(\frac{8\pi}{m_{\rm p}^2}\int\frac{V}{V'}{\rm d}\varphi\right).\tag{4.4.97}$$

由式 (4.4.97) 有

$$d\ln a=\frac{8\pi}{m_{\rm p}^2}\frac{V}{V'}{\rm d}\varphi,\tag{4.4.98}$$

这样, 我们得到

$$\langle \Phi^2 \rangle = \frac{1}{6\pi m_{\rm p}^2}\frac{V'^4}{V^4}\int_{a_{\rm i}}^{a_t}\frac{V^3}{V'^2}{\rm d}\ln a = \frac{4}{3m_{\rm p}^4}\frac{V'^4}{V^4}\int_{\varphi_i}^{\varphi}\frac{V^4}{V'^3}{\rm d}\varphi. \tag{4.4.99}$$

显然要讨论具体的引力效应的大小, 我们需要讨论一些具体的 Phantom 暴胀模型, 即具体的 Phantom 势. 下面我们就以混沌暴胀 $V(\varphi)=\frac{1}{2}m^2\varphi^2$模型为例来讨论 Phantom 暴胀中的引力效应.

混沌暴胀: 因为在混沌 Phantom 暴胀中场 $|\varphi|$ 随时间的演化而增大, 所以一旦慢爬条件在暴胀开始时刻 $t_{\rm i}$ 满足, 它将永远满足, 这也说明 Phantom 暴胀不像普通的暴胀模型那样能顺利地从暴胀出来进入辐射控制时期. 慢爬条件要求 $\varphi \gg m_{\rm p}/\sqrt{4\pi}$, 我们假定在 Phantom 暴胀开始时刻有 $\varphi_{\rm i}=m_{\rm p}/\sqrt{4\pi}$. 将混沌暴胀势带入方程 (4.4.99) 中我们得到

$$\langle \Phi^2 \rangle = \frac{2m^2}{9m_{\rm p}^4}\varphi^2(t)\left(1-\frac{\varphi^6(t_{\rm i})}{\varphi^6(t)}\right). \tag{4.4.100}$$

利用上面的表达式、混沌暴胀势以及式 (4.4.92), 可得

$$\frac{\rho_{\rm br}}{\rho_{\rm bg}} \approx -\frac{2m^2\varphi^2(t)}{3m_{\rm p}^4}\left[1-\frac{\varphi^6(t_{\rm i})}{\varphi^6(t)}\right] \approx -\frac{2m^2}{3m_{\rm p}^4}\varphi^2(t). \tag{4.4.101}$$

显然当 Phantom 场满足

$$\varphi(t) \gtrsim \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{m_{\rm p}^2}{m} \tag{4.4.102}$$

时, Phantom 暴胀将能够被引力效应所终止.





第四篇　量子宇宙学

在第三篇中我们谈到暴胀宇宙学可以解释标准宇宙模型中的视界问题、平直性问题和磁单极问题. 它已经把我们带到了 $t = 10^{-35}$s 的宇宙极早期, 已接近于宇宙的开端. 剩下的一个问题就是宇宙的创生了, 这是量子宇宙学要回答的问题.

广义相对论宇宙学是建立在爱因斯坦引力理论基础上的. 严格地说, 量子宇宙学应该建立在量子引力理论的基础上. 然而, 至今人们还未能建立一个令人满意的量子引力理论. 尽管如此, 人们仍然可以根据已经了解的量子引力的某些特征, 去寻找各种途径, 尝试解决量子宇宙学的主要问题 —— 宇宙的创生问题. 20 世纪 80 年代初, 霍金 (Hawking)、维林金 (Vilenkin) 等提出用宇宙波函数来描述宇宙的量子状态, 而宇宙波函数满足宇宙动力学方程 —— 惠勒–德维特 (Wheeler-De Witt) 方程. 这样, 只要确定宇宙的边界条件, 便可定量地研究宇宙的创生问题了.

对于宇宙波函数的选择和宇宙边界条件的确定, 哈特–霍金 (Hartle-Hawking) 和 Vilenkin 分别提出了不同的方案, 这两个方案构成了目前量子宇宙学中的两个学派. 他们虽然都可以解决宇宙的创生问题, 但它们的理论本身差异甚大, 争论相当激烈. 下面我们先讨论哈特–霍金的方案, 然后讨论 Vilenkin 的方案.



第1章　宇宙量子力学

在量子宇宙学中, 宇宙的状态由宇宙波函数来描述, 由这个波函数可确定宇宙按特征量分布的几率幅. 在量子力学意义上讲, 这种描述是完备的. 在哈特–霍金理论中, 可以自然地给出宇宙边界条件, 所以能够得到一个自洽的宇宙. 在这样的理论框架下, 人们的任务是给出宇宙按照对观测有兴趣量分布的宇宙波函数. 哈特–霍金采用了欧氏 (其中时间为纯虚数) 路径积分表述.

1.1　量子引力的路径积分表述

在量子力学中, 所有的物理定律都可以用路径积分形式来表述. 对于单个粒子系统, 粒子可以从事件 (x_1, t_1) 经由任何路径到达事件 (x_2, t_2), 每个路径的权重为 $\exp(\mathrm{i}I)$, 其中 I 是系统的作用量. 于是, 粒子由点 (x_1, t_1) 到达点 (x_2, t_2) 的几率幅为

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = \int \delta x \exp(\mathrm{i}I), \tag{1.1.1}$$

式中的泛函积分是对连接 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2) 的所有路径进行的. 这一表述同样可用于量子场论. 我们把场 $\phi(x)$ 看作场构形空间的坐标, 则事件便可由点 $(\phi(x), t)$ 给出. 其含义是在时刻 t 场具有构形 $\phi(x)$. 于是, 场由 $(\phi_1(x), t_1)$ 到 $(\phi_2(x), t_2)$ 的几率幅为

$$\langle \phi_2(x), t_2 | \phi_1(x), t_1 \rangle = \int \delta\phi(x,t) \exp(\mathrm{i}I), \tag{1.1.2}$$

式中积分沿构形空间中连接 $(\phi_1(x), t_1)$ 和 $(\phi_2(x), t_2)$ 的所有路径进行. 这样, 只要作代换 $(x, t) \to (\phi(x), t)$, 对单粒子系统的讨论和对场的讨论便在形式上完全一样.

作为量子理论的起点, 是通过在适当的构形空间给出系统的波函数, 从而确定系统的状态. 波函数的构造要从它的几率解释出发, 可以写成形式

$$\Psi(x,t) = N \int_c \delta x(t) \exp(\mathrm{i}I[x(t)]), \tag{1.1.3}$$

式中 N 是归一化因子, 由系统的初始准备给出, 积分是沿一类路径进行的, 这类路径是从 (x, t) 出发并按前面所述的方式加权.

式 (1.1.3) 并不是好的定义, 因为在一般情况下式 (1.1.1) 和 (1.1.2) 中的路径积分可能发散. 为了解决这一问题, 只要将时间轴在虚平面上顺时针转到虚时间轴

$(t \to \mathrm{i}\tau)$, 并且考虑到 $t \to -\infty$ 时对系统的准备对应于 $\tau \to -\infty$. 按照这种程序, 单粒子系统的基态波函数应构造为

$$\Psi(x,\tau) = N \int \delta x \exp(-I[x(\tau)]), \tag{1.1.4}$$

式中 $I(x(\tau))$ 是所谓欧氏作用量, 它是通过作代换 $t \to \mathrm{i}\tau$ 并调整一个整体符号 (使其为正) 得到的. 可以看出, 如果 $I[x(\tau)]$ 是正定的, 则路径积分 (1.1.4) 便是收敛的. 将所得波函数解析延拓到实时间轴, 便可得到物理结果.

式 (1.1.4) 可直接推广到量子场情况, 系统的基态波函数具有形式

$$\Psi(\phi(x),\tau) = N \int \delta\phi(x) \exp(-I[\phi(x)]). \tag{1.1.5}$$

我们希望将同样的表述用于量子引力. 在广义相对论中, 引力场即度规张量场. 一个紧致的四维流行时空度规可表示为

$$\mathrm{d}s^2 = -(N^2 - N_i N^i)\mathrm{d}t^2 + 2N_i \mathrm{d}x^i \mathrm{d}t + h_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j, \tag{1.1.6}$$

式中 N 是时移 (lapse) 函数, N_i 是位移 (shift) 函数, h_{ij} 是三维类空超曲面 $t = \mathrm{const}$ 上的内禀度规. N, N_i, h_{ij} 均为时空坐标的函数; h_{ij} 作为自由度构成一个无限维的超空间, 而 N 和 N_i 可以通过适当的广义变换消去, 因此它们不构成物理的自由度. 下面证明式 (1.1.6). 首先, 我们在时空流形中引入一个类空超曲面, 在其上任一点 (x^i, t) 引入法矢 n^a 和切矢 $X^a_i \equiv X^a_{;i}$, 它们满足关系

$$g_{ab}X^a n^b = g_{ab}X^a X^b = 0 \quad (\text{正交}),$$
$$g_{ab}n^a n^b = -1 \quad (\text{类时}),$$

$\{n^a x^b_i\}$ 构成一个局部 4 标架. 设超曲面在时空中连续变形, 广义变形矢量为

$$N^a \equiv \frac{\partial}{\partial t}X^a(x^i,t) \equiv \dot{X}^a.$$

它在局部 4 标架上分解为

$$N^a = Nn^a + N^i X^a_i.$$

式中的类时分量 N 就是前面说的时移 (lapse), 类空分量 N^i 即为位移 (shift). 由于

$$\mathrm{d}s^2 = g_{tt}\mathrm{d}t^2 + 2g_{it}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}t + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

有

$$g_{tt} = \frac{\partial X^a}{\partial t}\frac{\partial X^b}{\partial t}g_{ab} = N^a N^b g_{ab}$$

$$=N^a N^b(h_{ab}-n_a n_b)=N^i N_i-N^2.$$

实际上

$$\begin{aligned}&N^a N^b(h_{ab}-n_a n_b)=N_a N^b h^a_b-N^2\\=&(Nn_a+N^i X_{a,i})(Nn^b+N^i X^b_i)h^a_b-N^2\\=&(Nn_a+N^i X_{a,i})(0+N^i X^b_i)-N^2\\=&N^i N_i-N^2.\end{aligned}$$

类似地有

$$g_{it}=X^a_i N^b g_{ab}=X^a_i N^b(h_{ab}-n_a n_b)=N_i,$$

$$g_{ij}=X^a_i X^b_j g_{ab}=X^a_i X^b_j(h_{ab}-n_a n_b)=h_{ij},$$

由此即可得到式 (1.1.6).

关于时间 t, 在广义相对论 (经典) 宇宙学中是用的世界时, 它是宇宙的内禀属性. 显然, 当研究量子宇宙学时, 任何测量系统本身作为宇宙的一部分也必须量子化, 因此独立的时间便完全失去了意义. 这样, 构形空间的坐标应该只有 h_{ij}, 若还存在物质场 ϕ, 则仅由 (h_{ij},ϕ) 描述. 于是, 宇宙由三维类空超曲面 h_{ij}(其上有场 ϕ) 跃迁到类空超曲面 h'_{ij}(其上有场 ϕ') 的跃迁几率幅可表示为

$$\langle h'_{ij},\phi'|h_{ij},\phi\rangle=\int\delta[g_{\mu\nu},\phi]\exp(\mathrm{i}I[g_{\mu\nu},\phi]).\tag{1.1.7}$$

与一般量子系统的处理相类似, 量子引力系统的波函数可表示为

$$\Psi[h_{ij},\phi]=N\int_c\delta g_{\mu\nu}\delta\phi\exp(\mathrm{i}I[g_{\mu\nu},\phi]),\tag{1.1.8}$$

式中 N 是归一化常数, 积分区域 C 是构形空间中连接点 (h_{ij},ϕ) 和初始点的所有路径. 系统的基态波函数具有形式

$$\Psi[h_{ij},\phi]=N\int_c\delta g_{\mu\nu}\delta\phi\exp(-I[g_{\mu\nu},\phi]),\tag{1.1.9}$$

式中 $I[g_{\mu\nu},\phi]$ 是欧氏作用量.

我们期望, 波函数 (1.1.9) 应满足一个类似于薛定谔 (Schrödinger) 方程的宇宙动力学方程. 下面我们将得到这样一个方程, 它被称为惠勒–德维特方程 (W-D 方程).

在单圈 (也称为半经典的 WKB) 近似下, 式 (1.1.9) 具有形式

$$\Psi[h_{ij},\phi]=N\sum_i B_i\exp(-I^i_{cl}),\tag{1.1.10}$$

式中 I_{cl}^i 是第 i 个满足最小作用量原理的经典欧氏作用量, N 是归一化常数, B_i 是对经典轨道的涨落.

1.2　宇宙动力学方程

我们首先给出广义相对论的哈密顿形式. 为此, 引力场的作用量取为

$$I_g = \frac{1}{16\pi}\left[\int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + 2\int_{\partial M}\mathrm{d}^3x\sqrt{h}K\right], \tag{1.2.1}$$

式中中括号内第二项的引入是为了抵消第一项在变分时出现的表面积分项. 实际上, 第一项在对 $g_{\mu\nu}$ 变分时给出的表面积分项为

$$\Delta I_g = \frac{1}{16\pi}\int_{\partial M}(\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \Delta\Gamma^{\mu}_{;\mu}g'^{\alpha})\mathrm{d}\sigma_\alpha, \tag{1.2.2}$$

积分是在时空流形 M 的表面 ∂M 上进行的. 由于含有场量 $g_{\mu\nu}$ 的一阶导数项, 所以 $\Delta\Gamma'$ 在表面 ∂M 上不能取为零. 在式 (1.2.1) 中, $h = \det h_{ij}, K = h_{ij}K^{ij}, h_{ij}$ 和 K_{ij} 分别是三维边界上的内禀度规张量和外部曲率张量, R 是标曲率, Λ 是宇宙常数.

如果存在物质场, 作用量中还应加一项 I_m, 注意到度规表示式 (1.1.6), 可将作用量写为

$$I = I_g + I_m = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x h^{1/2}N(K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3R - 2\Lambda) + I_m, \tag{1.2.3}$$

式中

$$K_{ij} = \frac{1}{N}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + N_{(i|j)}\right), \tag{1.2.4}$$

下标的小竖表示对 h_{ij} 取协变微商, ${}^3R$ 是由 h_{ij} 给出的内部曲率标量.

由式 (1.2.3) 可以得到系统的哈密顿量的表示式

$$H = \int \mathrm{d}^3x(\pi\dot{N} + \pi^i\dot{N}_i + NH^0 + N_iH^i), \tag{1.2.5}$$

这里 N 和 N^i 起拉格朗日乘子的作用,

$$H^0 = \frac{h^{1/2}}{16\pi}[K_{ij}K^{ij} - K^2 - {}^3R(h) + 2\Lambda], \tag{1.2.6}$$

$$H^i = -2\pi^{ij}_{|j}; \tag{1.2.7}$$

$$\pi = \frac{\delta S_g}{\delta\dot{N}} = 0,$$

$$\pi^i = \frac{\delta S_g}{\delta \dot{N}_i} = 0,$$

$$\pi^{ij} = \frac{\delta S_g}{\delta \dot{h}_{ij}} = \frac{h^{1/2}}{16\pi}(Kh^{ij} - K^{ij}). \tag{1.2.8}$$

由于 $\pi = 0$ 和 $\pi^i = 0$ 恒成立, 所以 $\dot{\pi} = 0, \dot{\pi}^i = 0$. 由哈密顿方程得

$$H^0 = 0, \tag{1.2.9}$$

$$H^i = 0. \tag{1.2.10}$$

式 (1.2.9) 和 (1.2.10) 即为哈密顿约束和动量约束.

在由场构形 $\{h_{ij}\}$ 构成的超空间中引入度规

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}h^{-1/2}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}), \tag{1.2.11}$$

则式 (1.2.6) 可写为

$$H^0 = \frac{1}{16\pi}[G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - h^{1/2}({}^3R - 2\Lambda)]. \tag{1.2.12}$$

做算符化处理 $\pi^{ij} \to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta h_{ij}}$, 如果有物质场存在, 将相应的广义动量以算符代替, 则哈密顿约束给出

$$\left\{-G_{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{kl}} + h^{1/2}\left[-{}^3R + 2\Lambda + 16\pi T_{nn}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\phi}, \phi\right)\right]\right\}\Psi[h_{ij}, \phi] = 0, \tag{1.2.13}$$

此即 W-D 方程, 也就是我们要寻找的宇宙动力学方程. 式中 T_{nn} 是物质场能量–动量在三维类空超曲面法线方向上的分量. 人们可以把式 (1.2.13) 认为是宇宙的薛定谔方程, 但由于波函数不明显地依赖于时间, 所以方程中没有时间导数项.

由动量约束可得

$$\left(\frac{\delta \Psi}{\delta h_{ij}}\right)_{lj} = T^{ni} \cdot \Psi(h_{|j}, \phi), \tag{1.2.14}$$

此即动量约束方程. 它表明, 对于相互之间可以由坐标变换得到的不同度规 h_{ij}, 其波函数必须是相同的.

方程 (1.2.13) 和 (1.2.14) 都是无限维空间中的变分方程, 没有普遍的严格的求解方法, 只有通过限制超空间自由度个数, 也就是用小超空间模型 (只有有限个自由度的超空间模型), 将量子涨落限制在保持时空某些拓扑及几何特征的自由度上, 从而将变分方程简化为简单得多的偏微分方程组.

宇宙波函数 $\Psi(h_{ij}, \phi)$ 要满足方程 (1.2.13) 和 (1.2.14), $|\Psi|^2$ 表征宇宙在超空间中出现在点 (h_{ij}, ϕ) 处的概率.

关于方程 (1.2.13) 和 (1.2.14), 我们再作一补充讨论.

(1) 由经典几何动力学可以得到经典几何应满足的两个约束; 正则量子化以后, 我们得到波函数应满足的两个偏微分方程, 这就是量子几何动力学中的基本动力学方程, 原则上, 它们应适用于任何量子引力系统, 关键在于选择适当的边界条件.

我们可以把方程 (1.2.13) 看作一个零能的定态薛定谔方程. 对于闭合宇宙, 它表示宇宙的总能量 (引力能加上物质能) 恒为零. 实际上, 闭合宇宙的总能量必须为零, 因为否则引力线通量将不会为零, 而对于闭合宇宙这是不可能的.

对于真空引力场或按宇宙学原理, 式 (1.2.14) 化为

$$\left[\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\Psi(h_{ij},\phi)\right]_{|j}=0.$$

此式表明, 三维曲面上坐标系的微小变化将引起度规的微小变化, 由此导致的波函数的变化为零, 这意味着波函数是规范不变的.

(2) 泛函微分方程 (1.2.13) 可以看作度规场流形 $\{h_{ij}\}$ 上以 G_{ijkl} 为超度规的微分方程, 所有无限多种三维几何 $\{h_{ij}\}$ 和物质构形一起构成一个无限维构形空间, 叫超空间. 1967 年, De Witt 首先指出了 G_{ijkl} 的几何意义, 可以验证

$$G_{ijkl}=G_{jikl},\quad G_{ijkl}=G_{ijlk},\quad G^{ijkl}=G^{jilk},\quad G^{ijkl}=G^{ijlk},\quad G_{ijkl}G^{klab}=\delta_{ij}^{ab}.$$

独立的对称指标是 11, 22, 33, 12, 13, 23; 对角元素为 $G_{1111},G_{2222},G_{3333},G_{1212}$, G_{1313},G_{2323}; 号差为 $(-+++++)$. 因此, W-D 方程就是六维超度量空间内的一个双曲方程.

(3) Kuchar 曾指出, 在量子几何动力学中, 由正则量子化并不能得到哈密顿, 而只是得到了一个哈密顿约束. 这一点与通常的量子力学不同. 这一特点将导致波函数不能构成一个希尔伯特空间, 因而波泛函的几率解释可能会遇到困难.

1.3　边 界 条 件

为了给出宇宙动力学方程的解, 还需要有边界条件. 在量子宇宙学中, 由于时间是内禀时间, 所以初始条件包含在边界条件之中. 在量子宇宙学中, 也存在某些“自然边界条件”, 这些“自然边界条件”是由问题的物理考虑得到的. 比如考虑度规的正定性, 即当看成场量时必须满足 $h^{1/2}\geqslant 0$. 定义新的场量 $h_{ij}\to\tilde{h}_{ij}\equiv h_{ij}/h^{1/2}$, 则此边界条件可写成

$$\Psi[\tilde{h}_{ij},h^{1/2},\phi]=0,\quad h^{1/2}<0. \tag{1.3.1}$$

在路径积分表述中, 这个边界条件可以由适当选择积分路径来实现.

有了边界条件 (1.3.1) 还不够, 还需要有作为边界条件的初始宇宙波函数的形式. 这涉及式 (1.1.9) 以及其中积分路径 C 的选取.

霍金认为, 宇宙中任何一点都不应处于特殊地位, 因此宇宙应该是没有边界的. 他认为物理定律在任何地方都应有效, 宇宙的开端处也不例外. 为此, 应该让路径积分只对非奇异性度规取和. 在通常的路径情况下, 人们知道测度更集中于不可微的路径. 但是在某些适当的拓扑中, 这些路径是光滑路径的完备化, 并且具有定义完好的作用量. 类似地可以想到, 量子引力的路径积分应该对光滑度规的完备化空间取和, 不应包含奇异性度规 (因为它的作用量没有定义).

在黑洞的情况下, 路径积分应该对欧氏 (规则) 度规取和. 这意味着像史瓦希黑洞这样的奇异性在欧氏度规中不出现, 欧氏度规并没有到达视界面以内. 视界像是极坐标原点. 因此, 欧氏度规的作用量是完好定义的. 这一问题的处理可认为是宇宙监督的量子理论表述: 奇点处结构的破坏不应影响任何物理测量.

这样看来, 量子引力的路径积分应该对非奇异欧氏度规取和. 那么在这些度规上应赋予什么样的边界条件呢? 回答是: 只存在两个自然的选择: 第一个选择是度规在紧致集之外要趋于平直的欧氏度规; 第二个选择是在紧致和没有边界的流形上的度规.

第一类度规 (渐近欧氏度规) 对于散射计算仍然很合适. 在散射过程中, 粒子由无穷远处射入, 人们在无穷远处观测出射粒子, 无穷远处的背景度规是平直的, 可以用通常的方式把场的小涨落解释成粒子, 人们不必问在中间的相互作用区域发生了什么, 这就是人们让相互作用区域的路径积分对所有可能历史 (即对所有欧氏度规) 取和的原因.

在宇宙学中情况就不同了. 人们处在宇宙之中而非宇宙之外, 因此人们感兴趣的是在有限区域内而不是在无限远处进行测量. 首先假定宇宙学的路径积分是对所有渐近欧氏度规取和, 那么对于有限区内的测量的概率将存在两类贡献: 第一类来自于连通的渐进欧氏度规; 第二类来自于非连通的度规, 它由一个包含测量区域的紧致度规和一个与之相分离的渐近欧氏度规组成, 如图 1-1 所示.

人们不应该把非连通度规从路径积分中排除, 因为它们可以由连通度规来近似, 在这些度规中不同部分可由虫洞 (其作用量可忽略) 连接起来.

对于散射问题, 由于时空的非连通的紧致区域不和无穷远连接, 而测量是在无穷远处进行的, 所以紧致区域不影响散射计算. 但是它们会影响宇宙学中的测量, 因为宇宙学的测量是在有限区域进行的. 的确, 这种非连通度规贡献远远超过了来自连通的渐近欧氏度规贡献. 这样, 即使把宇宙学的路径积分对所有渐近欧氏度规取和, 其效应和对所有紧致度规取和几乎完全相同. 所以哈特和霍金认为, 更自然地应该对所有无边界的紧致度规取和. 这个宇宙的边界条件可以表述为: 宇宙的边界条件是它没有边界.

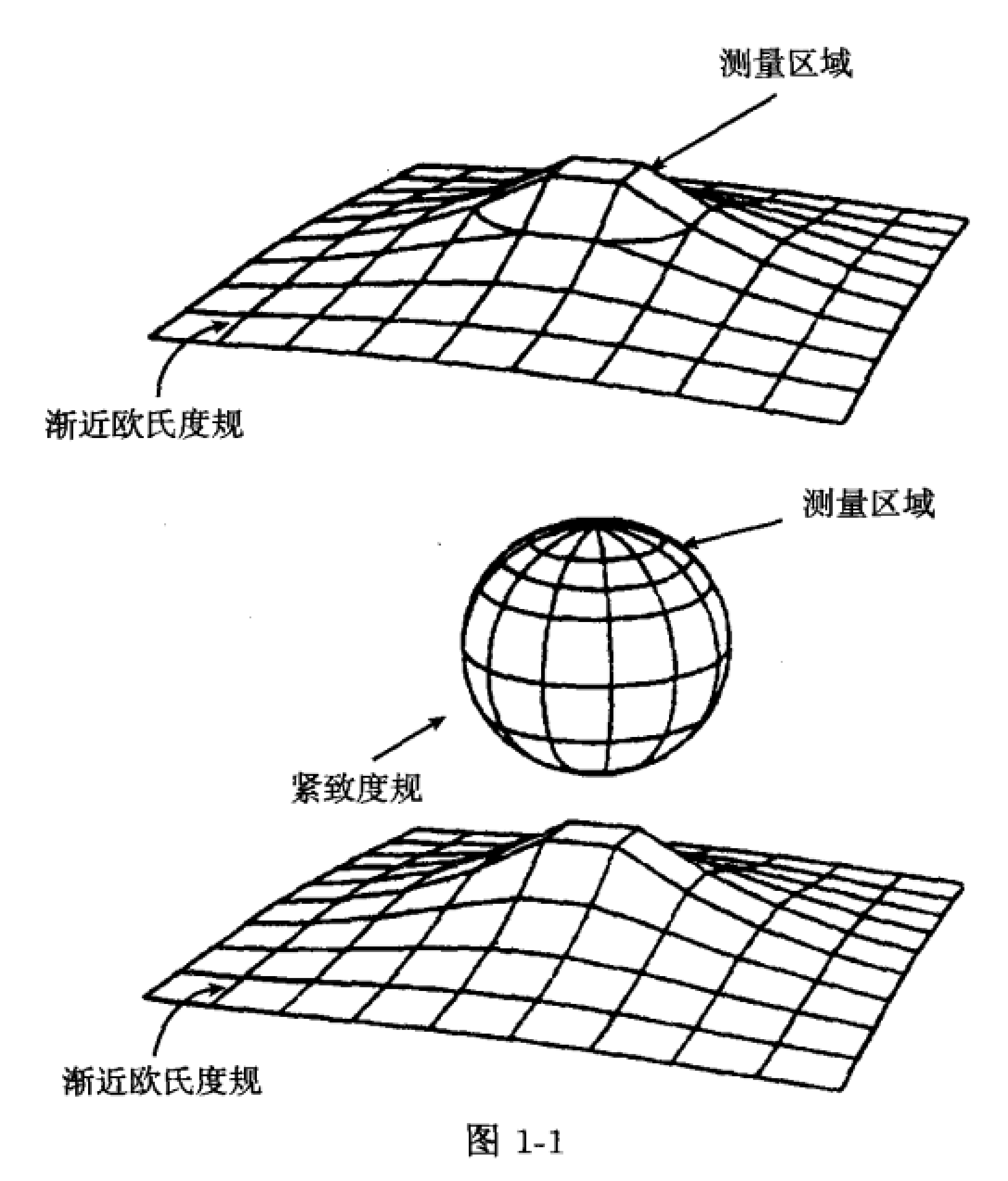


图 1-1

我们对前面的讨论做一个小结：宇宙动力学方程由 Wheele-De Witt 方程给出，边界条件由式 (1.1.9)(C 取上面所讨论的路径) 以及因某些物理要求给出. 对于一个动力学系统，这种表述是完全的.

为了对哈特–霍金的"无边界"的边界条件有一个更清晰的了解，我们再做一直观的描述. 先从确定宇宙边界条件的必要性谈起. 在宇宙学中被研究的系统是整个宇宙. 根据定义，宇宙没有外部，没有人可对其要求边界条件的"宇宙之外的部分". 而且仅仅依靠数学的相容性不可能求出 Wheeler-De Witt 方程的解. 因此，宇宙学家不能不从物理的考虑出发来确定宇宙的边界条件. 用几何的语言表述就是要确定基态波函数 (1.1.9) 中路径积分的积分路径. 量子力学中的路径积分表述就是对历史求和，波函数的计算就是对系统的某一类历史算出一个确定的和. 为了使波函数是唯一的，必须精确规定需要求和的历史类. 这种对历史求和在数学上相当于解薛定谔方程. 在量子宇宙学中，宇宙波函数可以通过对宇宙的某一类历史求和而计算出来. 这就是解 Wheeler-De Witt 方程的过程. 获得宇宙动力学方程的解取决于怎样选择对之求和的历史类. 我们可以由几何形体来描述哈特–霍金的工作. 把宇宙在指定时间的空间外延想像成位于水平面内的一个闭合圈 (图 1-2)，竖直轴代表时间，随时间的增加，闭合圈变大，表示宇宙膨胀. 这样，宇宙的各种可能的历史在宇宙随时间演化时就表现为宇宙圈生长成的管子. 管子的终端代表今天的

宇宙, 最下端就表示宇宙的初始态 (创生). 初始态要由提出的边界条件来确定. 某些管子的下端可能像一个锥体的尖端一样封闭; 其他管子的下端则可能突然结束. 哈特–霍金认为, 只应考虑初始端以光滑规则方式收缩到零的半球形帽的那些管子. 就是说, 人们只应该对这些无边界几何形体求和, 终端除外 (终端是开放的, 相当于今天的宇宙). 这就是哈特–霍金的无边界的边界条件.

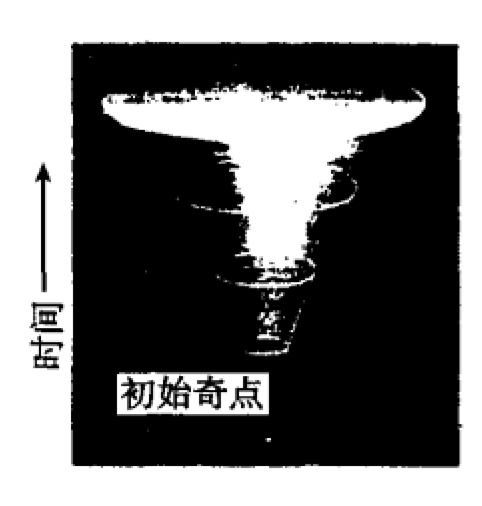





图 1-2

在广义相对论宇宙学中要用这样一种光滑的方式封闭几何形体是不可能的. 奇点定理告诉人们, 宇宙的所有经典历史都必须以奇点的方式收缩到零, 就像锥体的末端一样. 但是量子理论中对历史的求和法则允许有许多可能的历史, 而不仅仅是那些经典的历史. 于是光滑的封闭便成为了可能. 特别地, 封闭的区域可以看作发生在虚时间内, 因而显然是非经典的.

哈特–霍金由这一边界条件得到了一个宇宙动力学方程的解. 由于虚时间的出现是量子理论中的隧道效应的特征, 因此宇宙可能是从"一无所有"经隧道效应创生出来的; 大爆炸是在隧道效应之后接着发生的.

下面我们具体讨论哈特–霍金的宇宙波函数.



第2章　宇宙波函数

2.1　基态波函数的表述

这一章, 我们将比较详细地讨论哈特–霍金的基态波函数理论. 波函数依赖于类空超曲面的拓扑性质和三维度规以及曲面上的物质场的值. 为了简洁, 我们现在只考虑 S^3 拓扑性质, 其他可能性放在后面讨论.

正如第 1 章所讨论的, 基态波函数构造成泛函积分形式

$$\Psi_0[h_{ij}, \phi] = N \int \delta g_{\mu\nu} \delta\phi \exp(-I[g_{\mu\nu}, \phi]), \tag{2.1.1}$$

式中 I 是总的欧氏作用量, 积分沿着具有紧致边界条件的一类四维欧氏几何和相应的一类欧氏场构形, 在边界上诱导 (或内禀) 度规为 h_{ij}. 为了实现基态波函数的定义, 需要给出一类几何和场用来求和. 其几何应当是紧致的, 其上的场应是规则的. 在正宇宙常数的情况下, 场方程的任何规则欧氏解必是紧致的. 最大的对称性解是半径为 $3/\Lambda$ 的四维球, 其度规可写为

$$\mathrm{d}s^2 = (\sigma/H)^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega_3^2), \tag{2.1.2}$$

式中 $\mathrm{d}\Omega^2$ 是三维球上的度规, $H^2 = \sigma^2\Lambda/3$, 我们为以后表述方便还引入了一个因子 $\sigma^2 = l_p^2/24\pi^2, l_p^2 = 16\pi G$. 显然, 当 $\Lambda > 0$ 时, 对紧致的四维几何取和是唯一合理的选择.

如果 $\Lambda \leqslant 0$, 场方程没有紧致解. 最大对称性解是欧氏空间 ($\Lambda = 0$)

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma(\mathrm{d}\theta^2 + \theta^2\mathrm{d}\Omega_3^2) \tag{2.1.3}$$

和欧氏反 de Sitter 空间 ($\Lambda < 0$)

$$\mathrm{d}s^2 = (\sigma/H)^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega_3^2). \tag{2.1.4}$$

正如第 1 章最后一节中谈到的, 对于散射问题来说, 当 $\Lambda \leqslant 0$ 时, 基态波函数定义为渐近欧氏几何上或渐近反 de Sitter 几何上的泛函积分更合适. 然而在宇宙中, 人们感兴趣的是在时空内部进行的测量, 内部点是否与无穷远区域连通没什么关系. 哈特–霍金认为, 应该取由两部分组成的不连通的几何: 其一是紧致的部分, 没有内部边界. 这个不连通几何实际上给出了对基态波函数的绝对主要的贡献.

在 $\Lambda \leqslant 0$ 的情况下, 由紧致四维几何上得到的基态波函数, 对大的三维几何发散, 且波函数不能归一化. 这是因为在作用量中, 正的 Λ 和负的 Λ 对大的四维几何的作用刚好相反. 因此, 我们只考虑 $\Lambda > 0$ 的情况, $\Lambda = 0$ 将被视为 $\Lambda > 0$ 的极限情况.

有时在 K 表象下描述波函数比较方便. 即 $h^{1/2}$ 代之以它的共轭动量 $-\frac{4}{3}Kl_p^{-2}$. 这时也可用泛函积分构造之

$$\Phi_0[\tilde{h}_{ij}, K, \tilde{\phi}] = N\int \delta g_{\mu\nu}\delta\phi \exp(-I^k[g_{\mu\nu}, \phi]). \tag{2.1.5}$$

积分仍沿着前面的场和几何, 只是现在在边界上固定的是 $\tilde{\phi}, \tilde{h}_{ij}$ 和 K, 而不再是 ϕ 和 h_{ij}. 因此, I^K 是保持 $\tilde{\phi}, \tilde{h}_{ij}$ 和 K 在边界上固定的欧氏作用量. 我们有

$$l_p^2 I_F^K(g_{\mu\nu}) = -\frac{2}{3}\int_{\partial M} \mathrm{d}^3x h^{1/2}K - \int_M \mathrm{d}^4x g^{1/2}(R - 2\lambda), \tag{2.1.6}$$

$$I_M^K(g_{\mu\nu}, \phi) = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{d}^4x g^{1/2}\left[(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{6}R\phi^2\right]. \tag{2.1.7}$$

向 K 表象变换时, 我们有

$$\Phi[\tilde{h}_{ij}, K] = \int_0^\infty \delta h^{1/2} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{4}{3}l_p^2\int \mathrm{d}^3x h^{1/2}K\right)\Psi(h_{ij}), \tag{2.1.8a}$$

反过来有

$$\Psi[h_{ij}] = \int_{-\infty}^\infty \delta K \exp\left(\mathrm{i}\frac{4}{3}l_p^{-2}\int \mathrm{d}^3x h^{1/2}K\right)\Phi(\tilde{h}_{ij}, K). \tag{2.1.9a}$$

按照欧氏的 K, 上两式可改写为

$$\Phi[\tilde{h}_{ij}, K, \tilde{\Phi}] = \int_0^\infty \delta h^{1/2} \exp\left(-\frac{4}{3}l_p^2\int \mathrm{d}^3x h^{1/2}K\right)\Psi(h_{ij}, \tilde{\Phi}), \tag{2.1.8b}$$

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_c \delta K \exp\left(\frac{4}{3}l_p^2\int \mathrm{d}^3x h^{1/2}K\right)\Phi(\tilde{h}_{ij}, K, \tilde{\Phi}), \tag{2.1.9b}$$

式中路径 C 从 $-\mathrm{i}\infty$ 到 $+\mathrm{i}\infty$.

从泛函积分 (2.1.5) 来构造基态波函数有一个优点, 就是式 (2.1.9b) 中的积分总能满足波函数 $\Psi_0(h_{ij}, \phi)$ 的要求, 当 $h^{1/2} < 0$ 时这个波函数等于零.

欧氏引力作用量式 (2.1.6) 不是明确限定的, 因为式 (2.1.1) 和 (2.1.5) 中的泛函积分还需要仔细地加以限制. 其中一种限制方法是使积分改变为沿着共形因子和共形等效几何上进行. 通过适当选择共形因子的积分路径, 便可构造一种收敛的泛函积分.

这是哈特–霍金关于基态波函数的基本思想. 下面给出它的某些性质, 并在一小超空间模型中表明它的合理性.

2.2　半经典近似

基态波函数泛函积分定义的一个重要优点是它直接满足半经典近似. 本节将检验 2.1 节定义的基态波函数的半经典近似. 为了简便, 我们只考虑纯引力的情况, 其结果可直接推广到含物质场的情况.

通过最陡下降法计算泛函积分, 可以得到半经典近似. 如果只有一个稳态相点, 半经典近似为

$$\Psi_0[h_{ij}] = N\Delta^{-1/2}[h_{ij}]\exp(-I_{cl}[h_{ij}]). \tag{2.2.1}$$

式中 I_{cl} 是稳态相点的欧氏作用量, 即对应用于欧氏场方程

$$R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} \tag{2.2.2}$$

的解 $g^{cl}_{\mu\nu}$; 在闭合三维曲面边界上, 它给出度规 h_{ij}, 且满足 2.1 节讨论的边界条件.

如果存在不止一个稳态相点, 则必须仔细考虑积分路径, 以便确定哪个给出决定性的贡献. 一般地, 有最低 ReI 值将是稳态相点, 尽管也许不是, 比如有两个对应于四维几何的稳态相点, 则两个相互共形. 本节我们将看到一个这样的例子. 基态波函数是实的, 这意味着如果稳态相点有复的作用量值, 则必有其共轭的等同贡献; 如果稳态相点的四维几何不存在, 则在半经典近似下波函数将是零.

首先从泛函积分 (2.1.5) 求 Φ_0 的半经典近似, 然后用最陡下降法求积分 (2.1.9b), 从而获得 Ψ_0 的半经典近似. 要求

$$\int \delta h_{ij}\,\bar{\Psi}_0[h_{ij}]\,\Psi_0[h_{ij}] = 1, \tag{2.2.3}$$

可确定式 (2.2.1) 中的归一化常数. 我们将式 (2.2.3) 几何地解释为所有四维几何上的路径积分, 在度规为 h_{ij} 的三维曲面两边这些四维几何是紧致的. 从而, 根据无边界紧致四维几何的作用量, 给出这个可能路径积分的半经典近似. 当 $\Lambda > 0$ 时, 其解是四维球. 于是

$$N^2 = \exp\left(-\frac{2}{3H}\right). \tag{2.2.4}$$

由波函数的泛函积分定义, 波函数的半经典近似使我们对 Wheeler-De Witt 方程的边界条件有一个深刻的理解. 它们可以自然地应用到足够大体积的和无穷小体积的三维几何中.

首先考虑小三维体积的极限. 如果极限三维几何可以嵌入平直空间, 则当 $\Lambda > 0$ 时式 (2.2.2) 的经典解是四维球, 而且当三维几何缩为零时它保持为四维球. 此时作用量趋近于零. 因此必须考虑波函数的涨落行列式的行为. 在这种极限情况下, 可

忽略曲率, 把涨落看作是关于平直空间区域的. 考虑它在四维度规常共形尺度变化下和边界三维度规下的行为, 便可求其值.

在 $\Lambda > 0$ 时, 在半经典近似的基础上, 我们可以定性地讨论足够大的三维体积波函数的行为. 对于式 (2.2.2) 任一实解来说, 四维球具有最大体积. 随着三维几何体积的增大, 将得到一不再能放入四维球任何地方的三维几何. 于是我们认为稳态相几何变为复的了; 如果式 (2.2.1) 在稳态相的四维几何中取值, 基态波函数将变为 2 表示的实组合. 于是我们认为, 随着三维体积的增大, 波函数振荡. 如果振荡没有强烈地衰减, 则对应于一无限膨胀的宇宙.

以上讨论仅仅是定性的, 但已指出基态波函数行为照样决定于 Wheeler-De Witt 方程的边界条件. 下面将这些讨论用于一小超空间模型.

2.3 小超空间模型

超空间是一个无限维流形, 无法对 W-D 方程求解. 如果考虑上述无限维空间内的一个有限维子空间, 即所谓小超空间, 则往往可以对 W-D 方程的解进行一些讨论. 这里, 我们将采用一特别简单的小超空间模型, 来说明以前那些一般讨论的含义. 在这一模型中, 我们限定宇宙常数为正, 四维几何为空间均匀、各向同性且闭合. 这就是说, 设

$$\Lambda > 0,$$

三维几何的拓扑是 S^3. 此时度规可表示为

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2[-N^2(t)\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2], \tag{2.3.1}$$

式中, $N(t)$ 为时移 (lapse), $\sigma = l^2/24\pi^2$. 为简单, 设物质场是共形不变标量场, 均匀性条件要求 $\phi = \phi(t)$. 这样, 波函数仅是两个变量 $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 的泛函

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi[a(t), \phi(t)], \\ \Phi &= \Phi[K(t), \tilde{\phi}(t)], \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

式中 $\tilde{\phi}(t) = a^{-3/2}\phi(t)$.

为了简化讨论, 我们引入如下定义并改变变量尺度

$$\phi = \frac{\tilde{\phi}}{a} = \frac{\chi}{(2\pi^2\sigma^2)^{1/2}a}, \tag{2.3.3}$$

$$\Lambda = 3\lambda/\sigma^2, \quad H^2 = |\lambda|. \tag{2.3.4}$$

经典洛伦兹作用量可写为

$$I^a = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t \left(\frac{N}{a}\right)\left[-\left(\frac{a}{N}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 + a^2 - \lambda a^4 + \left(\frac{a}{N}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \chi^2\right]. \tag{2.3.5}$$

实际上, $I^a = I_g^a + I_m^a$, 而

$$I_g^a = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}x^3\sqrt{g}(R - 2\Lambda),$$

$$I_m^a = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[g^{00}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{6}R\phi^2\right],$$

$$R - 2\Lambda = 6\sigma^{-2}a^{-2}(a\ddot{a}N^{-2} - a\dot{a}\dot{N}N^{-3} + \dot{a}^2N^{-2} + 1 - a^2\lambda),$$

$$\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}.$$

由于

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \sigma^2\{-N^2(t)\mathrm{d}t^2 + a^2(t)[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\mathrm{d}\varphi^2)]\}\\ &= c(\eta)\{-\mathrm{d}\eta^2 + [\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\mathrm{d}\varphi^2)]\},\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}R - 2\Lambda &= C^{-1}\left(3\dot{D} + \frac{3}{2}D^2 + 6K\right) - 2\Lambda\\ &= 6\sigma^{-2}a^{-2}(a^{11}a^{-1} + 1 + a^2\lambda)\\ &= 6\sigma^{-2}a^{-2}(a\ddot{a}N^{-2} - a\dot{a}\dot{N}N^{-3} + \dot{a}^2N^{-2} + 1 - a^2\lambda).\end{aligned}$$

考虑到

$$a' = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\eta} = \frac{a}{N}\dot{a},$$

$$\int \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\varphi\sqrt{-g} = 2\pi^2\sigma^4a^3N,$$

可得

$$I_g = 12\pi^2\sigma^2\int \mathrm{d}t\left(\frac{N}{a}\right)\left[-\frac{a^2}{N^2}\dot{a}^2 + a^2 - \lambda a^4\right],$$

于是得到式 (2.3.5).

用通常的方法可以由这一作用量构造 a 和χ的共轭动量 π_a 和 π_χ

$$\pi_a = \frac{\delta L}{\delta\dot{a}} = \frac{1}{2}\frac{N}{a}\left(2\frac{a}{N}\dot{a}\frac{a}{N}\right) = -\frac{a}{N}\dot{a},$$

$$\pi_\chi = \frac{\delta L}{\delta\dot{\chi}} = \frac{1}{2}\frac{N}{a}\left(2\frac{a}{N}\dot{\chi}\frac{a}{N}\right) = -\frac{a}{N}\dot{\chi}.$$

式 (2.3.5) 对 N 求变分, 得到

$$\frac{\delta I}{\delta N(t')} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\left\{\frac{\delta N(t)}{\delta N(t')}\frac{1}{a}\left[-\left(\frac{a}{N}\dot{a}\right)^2 + a^2 - \lambda a^4\right.\right.$$

$$+\left(\frac{a}{N}\dot{\chi}\right)^2-\chi^2\Big]+\frac{N}{a}\left[2\left(\frac{a}{N}\dot{a}\right)\left(\frac{a}{N^2}\dot{a}\frac{\delta N(t)}{\delta N(t')}\right)\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{a}{N}\dot{\chi}\right)\left(-\frac{a}{N^2}\dot{\chi}\frac{\delta N(t)}{\delta N(t')}\right)\right]\Big\}$$
$$=\frac{1}{2a}\left(\frac{a^2}{N^2}\dot{a}^2-\frac{a^2}{N^2}\dot{\chi}^2+a^2-\lambda a^4-\chi^2\right).$$

由此得到

$$\pi_a^2+a^2-\lambda a^4-\pi_\chi^2-\chi^2=0, \tag{2.3.6}$$

此即哈密顿约束.

引入正则量子化

$$\pi_a=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial a},\quad \pi_\chi=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \chi},$$

W-D 方程为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}-a^2+\lambda a^4-\frac{\partial^2}{\partial \chi^2}+\chi^2\right)\Psi(a,\chi)=0. \tag{2.3.7a}$$

实际上, 在把 c 数变为 q 时, 要出现排列中的不确定性, 一般有

$$\pi_a^2=-\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial a}\left(a^p\frac{\partial}{\partial a}\right), \tag{2.3.8}$$

式中 p 代表次序模糊因子. 因此, 在一般情况下, W-D 方程可写为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial a}\left(a^p\frac{\partial}{\partial a}\right)-a^2+\lambda a^4-\frac{\partial^2}{\partial \chi^2}+\chi^2\right]\Psi(a,\chi)=0. \tag{2.3.7b}$$

令上式中 $p=0$, 即得 (2.3.7a).

现在, 我们讨论对波函数进行分离变量求解. 令

$$\Psi(a,\chi)=\sum_n C_n(a)u_n(\chi), \tag{2.3.9}$$

由式 (2.3.7b) 得到两个常微分方程

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial \chi^2}+\chi^2\right)u_n(\chi)=\left(n+\frac{1}{2}\right)u_n(\chi), \tag{2.3.10}$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}C_n+(a^2-\lambda a^4)C_n\right]=\left(n+\frac{1}{2}\right)C_n. \tag{2.3.11a}$$

式 (2.3.11a) 也可以写为

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{a^p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(a^p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}C_n\right)+(a^2-\lambda a^4)C_n\right]=\left(n+\frac{1}{2}-\varepsilon_0\right)C_n. \tag{2.3.11b}$$

式 (2.3.10) 的解正是一个一维谐振子解

$$u_n(\chi) = \mathrm{e}^{-\chi^2/2} H_n(\chi). \tag{2.3.12}$$

式 (2.3.11a) 的严格解无法求得, 我们讨论其渐近行为.

当 a 甚小时, 有

$$C_n \approx \text{const}, \quad C_n \approx a^{1-p}; \tag{2.3.13}$$

当 a 甚大时, 有

$$C_n \approx a^{-1} \exp\left(\pm \frac{\mathrm{i}}{3} H a^3\right). \tag{2.3.14}$$

为了构造小超空间模型中式 (2.3.11a) 的解, 我们可以把欧氏泛函积分的规定应用到小超空间模型中. 对于 $\Psi_0(a_0, \chi)$, 我们建议在满足边界条件的欧氏几何和场构形上对 $\exp(-I[g, \phi])$ 求和. 几何求和应该在形如

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2 [\mathrm{d}\tau^2 + a^2(\tau) \mathrm{d}\Omega_3^2] \tag{2.3.15}$$

的紧致几何上进行, $a(\tau)$ 与超曲面上给定的 a_0 值相对应. 对于物质场, 应在各向同性的场 $\chi(\tau)$ 上求和, 这个场与超曲面上规定的 χ_0 值相对应, 且在紧致几何上是规则的. 这样, 我们可以写出

$$\Psi_0(a_0, \chi_0) = \int \delta a \delta \chi \exp(-I[a, \chi]), \tag{2.3.16}$$

其中定义 $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\tau / a$, 作用量为

$$I = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\eta \left[-\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 - a^2 + \lambda a^4 + \left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 + \chi^2 \right]. \tag{2.3.17}$$

一共形旋转可以使式 (2.3.16) 中的积分收敛.

在小超空间模型中构造基态波函数的另一种方法是在 K 表象中进行. 对于具有三维超球面的四球而言, 引入

$$k \equiv \frac{\sigma}{9} K,$$

由

$$K = h^{ij} K_{ij} = \frac{1}{N} \left(-\frac{1}{2} h^{ij} \frac{\partial K_{ij}}{\partial t} \right),$$

得到

$$k = \frac{1}{3a} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}.$$

又由

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{\sigma}{H}\right)^2 (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega_3^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{H} \right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{H} \right)^2 \mathrm{d}\Omega_3^2 \right] \\
&= \sigma^2 [\mathrm{d}\tau^2 + a^2 \mathrm{d}\Omega_3^2],
\end{aligned} \tag{2.3.18}
$$

可得

$$
k = \frac{H}{3} \cot\theta.
$$

又由

$$
\begin{aligned}
&I^K = Ka^3 + I, \\
&\mathrm{d}s^2 = \sigma^2 [\mathrm{d}\tau^2 + a^2 \mathrm{d}\Omega_3^2] = \sigma^2 a^2 (\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\Omega_3^2),
\end{aligned}
$$

可知

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\eta \left[-\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta} \right)^2 - a^2 + \lambda a^4 \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{\sin\theta}{H^2} (\sin^2\theta - 1 - \cos\theta) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2H^2} \left[-\frac{1}{3} \cos\theta (\sin^2\theta + 2) + \cos\theta + \frac{1}{3} \cos^3\theta \right]_0^\theta,
\end{aligned}
$$

式中 θ 为边界值. 由此可得

$$
\begin{aligned}
I^K &= \frac{1}{3a} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau} \cdot a^3 \bigg|_\theta + I = \frac{1}{3H^2} \cos\theta \sin^2\theta + I, \\
I^K &= -\frac{1}{3H^2} \left[1 - \frac{K}{(\kappa^2 + 1)^{1/2}} \right].
\end{aligned} \tag{2.3.19}
$$

式中

$$
\kappa = \frac{3}{H} k = \cot\theta. \tag{2.3.20}
$$

在 $K(k)$ 表象中, 与式 (2.3.16) 对应地有

$$
\Phi_0(k_0, \chi_0) = \int \delta a \delta\chi \exp(-I^k[a, \chi]).
$$

求和是在与式 (2.3.16) 相同的几何和场上进行的, 只是现在要求在三维曲面边界上 k 取给定值. 即在边界上它们要满足

$$
k_0 = \frac{1}{3a} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}. \tag{2.3.21}
$$

满足此要求的作用量是

$$
I^k = k_0 a_0^3 + I. \tag{2.3.22}
$$

如果算出了 $\Phi_0(k_0,\chi_0)$, 则通过线积分便可还原为 $\Psi_0(a_0,\chi_0)$

$$\Psi_0(a_0,\chi_0)=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_c \mathrm{d}k\exp(ka_0^3)\Phi_0(k_0,\chi_0), \tag{2.3.23}$$

式中积分从 $-\mathrm{i}\infty$ 到 $+\mathrm{i}\infty$.

从普遍的观点看, 直接从式 (2.3.16) 计算 $\Psi_0(a_0,\chi_0)$ 和通过 K 表象 (2.3.23) 计算没有区别.

在半经典近似下, 我们有

$$\Phi_0(K_0)=N\int\delta a\exp(-I^K)\approx N\exp[-I^K(K_0)], \tag{2.3.24}$$

$$\begin{aligned}\Psi_0(a_0)&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_c \mathrm{d}K\exp\left[\frac{4}{3}\int h^{1/2}\mathrm{d}^3x\cdot K\right]\Phi_0(K)\\&=-\frac{N}{2\pi \mathrm{i}}\int \mathrm{d}K\exp(ka_0^3-I^K)\\&=-\frac{N}{2\pi \mathrm{i}}\exp[-I^K(K_0)+k_0a_0^3]\\&=-\frac{N}{2\pi \mathrm{i}}\exp(-I).\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

式中 I 和 I^K 分别为 $h^{1/2}$ 表象和 K 表象中的纯引力场作用量. 在推导式 (2.3.25) 过程中用到了积分

$$\frac{4}{3}\int h^{1/2}\mathrm{d}^3xK=\frac{4}{3}\int(\sigma a)^3\mathrm{d}\Omega_3\left(\frac{9}{\sigma}k\right)=a^3k=\frac{H}{3}a^3\kappa,$$

式中

$$\int \mathrm{d}^3x=\sigma^3a^3\int \mathrm{d}\Omega_3=2\pi^2\sigma^3a^3.$$

按最小作用量原理有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\kappa}=0,$$

由此可得

$$\sin\theta=Ha_0=\frac{a_0}{H^{-1}}, \tag{2.3.26}$$

而

$$\sin\theta=(1+\cot^2\theta)^{-1/2}=\frac{1}{(1+\kappa^2)^{1/2}}.$$

解之得

$$\kappa=\pm\frac{1}{Ha_0}\sqrt{1-H^2a_0^2},$$

即

$$\kappa^2=\frac{1-H^2a_0^2}{H^2a_0^2}. \tag{2.3.27}$$

把式 (2.3.27) 代入式 (2.3.19), 得到

$$I_{\pm} = -\frac{1}{3H^2}[1 \pm (1 - H^2 a_0^2)^{3/2}]. \tag{2.3.28}$$

当 $Ha_0 < 1$ 时, 即三球半径 a_0 小于四球半径 H^{-1}, 这相当于宇宙处于欧氏号差的量子演化阶段. I 的极值点出现在等值反号的实 κ 值, 此三球半径与四球半径之比为 $\sin\theta$(如图 2-1 所示).

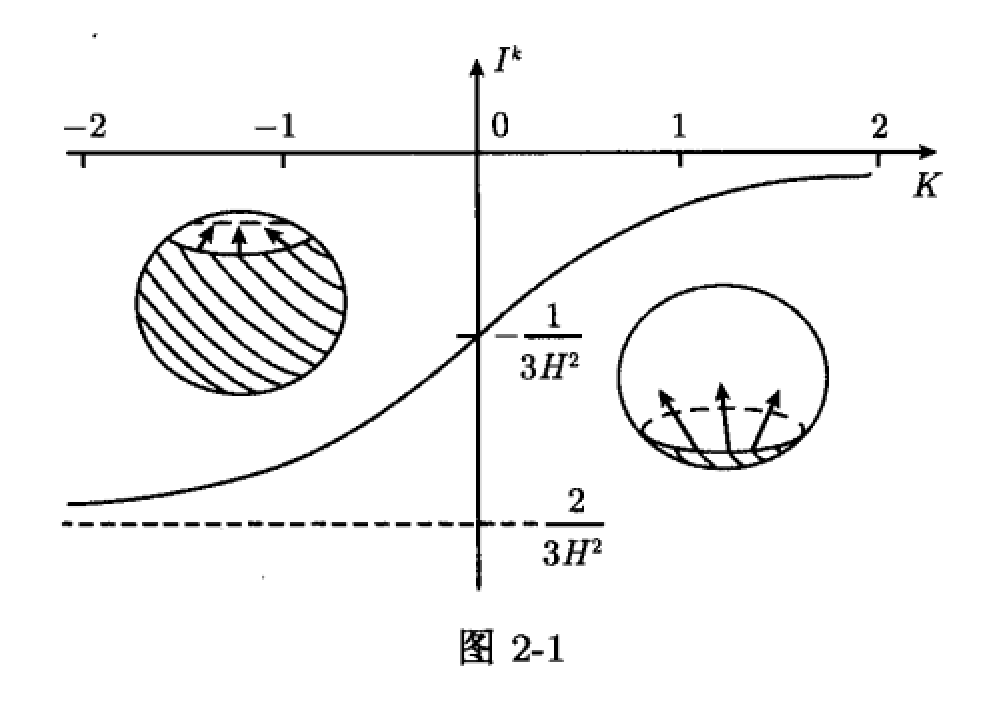


图 2-1

$\kappa < 0$ 对应于四球被三球面包围的部分大于四球半径. $\kappa \to -\infty$ 表示四球完全被三球面包围, 当 $I \to -\dfrac{2}{3H^2}$ 时即成为 de Sitter 空间的欧氏作用量.

在经典近似下, 必须令积分路径经过作用量 I 的极值点. 由此可得

$$\Psi_0 = N\exp[-I_-(a_0)] = N\exp\left\{\kappa a_0^3 + \frac{1}{3H^2}[1 - (1 - H^2 a_0^2)^{3/2}]\right\}. \tag{2.3.29}$$

当 $Ha_0 \ll 1$ 时, 式 (2.3.29) 可写为

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\approx \exp\left[\kappa a_0^3 + \frac{1}{2}a_0^2 - \frac{1}{3}H^{-2}\right], \\ N &= \exp\left(-\frac{1}{3}H^{-2}\right). \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

在式 (2.3.30) 中, 我们只取了 $\kappa > 0$ 时的 I_-, 这是由于积分路径应选在右半复 κ 平面的缘故.

由式 (2.3.29) 和 (2.3.30) 可以看出, 宇宙波函数随 a 增大而指数增大. 特别是在式 (2.3.30) 中, 令 $a_0 = 0$ 时 ψ 是有意义的且不为零. 这表明宇宙将从欧氏号差的量子相 de Sitter 空间膨胀到处于洛伦兹号差的经典 de Sitter 空间中去. 在广义相对论宇宙学中的大爆炸奇点 $(a = 0)$ 在量子宇宙学中不复存在.

当 $Ha_0 > 1$ 时, 即三球半径 a_0 大于四球半径 H^{-1}, 这相当于宇宙处于洛伦兹号差的经典 de Sitter 演化阶段. 作用量 I 的极值出现在等值反号的虚 K 值, 即

$$K = \pm \frac{\mathrm{i}}{3} H \left(1 - \frac{1}{H^2 a_0^2}\right)^{1/2}. \tag{2.3.31}$$

在经典极限下, 应令积分路径经过作用量的极值点, 由此可得

$$\Psi_0(a_0) = 2\cos\left[\frac{(H^2 a_0^2 - 1)^{3/2}}{3H^2} - \frac{\pi}{4}\right]. \tag{2.3.32}$$

当 $Ha_0 \gg 1$ 时, 式 (2.3.32) 可写为

$$\Psi_0(a_0) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{3} H a_0^3\right) + \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{3} H a_0^3\right). \tag{2.3.33}$$

这一结果和式 (2.3.14) 相符合, 这表明欧氏路径积分表述的半经典近似所得到的解满足 W-D 方程所要求的渐近形式.

由式 (2.3.32) 和 (2.3.33) 可知, 处于经典 de Sitter 相的宇宙波函数是一个振荡函数. 这表明

(1) 各种尺度因子 (de Sitter 宇宙) 都可能以相同的概率出现;

(2) de Sitter 宇宙可以无限地膨胀下去. 如果在式 (2.3.11a) 中考虑到物质场能量–动量张量的重整化, 在基态情况下, 式 (2.3.11a) 应写为

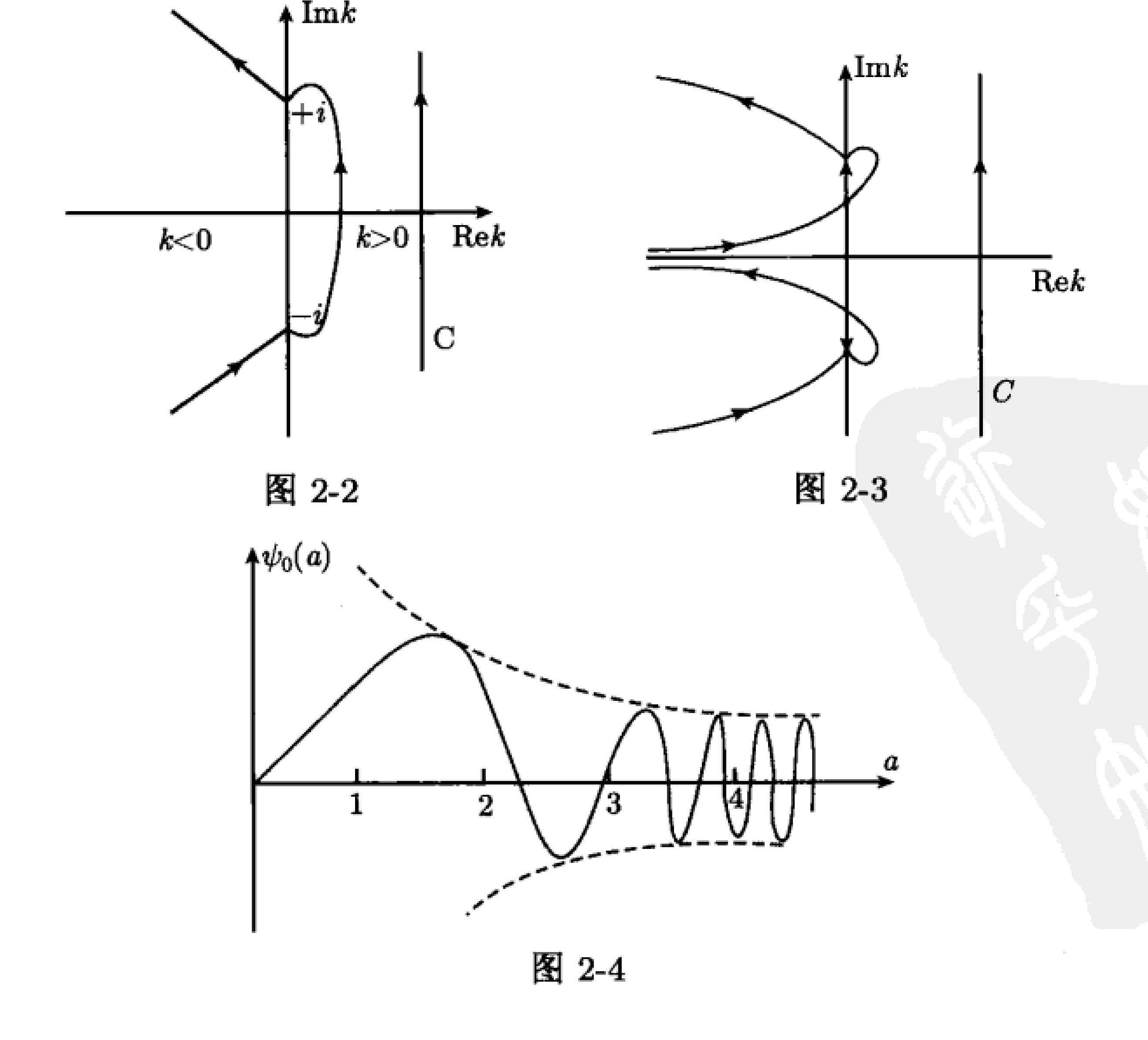


图 2-2　　　图 2-3

图 2-4

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\mathrm{d}^2 C_n}{\mathrm{d}a^2}+(a^2-\lambda a^4)C_n\right]=\left(\frac{1}{2}-\epsilon_0\right)C_n. \tag{2.3.34}$$

设 $p=0, \epsilon=-\frac{1}{2}, \Psi_0(a=0)=0$, 则式 (2.3.34) 的数值解如图 2-4 所示. 当 $Ha<1$ 时, 振幅迅速衰减, 这相当于欧氏 de Sitter 相. 当 $Ha>1$ 时, 振幅衰减很慢, 这相当于无限膨胀的洛伦兹 de Sitter 相. 由于量子欧氏相对应于隧道效应, 因此 H-H 的量子宇宙学提供了一个宇宙从 "无" 经过量子隧道效应自发创生的图像.



第 3 章 宇宙结构的起源

如前所述, 用一紧致四维度规的路径积分来确定宇宙的量子态, 这可看作超空间宇宙波函数的边界条件, 而这个超空间包括三维超曲面上的所有三维度规和物质场. Halliwell 和 Hawking 把以前的超空间有限维近似推广到无限维超空间, 严格给出了两个均匀各向同性自由度的小超空间模型, 把哈密顿中其他的非均匀、各向异性自由度精确到二阶项. 他们明确地指出, 各种非均匀性和各向异性都从它们的基态出发. 对于每一模式都可以得到与时间有关的薛定谔方程. 这些模式一直处于基态, 直到他们的波长超出了暴胀期的视界线度. 基态涨落被随后的膨胀进一步扩大, 可以得到一密度扰动谱; 原则上, 这个谱可用来解释银河系和所有其他结构的起源. 如果导致暴胀的标量场的质量为 10^4GeV 或更少, 则这个涨落与微波背景辐射的观测相符合.

3.1 引 言

微波背景辐射的观测表明, 宇宙在大尺度上是均匀、各向同性的. 但宇宙极早期却不可能是完全均匀和各向同性的, 因为那样星系和恒星是不可能形成的. 在标准大爆炸宇宙模型中, 用来产生宇宙结构的密度扰动不得不假定为初始条件. 在暴胀宇宙模型中, 引起宇宙暴胀的标量场的基态涨落可能导致密度扰动. 最简单的大统一暴胀模型预言的密度扰动幅太大. 其他具有不同势的标量场模型, 有一些原则上可以得到与观测一致的扰动幅. 引力波模式的基态涨落给出一个长波引力波谱, 与观测相符合 —— 由这一波谱得到的暴胀期哈勃常数不超过普朗克质量的 10^{-4} 倍.

但是这些结果对宇宙起源的解释不能令人满意, 因为暴胀模型并没有假定初始或边界条件. 特别是它不能保证存在一个典型的暴胀期, 在此期间标量场和引力波模型均处于基态. 如果没有宇宙的边界条件, 目前的任何状态都是可能的 —— 人们可以选择任一状态, 然后沿着时间逆推回去, 看它导致什么样的初始条件. H-H 量子宇宙学认为, 宇宙的边界条件就是宇宙没有边界. 即用没有边界的紧致四维度规的路径积分来确定宇宙的量子状态. 描述宇宙量子态的波函数 Ψ 是无限维空间(超空间)W 上的函数, 这个超空间包括三维超曲面 S 上所有的三维度规和物质场构型 Φ_0. 因为波函数不明显地依赖于时间, 所以它满足零能薛定谔方程. 薛定谔方程可以分解为动量约束, 这意味着波函数在空间上的任何一点都是相同的. 波函数

由路径积分给出, 这一要求就变成了决定 Ψ 唯一解的 W-D 方程的一组边界条件.

在本章中, 将小超空间推广到引力、标量场具有更大自由度的情况, 严格给出两个均匀各向同性自由度的小超空间模型, 把哈密顿中其他非均匀各向异性的自由度精确到二阶项. 在 Ψ 剧烈震荡的 W 区域, 采用 WKB 近似把波函数与经典解联系起来, 由此引出时间概念. 与前面的小超空间模型一样, 这组解中包括一个具有长暴胀期的解. 就经典解的时间参数而言, 引力波和密度扰动模式满足退耦与时间有关的薛定谔方程. 边界条件意味着这些模式都从基态出发. 它们仍留在暴胀相的视界内时, 由于膨胀可以是绝热的, 所以它们仍然处于基态. 但是当超过了暴胀相的视界时它们就 "冻结" 了, 直到再进入物质为主时期的视界. 随后, 他们产生引力波和密度扰动谱, 这与微波背景辐射一致. 如果标量场的质量是普朗克质量的 10^{-5} 倍, 还可以解释星系的起源. 因此, 原则上路径积分定义宇宙量子态的理论可以解释宇宙结构的起源; 最终解释不是来自任何初始条件, 而是来自海森伯测不准原理决定的基态量子涨落.

3.2 广义相对论的正则形式

考虑到四维流形分成两部分的三维超曲面 S. 在 S 的邻域里, 引入坐标 t, S 是 $t=0$ 和 $x^i(i=1,2,3)$ 的超曲面. 如前所述, 度规具有形式 (1.1.6)

$$\mathrm{d}s^2 = -(N^2 - N_iN^i)\mathrm{d}t^2 + 2N_i\mathrm{d}x^i\mathrm{d}t + h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{3.2.1}$$

作用量

$$I = \int (L_{\mathrm{g}} + L_{\mathrm{m}})\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t, \tag{3.2.2}$$

式中

$$L_{\mathrm{g}} = \frac{m_p^2}{16\pi}N(G^{ijkl}K_{ij}K_{kl} + h^{1/2}\cdot {}^3R), \tag{3.2.3}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + 2N_{(i|j)}\right), \tag{3.2.4}$$

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2}h^{1/2}(h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk} - 2h^{ij}h^{kl}). \tag{3.2.5}$$

在有质量标量场中,

$$L_m = \frac{1}{2}Nh^{1/2}\left[N^{-2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - 2\frac{N_i}{N^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} - \left(h^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j} - m^2\Phi^2\right]. \tag{3.2.6}$$

在广义相对论的哈密顿表述中, 人们把 h_{ij} 和场 Φ 作为正则坐标, 正则共轭动量为

$$\pi^{ij}=\frac{\partial L_g}{\partial \dot{h}_{ij}}=-\frac{1}{16\pi}h^{1/2}m_p^2(K^{ij}-h^{ij}K), \tag{3.2.7}$$

$$\pi_\phi=\frac{\partial L_m}{\partial \dot{\Phi}}=N^{-1}h^{1/2}\left(\dot{\Phi}-N^i\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\right). \tag{3.2.8}$$

哈密顿为

$$H=\int(\pi^{ij}\dot{h}_{ij}+\pi_\phi\dot{\Phi}-L_g-L_m)\mathrm{d}^3x=\int(NH_0+N_iH^i)\mathrm{d}^3x, \tag{3.2.9}$$

式中

$$H_0=16\pi m_p^{-2}G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl}-\frac{m_p^2}{16\pi}h^{1/2}\cdot{}^3R+\frac{1}{2}h^{1/2}\left(\frac{\pi_\phi^2}{h}+h^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}+m^2\Phi^2\right), \tag{3.2.10}$$

$$H^i=-2\pi^{ij}_{|j}+h^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\pi_\phi \tag{3.2.11}$$

以及

$$G_{ijkl}=\frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}}(h_{ik}h_{jl}+h_{il}h_{jk}-h_{ij}h_{kl}). \tag{3.2.12}$$

量 N 和 N_i 作为拉格朗日乘子, 所以解满足

$$H^i=0, \tag{3.2.13}$$

$$H_0=0. \tag{3.2.14}$$

运动方程为

$$\begin{aligned}\dot{h}_{ij}&=\frac{\partial H}{\partial \pi^{ij}},\quad \dot{\pi}^{ij}=-\frac{\partial H}{\partial h_{ij}},\\ \dot{\Phi}_{ij}&=\frac{\partial H}{\partial \pi_\phi},\quad \dot{\pi}_\phi=-\frac{\partial H}{\partial \Phi}.\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

3.3 量　子　化

如前所述, 宇宙的量子态由一个波函数 Ψ 描述, 它是 S 面上所有三维度规 h_{ij} 和物质场 Φ 的无限维流形 W 上的函数, W 的切矢量为 S 上的一对场 (γ_{ij},μ), 其中 γ_{ij} 可看作度规 h_{ij} 的无穷小改变量, μ 可看作 Φ 的无穷小改变量, 对于 S 上 $N>0$ 的每一选择, 有一个 W 上的自然度规 $\Gamma(N)$

$$\mathrm{d}s^2=\int N^{-1}\left(\frac{m_p^2}{32\pi}G^{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl}+\frac{1}{2}h^{1/2}\mu^2\right)\mathrm{d}^3x. \tag{3.3.1}$$

波函数不明显依赖于时间 t, 因为 t 只不过是通过选择不同的 N 和 N_i 值可给以任何值的坐标. 这表示 Ψ 满足零能薛定谔方程

$$H\Psi = 0, \tag{3.3.2}$$

算符 H 是经典哈密顿, 具有通常的代换关系

$$\pi^{ij}(x) \to \mathrm{i}\frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)}, \quad \pi_\phi(x) \to -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta \Phi(x)}. \tag{3.3.3}$$

因为 N 和 N_i 是两个独立的拉格朗日乘子, 所以薛定谔方程可分为两个部分. 动量约束为

$$\begin{aligned} H - \Psi &\equiv \int N_i H^i \mathrm{d}^3 x \Psi \\ &= \int h^{1/2} N_i \left[\left(\frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)} \right)_{|j} - h^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \right] \mathrm{d}^3 x \Psi \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.3.4a}$$

这表明波函数 Ψ 对于三维度规和物质场构形是相同的. 薛定谔方程的另一部分为

$$H_1 \Psi = 0, \tag{3.3.4b}$$

式中

$$H_1 = \int N H_0 \mathrm{d}^3 x.$$

式 (3.3.4b) 即 W-D 方程. 我们假设 $H_1 \Psi = 0$ 具有形式

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + \xi R + V \right) \Psi = 0. \tag{3.3.5}$$

式中 ∇^2 是度规 $\Gamma(N)$ 中的拉普拉斯算符, R 是这个度规的标曲率, 势 V 是

$$V = \int h^{1/2} N \left(-\frac{m_p^2}{16\pi} 3R + \varepsilon + U \right) \mathrm{d}^3 x, \tag{3.3.6}$$

式中

$$U = T^{00} - \frac{1}{2}\pi_\phi^2,$$

常数 ε 可看作宇宙常数 Λ 的重整化. 我们假设重整化的 Λ 为零, 且 R 的系数 ξ 为零.

对于 S 上 N 和 N_i 的任一选择, 任何满足动量约束和 W-D 方程的波函数 Ψ 都描述一个可能的宇宙量子态. 其中一个特解是以路径积分表示的

$$\Psi = \int \mathrm{d}[g_{\mu\nu}]\mathrm{d}[\Phi] \exp[-\hat{I}(g_{\mu\nu}, \Phi)], \tag{3.3.7}$$

式中 $\hat{I}$ 为欧氏作用量 (设 N 为负虚数). 可以把式 (3.3.7) 看作 W-D 方程的边界条件. 这意味着当 h_{ij} 为零时 Ψ 趋于一个常数 (可归一化为 1).

3.4　未受扰动的弗里德曼模型

考虑由弗里德曼模型构成的小超空间. 弗里德曼度规为

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2(-N^2\mathrm{d}t^2 + a^2\mathrm{d}\Omega_3^2), \tag{3.4.1}$$

式中 $\mathrm{d}\Omega_3^3$ 是单位三球度规. 为了方便, 引入一个规一化常数 $\sigma^2 = 2/3\pi m_p^2$. 这个模型包括一个质量为 $\sigma^{-1}m$ 的标量场 $(\sqrt{2}\pi\sigma)^{-1}\phi$, 其质量在 t 为常数的超曲面上是常数. 我们很容易将其推广到势为 $V(\phi)$ 的标量场. 其中包括具有高阶导数量子修正的一些模型. 作用量为

$$I = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}tNa^3\left[\frac{1}{N^2a^2}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{N^2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + m^2\phi^2\right]. \tag{3.4.2}$$

经典哈密顿为

$$H = \frac{1}{2}N(-a^{-1}\pi_a^2 + a^{-3}\pi_\phi^2 - a + a^3m^2\phi^2), \tag{3.4.3}$$

式中

$$\pi_a = -\frac{a}{N}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}, \quad \pi_\phi = \frac{a^3}{N}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}. \tag{3.4.4}$$

经典哈密顿约束为 $H = 0$. 经典场方程为

$$N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{3}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + N^2m^2\phi = 0, \tag{3.4.5}$$

$$N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right) = N^2am^2\phi^2 - 2a\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{3.4.6}$$

W-D 方程为

$$\frac{1}{2}N\mathrm{e}^{-3\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + 2V\right)\Psi(\alpha,\phi), \tag{3.4.7}$$

式中

$$V = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2 - \mathrm{e}^{4\alpha}), \tag{3.4.8}$$

且 $\alpha = \ln a$. 我们把方程 (3.4.7) 作为具有坐标 (α,ϕ) 的平直空间中 Ψ 的双曲方程, α 作为时间坐标. 边界条件是当 $\alpha \to -\infty$ 时 $\Psi \to 1$. 积分 (3.4.7), 我们发现波函数在区域开始振荡 (这个已由数值计算给出). 可以由 WKB 近似来解释波函数的振荡部分

$$\Psi = \mathrm{Re}(C\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}), \tag{3.4.9}$$

式中 C 是缓变振幅, S 是剧烈变化的相位. 选择 S, 使之满足经典哈密顿–雅可比方程

$$H(\pi_\alpha, \pi_\phi, \alpha, \phi) = 0, \tag{3.4.10}$$

式中

$$\pi_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \quad \pi_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi}. \tag{3.4.11}$$

方程 (3.4.10) 可改写为

$$\frac{1}{2} f^{ab} \frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q^b} + \mathrm{e}^{-3\alpha} V = 0, \tag{3.4.12}$$

式中 f^{ab} 是度规 $\Gamma(1)$ 的逆:

$$f^{ab} = \mathrm{e}^{-3\alpha} \mathrm{diag}(-1, 1). \tag{3.4.13}$$

为了使波函数 (3.4.9) 满足 W-D 方程, 只要有

$$\nabla^2 C + 2\mathrm{i} f^{ab} \frac{\partial C}{\partial q^a} \frac{\partial S}{\partial q^b} + \mathrm{i} c \nabla^2 S = 0, \tag{3.4.14}$$

式中 ∇^2 为度规 f_{ab} 的拉普拉斯算符. 我们可以忽略式 (3.4.14) 中的第一项, 沿着矢量场 $X^\alpha = \mathrm{d}q^\alpha/\mathrm{d}t = f^{ab} \partial S/\partial q^b$ 的矢量线 (与经典解对应) 积分式 (3.4.14), 从而确定振幅 C.

由 $V = 0, |\phi| > 1, \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = 0$ 开始, 使函数振荡部分的解按指数规律膨胀

$$S = -\frac{1}{3} \mathrm{e}^{3\alpha} m|\phi|(1 - m^{-2} \mathrm{e}^{-2\alpha} \phi^{-2}) \approx -\frac{1}{3} \mathrm{e}^{3\alpha} m|\phi|, \tag{3.4.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = m|\phi|, \quad \frac{\mathrm{d}|\phi|}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3} m. \tag{3.4.16}$$

经过量级为 $3m^{-1}(|\phi_1| - 1)$ 的时间之后, 场 ϕ 开始振荡, 频率为 m; 式中 ϕ_1 为 ϕ 的初值. 此后, 解变为物质为主, 且 e^α 与 $t^{2/3}$ 成正比膨胀. 如果存在其他场, 有质量标量粒子将分解为光子, 且 e^α 和 $t^{1/2}$ 成正比膨胀. 最后此解会达到一个最大半径, 其值可能为 $\exp(9\phi_1^2/2)$ 或 $\exp(9\phi_1^2)$; 对于大多数膨胀, 这依赖于是辐射为主的还是物质为主的, 此后用类似的方式重新收缩.

3.5 扰动的弗里德曼模型

假设度规仍取式 (3.2.1) 的形式, 只在右端乘以一个因子 σ^2, 三维度规具有形式

$$h_{ij} = a^2(\Omega_{ij} + \epsilon_{ij}), \tag{3.5.1}$$

式中 Ω_{ij} 为单位三球度规, ϵ_{ij} 为度规的一个扰动, 可按谐函数展开

$$\epsilon_{ij}=\sum_{nlm}\left[6^{1/2}a_{nlm}\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q^n_{lm}+6^{1/2}b_{nlm}(P_{ij})^n_{lm}\right.$$
$$\left.+2^{1/2}C^0_{nlm}(S^0_{ij})^n_{lm}+2^{1/2}c^e_{nlm}(S^e_{ij})^n_{lm}+2d^0_{nlm}(G^0_{ij})^n_{lm}+2d^e_{nlm}(G^e_{ij})^n_{lm}\right]. \quad (3.5.2)$$

系数 $a_{nlm},\cdots,d^2_{nlm}$ 都是时间 t 的函数, 不是空间坐标 χ^i 的函数. $Q(\chi^i)$ 为三球上的标量谐函数. $P_{ij}(x^i)$ 由式

$$P_{ij}=\frac{1}{n^2-1}Q_{ij}+\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q \quad (3.5.3)$$

给出 (这里除 ij 以外的附标都隐去了), P_{ij} 是无迹的, $P^i_j=0.S_{ij}$ 由式

$$S_{ij}=S_{i|j}+S_{j|i} \quad (3.5.4)$$

给出, 式中 S_i 是横矢量谐函数, $S^{|i}_i=0$. G_{ij} 是无迹横张量谐函数, $G^i_i=G^{|j}_{ij}=0$. 3.6 节我们详细讨论谐函数和它们的正交归一性.

时移、位移和标量场均可用谐函数展开:

$$N=N_0\left(1+6^{-\frac{1}{2}}\sum_{n,l,m}g_{nlm}Q^n_{lm}\right), \quad (3.5.5)$$

$$N_i=\mathrm{e}^{\alpha}\sum_{n,l,m}[6^{-\frac{1}{2}}k_{nlm}(P_i)^n_{lm}+\sqrt{2}j_{nlm}(S_i)^n_{lm}], \quad (3.5.6)$$

$$\Phi=\sigma^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\phi(t)+\sum_{n,l,m}f_{nlm}Q^n_{lm}\right], \quad (3.5.7)$$

式中 $P_i=[1/(n^2-1)]Q_{|i}$. 为了简化, 下面 n,l,m,o,e 都用 n 表示. 这样, 我们可以把作用量用各 (全部) 阶的背景量 a,ϕ,N_0 的项展开, 而 "扰动" 则只到二阶项:

$$I=I_0(a,\phi,N_0)+\sum_n I_n, \quad (3.5.8)$$

式中 I_0 是未受扰动模型 (3.4.2) 的作用量, I_n 是扰动的二次式.

我们可以用一般方式定义共轭动量:

$$\pi_a=-N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}\dot{\alpha}+\text{二阶项}, \quad (3.5.9)$$

$$\pi_\phi=N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}\dot{\phi}+\text{二阶项}, \quad (3.5.10)$$

$$\pi_{a_n}=-N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}\left[\dot{a}_n+\dot{\alpha}(a_n-g_n)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n\right], \quad (3.5.11)$$

$$\pi_{b_n} = N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{n^2-4}{n^2-1}\left(\dot{b}_n + 4\dot{\alpha}b_n - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n\right), \tag{3.5.12}$$

$$\pi_{c_n} = N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}(n^2-4)(\dot{c}_n + 4\dot{\alpha}c_n - \mathrm{e}^{-\alpha}j_n), \tag{3.5.13}$$

$$\pi_{d_n} = N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}(\dot{d}_n + 4\dot{\alpha}d_n), \tag{3.5.14}$$

$$\pi_{f_n} = N_0^{-1}\mathrm{e}^{3\alpha}[\dot{f}_n + \dot{\phi}(3a_n - g_n)]. \tag{3.5.15}$$

方程 (3.5.9) 和 (3.5.10) 中的二阶项在 3.7 节中给出. 哈密顿可由动量和其他量表示

$$H = N_0\left[H_{|0} + \sum_n H^n_{|2} + \sum_n g_n H^n_{|1}\right] + \sum_n (k_n^S H^n_{-1} + j_n^v H^n_{-1}), \tag{3.5.16}$$

式中 H_1 和 H_- 的下标 0, 1, 2 表示扰动量的阶数, S 和 V 表示哈密顿位移的标量和矢量部分. $H_{|0}$ 是 $N=1$ 时未受扰动模型的哈密顿

$$H_{|0} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}(-\pi_\alpha^2 + \pi_\phi^2 + \mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2 - \mathrm{e}^{4\alpha}). \tag{3.5.17}$$

二阶哈密顿为

$$H_{|2} = \sum_n H^n_{|2} = \sum_n ({}^S H^n_{|2} + {}^V H^n_{|2} + {}^T H^n_{|2}),$$

式中

$$\begin{aligned}
{}^S H^n_{|2} =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Bigg\{\left[\frac{1}{2}a_n^2 + \frac{10(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\pi_\alpha^2 \\
&+ \left[\frac{15}{a}a_n^2 + \frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\pi_\phi^2 - \pi_{a_n}^2 + \frac{n^2-1}{n^2-4}\pi_{b_n}^2 + \pi_{f_n}^2 \\
&+ 2a_n\pi_{a_n}\pi_\alpha + 8b_n\pi_{b_n}\pi_\alpha - 6a_n\pi_{f_n}\pi_\phi \\
&- \mathrm{e}^{4\alpha}\left[\frac{1}{3}\left(n^2 - \frac{5}{2}\right)a_n^2 + \frac{(n^2-7)(n^2-4)}{3(n^2-1)}b_n^2\right. \\
&\left. + \frac{2}{3}(n^2-4)a_n b_n - (n^2-1)f_n^2\right] \\
&+ \mathrm{e}^{6\alpha}m^2(f_n^2 + 6a_n f_n\phi) + \mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2\left[\frac{3}{2}a_n^2 - \frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.5.18}$$

$$\begin{aligned}
{}^V H^n_{|2} =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Bigg[(n^2-4)c_n^2(10\pi_\alpha^2 + 6\pi_\phi^2) + \frac{1}{n^2-4}\pi_{c_n}^2 \\
&+ 8c_n^2 + 8c_n\pi_{c_n}\pi_\alpha + (n^2-4)c_n^2(2\mathrm{e}^{4\alpha} - 6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2)\Bigg],
\end{aligned} \tag{3.5.19}$$

$$\begin{aligned}
{}^T H^n_{|2} =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\{\mathrm{d}_n^2(10\pi_\alpha^2 + 6\pi_\phi^2) + \pi_{d_n}^2 + 8\mathrm{d}_n\pi_{\mathrm{d}_n}\pi_\alpha \\
&+ \mathrm{d}_n^2[(n^2+1)\mathrm{e}^{4\alpha} - 6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2]\}.
\end{aligned} \tag{3.5.20}$$

一阶哈密顿为

$$
\begin{aligned}
{}^S H^n_{-1} =& \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Big\{ -a_n(\pi_\alpha^2+3\pi_\phi^2)+2(\pi_\phi\pi_{f_n}-\pi_\alpha\pi_{a_n}) \\
&+m^2\mathrm{e}^{6\alpha}(2f_n\phi+3a_n\phi^2)-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{4\alpha}\left[(n^2-4)b_n+\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\right]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.5.21}
$$

哈密顿的位移部分为

$$
{}^S H^n_{-1} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{-\pi_{a_n}+\pi_{b_n}+\left[a_n+\frac{4(n^2-4)}{(n^2-1)}b_n\right]\pi_d+3f_n\pi_\phi\right\}, \tag{3.5.22}
$$

$$
{}^V H^n_{-1} = \mathrm{e}^{-\alpha}[\pi_{c_n}+4(n^2-4)c_n\pi_\alpha]. \tag{3.5.23}
$$

经典场方程见 3.7 节.

拉格朗日乘子 N_0, g_n, k_n, j_n 是独立的, 所以零能薛定谔方程

$$
H\Psi = 0 \tag{3.5.24}
$$

可分解为动量约束和 W-D 方程. 由于动量约束是线性的, 所以算符的阶数是很明确的. 于是得到

$$
{}^S H^n_{-1}\psi = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial a_n}-\left[a_n+\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial b_n}-3f_n\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\Psi = 0, \tag{3.5.25}
$$

$$
{}^V H^n_{-1}\Psi = \mathrm{e}^{-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial c_n}+4(n^2-4)c_n\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\Psi = 0. \tag{3.5.26}
$$

对于每一个 n, 一阶哈密顿 H^n_{-1} 给出一组有限维二阶微分方程. 为了所需要的近似, 我们可以增加一些 $\partial/\partial\alpha$ 的线性项, 它们的影响可以用 e^α 的幂乘以波函数来补偿, 不会影响不同观测的相对几率. 因此, 我们可以忽略这些不确定性和这样一些项

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Big\{a_n\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+3\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)-2\left(\frac{\partial^2}{\partial f_n\partial\phi}-\frac{\partial^2}{\partial a_n\partial\alpha}\right) \\
&+m^2\mathrm{e}^{6\alpha}(2\phi f_n+3a_n\phi^2)-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{4\alpha}\left[(n^2-4)b_n+\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\right]\Big\}\Psi = 0.
\end{aligned}
\tag{3.5.27}
$$

最后, 我们得到一个无限维二阶微分方程

$$
\left[H_{|0}+\sum_n({}^S H^n_{|2}+{}^V H^n_{|2}+{}^T H^n_{|2})\right]\Psi = 0, \tag{3.5.28}
$$

式中 $H_{|0}$ 是未受扰动的弗里德曼小超空间模型的 W-D 方程中的算符

$$
H_{|0} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2-\mathrm{e}^{4\alpha}\right) \tag{3.5.29}
$$

以及

$$\begin{aligned}
{}^S H_{|2}^n =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Bigg\{ -\left[-\frac{1}{2}a_n^2 + \frac{10(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \\
& - \left[\frac{15}{2}a_n^2 + \frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_n^2} - \frac{n^2-1}{n^2-4}\frac{\partial^2}{\partial b_n^2} \\
& - \frac{\partial^2}{\partial f_n^2} - 2a_n\frac{\partial^2}{\partial a_n\partial\alpha} - 8b_n\frac{\partial^2}{\partial b_n\partial\alpha} + 6a_n\frac{\partial^2}{\partial f_n\partial\phi} \\
& - \mathrm{e}^{4\alpha}\left[\frac{1}{3}\left(n^2-\frac{5}{2}\right)a_n^2 + \frac{n^2-7}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2 + \frac{2}{3}(n^2-4)a_nb_n - (n^2-1)f_n^2\right] \\
& + \mathrm{e}^{6\alpha}m^2(f_n^2+6a_nf_n\phi) + \mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2\left[\frac{3}{2}a_n^2 - \frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.5.30}$$

$$\begin{aligned}
{}^V H_{|2}^n =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Bigg[-(n^2-4)c_n^2\left(10\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+6\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) - \frac{1}{n^2-4}\frac{\partial^2}{\partial c_n^2} \\
& - 8c_n\frac{\partial^2}{\partial c_n\partial\alpha} + (n^2-4)c_n^2(2\mathrm{e}^{4\alpha} - 6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2)\Bigg],
\end{aligned} \tag{3.5.31}$$

$$\begin{aligned}
{}^T H_{|2}^n =& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\Bigg\{-d_n^2\left(10\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+6\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial d_n^2} - 8d_n\frac{\partial^2}{\partial d_n\partial\alpha} \\
& + d_n^2[(n^2+1)\mathrm{e}^{4\alpha} - 6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.5.32}$$

式 (3.5.28) 称为主方程. 它不是双曲线型的, 因为在每个 ${}^S H_{|2}^n$ 都有正的二阶导数 $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$, 在 $H_{|0}$ 中也有正的二阶导数 $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$. 但是可以用动量约束 (3.5.25) 代换对 a_n 的偏导数, 然后解关于 $a_n=0$ 的方程. 同样, 用式 (3.5.26) 代换对 c_n 的偏导数, 然后解关于 $c_n=0$ 的方程. 这样, 便可得到一个关于 f_n 的双曲方程. 如果知道了 $a_n=0=c_n$ 的波函数, 便可利用动量约束计算 a_n, c_n 其他值的波函数.

3.6 三球上的谐函数

本节我们详细讨论三球 S^3 上的标量、矢量和张量哈密顿的一系列性质. S^3 上的度规为 Ω_{ij}, 所以线元为

$$\mathrm{d}l^2 = \Omega_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{3.6.1}$$

附标中用一小竖表示对于度规 Ω_{ij} 的协变导数. 附标 i, j, k 的升降均用度规 Ω_{ij}.

1. 标量谐函数

标量球谐函数 $Q_{lm}^n(\chi,\theta,\phi)$ 是 S^3 上拉普拉斯算符的本征函数, 于是满足本征

方程

$$Q^{(n)|k}_{|k} = -(n^2-1)Q^{(n)}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{3.6.2}$$

此方程的最一般的解是

$$Q^{(n)}(\chi,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l} A^n_{lm} Q^n_{lm}(\chi,\theta,\phi) \tag{3.6.3}$$

的一个线性组合, 式中 A^n_{lm} 是一组任意常数, Q^n_{lm} 的显式为

$$Q^n_{lm}(\chi,\theta,\phi) = \Pi^n_l(\chi) Y_{lm}(\theta,\phi), \tag{3.6.4}$$

式中 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 是二球 S^2 上通常的球谐函数, $\Pi^n_l(\chi)$ 是福克 (Фок) 的谐和函数, 球谐函数 Q^n_{lm} 对于 S^3 上任意标量场的展开, 构成一完全正交集.

2. **矢量谐函数**

横矢量谐函数是 S^3 上拉普拉斯算符的矢量本征函数, 于是它们满足本征方程

$$S^{(n)|k}_{i|k} = -(n^2-2)S^{(n)}_i, \quad n = 2, 3, 4, \cdots \tag{3.6.5}$$

和横条件

$$S^{(n)|i}_i = 0. \tag{3.6.6}$$

方程 (3.6.5) 和 (3.6.6) 的最一般的解是

$$S^{(n)}_i(\chi,\theta,\phi) = \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{m=-1}^{l} B^n_{lm}(S_i)^n_{lm}(\chi,\theta,\phi) \tag{3.6.7}$$

的线性组合, 式中 B^n_{lm} 是一组任意常数. $(S_i)^n_{lm}$ 的显式在文献 (Halliwel, 1985) 中给出, 那里还指出, 可按奇的或偶的将其分类. 这样, 我们有两个线性独立的横矢量谐函数 S^0_i 和 S^e_i.

利用标量谐函数 Q^n_{lm} 可以构成第三个矢量谐函数 $(P_i)^n_{lm}$

$$P_i = \frac{1}{n^2-1} Q_{|i}, \quad n = 2, 3, 4, \cdots, \tag{3.6.8}$$

可以看出, 矢量谐函数 P_i 满足

$$\begin{aligned} P^{|k}_{i|k} &= -(n^2-3)P_i, \\ P^{|i}_i &= -Q. \end{aligned} \tag{3.6.9}$$

这三个矢量谐函数 S^0_i, S^e_i 和 P_i 对于 S^3 上任意矢量场的展开构成一完全正交系.

3. 张量谐函数

无迹的横张量谐函数 $(G_{ij})^n_{lm}(\chi,\theta,\phi)$ 是 S^3 上拉普拉斯算符的张量本征函数，于是满足本征方程

$$G^{(n)|k}_{ij|k} = -(n^2-3)G^{(n)}_{ij}, \quad n=3,4,5,\cdots \tag{3.6.10}$$

和横的无迹的条件

$$G^{(n)|i}_{ij} = 0, \quad G^{(n)i}_{i} = 0. \tag{3.6.11}$$

式 (3.6.10) 和 (3.6.11) 的最一般的解是

$$G^{(n)}_{ij}(\chi,\theta,\phi) = \sum_{l=2}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l} c^n_{lm}(G_{ij})^n_{lm}(\chi,\theta,\phi), \tag{3.6.12}$$

式中 G^n_{lm} 为一组任意常数. 和矢量的情况类似, 他们也可以分为奇的或偶的.$(G^0_{ij})^n_{lm}$ 和 $(G^e_{ij})^n_{lm}$ 的显式由文献 (Halliwel, 1985) 给出.

利用矢量谐函数 $(S^0_i)^n_{lm}$ 和 $(S^e_i)^n_{lm}$, 可构成无迹张量谐函数 $(S^0_{ij})^n_{lm}$ 和 $(S^e_{ij})^n_{lm}$, 奇的和偶的均为 (隐去附标 l,m,n)

$$S_{ij} = S_{i|j} + S_{j|i}. \tag{3.6.13}$$

由于 S_i 是无迹的, 故 $S^i_i = 0$. 另外, S_{ij} 满足

$$S^{|j}_{ij} = -(n^2-4)S_i, \tag{3.6.14}$$

$$S^{|ij}_{ij} = 0, \tag{3.6.15}$$

$$S^{|k}_{ij|k} = -(n^2-6)S_{ij}. \tag{3.6.16}$$

利用标量谐函数 Q^n_{lm}, 可以构成两个张量 $(Q_{ij})^n_{lm}$ 和 $(P_{ij})^n_{lm}$(隐去附标 n,l,m)

$$Q_{ij} = \frac{1}{3}\Omega_{ij}Q, \quad n=1,2,3, \tag{3.6.17}$$

$$P_{ij} = \frac{1}{n^2-1}Q_{|ij} + \frac{1}{3}\Omega_{ij}Q, \quad n=2,3,4. \tag{3.6.18}$$

P_{ij} 是无迹的, $P^i_i = 0$. 另外, 它满足

$$P^{|j}_{ij} = -\frac{2}{3}(n^2-4)P_i, \tag{3.6.19}$$

$$P^{|k}_{ij|k} = -(n^2-7)P_{ij}, \tag{3.6.20}$$

$$P^{|ij}_{ij} = \frac{2}{3}(n^2-4)Q. \tag{3.6.21}$$

以上 6 个张量谐函数 Q_{ij}, P_{ij}, S^0_{ij}, S^e_{ij}, G^0_{ij} 和 G^e_{ij} 对于以上任意对称二阶张量场的展开构成一完全正交系.

4. 正交归一性

标量、矢量和张量谐函数的归一性是由正交关系式决定的. 用 $\mathrm{d}\mu$ 表示 S^3 上的标体元, 即

$$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}^3x(\det \Omega_{ij})^{1/2} = \sin\chi\sin\theta\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi. \tag{3.6.22}$$

Q^n_{lm} 是归一化的, 即

$$\int \mathrm{d}\mu Q^n_{lm}Q^{n'}_{l'm'} = \delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.23}$$

这表明

$$\int \mathrm{d}\mu(P_i)^n_{lm}(P^i)^{n'}_{l'm'} = \frac{1}{n^2-1}\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{3.6.24}$$

$$\int \mathrm{d}\mu(P_{ij})^n_{lm}(P^{ij})^{n'}_{l'm'} = \frac{2}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.25}$$

奇的和偶的 $(S_i)^n_{lm}$ 都是归一化的, 即

$$\int \mathrm{d}\mu(S_i)^n_{lm}(S^i)^{n'}_{l'm'} = \delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.26}$$

这表明

$$\int \mathrm{d}\mu(S_{ij})^n_{lm}(S^{ij})^{n'}_{l'm'} = 2(n^2-4)\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.27}$$

最后, 奇的和偶的 $(G_{ij})^n_{lm}$ 都是归一化的, 即

$$\int \mathrm{d}\mu(G_{ij})^n_{lm}(G^{ij})^{n'}_{l'm'} = \delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.28}$$

3.7　作用量和场方程

作用量 (3.5.8) 即

$$I = I_0(\alpha,\phi,N_0) + \sum_n I_n, \tag{3.7.1}$$

式中 I_0 为未受扰动模型的作用量 (3.4.2)

$$I_0 = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}tN_0\mathrm{e}^{3\alpha}\left(\frac{\dot\alpha^2}{N_0^2} - \mathrm{e}^{-2\alpha} - \frac{\dot\phi^2}{N_0} + m^2\phi^2\right), \tag{3.7.2}$$

I_n 是扰动中的二次式, 可写为

$$I_n = \int \mathrm{d}t(L^n_g + L^n_m), \tag{3.7.3}$$

式中

$$
\begin{aligned}
L_g^n=&\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha}N_0\left\{\frac{1}{3}\left(n^2-\frac{5}{2}\right)a_n^2+\frac{n^2-7}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2\right.\\
&-2(n^2-4)c_n^2-(n^2+1)d_n^2+\frac{2}{3}(n^2-4)a_nb_n\\
&\left.+g_n\left[\frac{2}{3}(n^2-4)b_n+\frac{2}{3}\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\right]+\frac{1}{N_0}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{n^2-1}k_n^2+(n^2-4)j_n^2\right]\right\}\\
&+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{3\alpha}}{N_0}\left\{-\dot{a}_n^2+\frac{n^2-4}{n^2-1}\dot{b}_n^2+(n^2-4)\dot{c}_n^2+\dot{d}_n^2+\dot{\alpha}\left[-2a_n\dot{a}_n+8\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n\dot{b}_n\right.\right.\\
&\left.+8(n^2-4)c_n\dot{c}_n+8d_n\dot{d}_n\right]+\dot{\alpha}^2\left[-\frac{3}{2}a_n^2+6\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2+6(n^2-4)c_n^2+6d_n^2\right]\\
&+g_n\left[2\dot{\alpha}\dot{a}_n+\dot{\alpha}^2(3a_n-g_n)\right]+\mathrm{e}^{-\alpha}\left[k_n\left(-\frac{2}{3}\dot{a}_n-\frac{2}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}\dot{b}_n+\frac{2}{3}\dot{\alpha}g_n\right)\right.\\
&\left.\left.-2(n^2-4)\dot{c}_nj_n\right]\right\},
\end{aligned}\tag{3.7.4}
$$

$$
\begin{aligned}
L_m^n=&\frac{1}{2}N_0\mathrm{e}^{3\alpha}\left\{\frac{1}{N_0^2}(\dot{f}_n^2+6a_n\dot{f}_n\dot{\phi})-m^2(f_n^2+6a_nf_n\phi)\right.\\
&-\mathrm{e}^{-2\alpha}(n^2-1)f_n^2+\frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2}-m^2\phi^2\right)\left[a_n^2-\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2-4(n^2-4)c_n^2-4d_n^2\right]\\
&\left.+\frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2}g_n^2-g_n\left(2m^2f_n\phi+3m^2a_n\phi^2+2\frac{\dot{f}_n\dot{\phi}}{N_0^2}+3\frac{a_n\dot{\phi}^2}{N_0^2}\right)-2\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{N_0^2}k_nf_n\dot{\phi}\right\}.
\end{aligned}\tag{3.7.5}
$$

π_α 和 π_ϕ 的表达式为

$$
\begin{aligned}
\pi_\alpha=&\frac{\mathrm{e}^{3\alpha}}{N_0}\left\{-\dot{\alpha}+\sum_n\left[-a_n\dot{a}_n+\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n\dot{b}_n+4(n^2-4)c_n\dot{c}_n+4d_n\dot{d}_n\right]\right.\\
&+\dot{\alpha}\sum_n\left[-\frac{3}{2}a_n^2+\frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2+6(n^2-4)c_n^2+6d_n^2\right]\\
&\left.+\sum_n g_n\left[\dot{a}_n+\dot{\alpha}(3a_n-g_n)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n\right]\right\},
\end{aligned}\tag{3.7.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_\phi=&\frac{\mathrm{e}^{3\alpha}}{N_0}\left\{\dot{\phi}+\sum_n\left[3a_n\dot{f}_n+\dot{\phi}\left(\frac{3}{2}a_n^2-4\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2-4(n^2-4)c_n^2-4d_n^2\right)\right]\right.\\
&\left.+\sum_n\left[\dot{\phi}g_n^2-g_n(\dot{f}_n+3a_n\dot{\phi})-\mathrm{e}^{-\alpha}k_nf_n\right]\right\}.
\end{aligned}\tag{3.7.7}
$$

由作用量原理, 将作用量 (3.7.1) 分别对每一个场作变分, 便得到经典场方程, 分别对 α 和 ϕ 取变分, 得到两个场方程

$$
N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{N_0}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)+3\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}+N_0^2m^2\phi=\text{二阶项},\tag{3.7.8}
$$

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\alpha}}{N_0}\right)+3\dot{\phi}^2-N_0^2\mathrm{e}^{-2\alpha}-\frac{3}{2}(-\dot{\alpha}+\dot{\phi}-N_0^2\mathrm{e}^{-2\alpha}+N^2m^2\phi^2)=\text{二阶项},\quad(3.7.9)$$

分别对扰动 a_n, b_n, c_n, d_n 和 f_n 取变分, 得到 5 个场方程

$$\begin{aligned}&N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{a}_n}{N_0}\right)+\frac{1}{3}(n^2-4)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}(a_n+b_n)+3\mathrm{e}^{3\alpha}(\dot{\phi}\dot{f}_n-N_0^2m^2\phi f_n)\\&=N_0^2\left[3\mathrm{e}^{3\alpha}m^2\phi^2-\frac{1}{3}(n^2+2)\mathrm{e}^{\alpha}\right]g_n+\mathrm{e}^{3\alpha}\dot{\alpha}\dot{g}_n-\frac{1}{3}N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{2\alpha}\frac{k_n}{N_0}\right),\end{aligned}\quad(3.7.10)$$

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{b}_n}{N_0}\right)-\frac{1}{3}(n^2-1)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}(a_n+b_n)+\frac{1}{3}(n^2-1)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}g_n+\frac{1}{3}N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{2\alpha}\frac{k_n}{N_0}\right),\quad(3.7.11)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{c}_n}{N_0}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{2\alpha}\frac{j_n}{N_0}\right),\quad(3.7.12)$$

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{d}_n}{N_0}\right)+(n^2-1)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}d_n=0,\quad(3.7.13)$$

$$\begin{aligned}&N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{f}_n}{N_0}\right)+3\mathrm{e}^{3\alpha}\dot{\phi}\dot{a}_n+N_0^2[m^2\mathrm{e}^{3\alpha}+(n^2-1)\mathrm{e}^{\alpha}]f_n\\&=\mathrm{e}^{3\alpha}(-2N_0^2m^2\phi g_n+\dot{\phi}\dot{g}_n-\mathrm{e}^{-\alpha}\phi k_n).\end{aligned}\quad(3.7.14)$$

在推导方程 (3.7.10)~(3.7.14) 过程中, 利用了场方程 (3.7.8) 和 (3.7.9), 并略去了扰动中的三阶项.

分别对拉格朗日乘子 k_n, j_n, g_n 和 N_0 取变分, 得到一组约束. 对 k_n 和 j_n 取变分, 得到动量约束

$$\dot{a}_n+\frac{n^2-4}{n^2-1}\dot{b}_n+3f_n\dot{\phi}=\dot{\alpha}g_n-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{n^2-1}k_n,\quad(3.7.15)$$

$$\dot{c}_n=\mathrm{e}^{-\alpha}j_n.\quad(3.7.16)$$

对 g_n 取变分, 得到线性哈密顿约束

$$\begin{aligned}&3a_n(-\dot{\alpha}^2+\dot{\phi}^2)+2(\dot{\phi}\dot{f}_n-\dot{\alpha}\dot{a}_n)+N_0^2m^2(2f_n\phi+3a_n\phi^2)\\&-\frac{2}{3}N_0^2\mathrm{e}^{-2\alpha}\left[(n^2-4)b_n+\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\right]=\frac{2}{3}\dot{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n+2g_n(-\dot{\alpha}^2+\dot{\phi}^2).\end{aligned}\quad(3.7.17)$$

最后, 对 N_0 取变分, 得到哈密顿约束, 我们把它写为

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3\alpha}\left(-\frac{\dot{\alpha}^2}{N_0^2}+\frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2}-\mathrm{e}^{-2\alpha}+m^2\phi^2\right)=\text{二阶项}.\quad(3.7.18)$$

3.8 波 函 数

由于扰动模式之间不存在耦合, 所以波函数可表示为形如

$$\Psi = \mathrm{Re}\left[\Psi_0(\alpha,\phi)\prod_n \Psi^{(n)}(\alpha,\phi,a_n,b_n,c_n,d_n,f_n)\right] = \mathrm{Re}(c\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}) \tag{3.8.1}$$

的项的和, 式中 S 是 α 和 ϕ 的剧变函数, C 是所有变量的缓变函数. 把式 (3.8.1) 代入主方程 (3.5.28), 同时除以 Ψ 得到

$$\begin{aligned}&-\frac{\nabla_2^2\Psi_0}{2\Psi_0}-\sum_n\frac{\nabla_2^2\Psi^{(n)}}{2\Psi^{(n)}}-\sum_{n,m}\frac{(\nabla_2\Psi^{(n)})\cdot(\nabla_2\Psi^{(m)})}{2\Psi^{(n)}\Psi^{(m)}}\\&-\frac{\nabla_2\Psi_0}{\Psi_0}\cdot\left[\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}\right]+\sum_n\frac{H^n_{|2}\Psi}{\Psi}+\mathrm{e}^{-3\alpha}V(\alpha,\phi)=0,\end{aligned} \tag{3.8.2}$$

式中 ∇_2^2 为小超空间度规 $f_{ab}=\mathrm{e}^{3\alpha}\mathrm{diag}(-1,1)$ 的拉普拉斯算符, 点积也相对于这一度规.

一个单位的扰动模式在式 (3.8.2) 的第三、第四项中不给出有意义的贡献. 因此, 这些项可代之以

$$\begin{aligned}&-\frac{\nabla_2\Psi}{\Psi}\cdot\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}+\frac{1}{2}\left(\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}\right)^2\\&\approx-\mathrm{i}(\nabla_2 S)\cdot\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}+\frac{1}{2}\left(\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}\right)^2.\end{aligned} \tag{3.8.3}$$

为使 ansatz(3.8.1) 有效, 必须使式 (3.8.2) 中与 a_n,b_n,c_n,d_n,f_n 有关的项均为零. 这表明

$$\frac{\nabla_2\Psi}{\Psi}\cdot\nabla_2\Psi^{(n)}+\frac{1}{2}\nabla_2^2\Psi^{(n)}=\frac{H^n_{|2}\Psi}{\Psi}\Psi^{(n)}, \tag{3.8.4}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla_2^2+\mathrm{e}^{-3\alpha}V+\frac{1}{2}J\cdot J\right)\Psi_0=0, \tag{3.8.5}$$

式中

$$J=\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}.$$

在相 S 剧烈变化的区域, 式 (3.8.4) 的第二项与第一项相比可以略去. 还可以用 $\partial S/\partial\alpha$, $\partial S/\partial\phi$ 分别代替 $H^n_{|2}$ 中的 π_α, π_ϕ. 矢量 $x^a=f^{ab}\partial S/\partial q^b$ 可看作 $\dfrac{\partial}{\partial t}$, 其

中 WKB 近似 Ψ 对应的经典弗里德曼度规的时间参量. 这样, 沿着矢量场 X^a 的矢量线, 对于每一个模式得到一个与时间有关的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Psi^{(n)}}{\partial t} = H^n_{|2}\Psi^{(n)}. \tag{3.8.6}$$

方程 (3.8.5) 可看作二维小超空间模型的 W-D 方程, 其中有一个由扰动引起的附加项 $\frac{1}{2}J \cdot J$. 为了使 J 有限, 须减去与宇宙常数 Λ 的重整化相对应的 $H^n_{|2}$ 基态能量 (也可以利用普朗克质量 n_p 的重整化).

可以把 $\Psi^{(n)}$ 写为

$$\Psi^{(n)} = {}^S\Psi^{(n)}(\alpha, \phi, a_n, b_n, f_n)^V\Psi^{(n)}(\alpha, \phi, c_n)^T\Psi^n(\alpha, \phi, d_n), \tag{3.8.7}$$

式中 ${}^S\Psi^{(n)}$, ${}^V\Psi^{(n)}$ 和 ${}^T\Psi^{(n)}$ 分别满足 ${}^SH^n_{|2}$, ${}^VH^n_{|2}$ 和 ${}^VH^n_{|2}$ 的薛定谔方程.

3.9 边界条件

我们希望能找到与

$$\Psi(h_{ij}, \Phi) = \int \mathrm{d}[g_{\mu\nu}]\mathrm{d}[\Phi]\exp(-\hat{I}) \tag{3.9.1}$$

对应的主方程的解. 式中积分沿所有紧致四维度规和以三维超曲面 S 为边界的物质场. 如果令参数 α 为绝对值足够大的负数, 而保持其他参数不变, 则欧氏作用量 $\hat{I}$ 将按 $\mathrm{e}^{2\alpha}$ 规律趋于零. 因此, 我们期望当 α 趋于负无穷时, Ψ 趋于零.

可以从路径积分 (3.9.1) 估计扰动 $\Psi^{(n)}$ 的标量、矢量和张量部分 ${}^S\Psi^{(n)}$, ${}^V\Psi^{(n)}$ 和 ${}^T\Psi^{(n)}$ 的形式. 取四维度规 $g_{\mu\nu}$ 具有背景形式

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2(-N^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2\alpha(t)}\mathrm{d}\Omega_3^2), \tag{3.9.2}$$

标量场 Φ 为 $\phi(t)$, 再加上一个由含 t 的变量 $(a_n, b_n, f_n), c_n, d_n$ 描述的扰动. 为了使四维背景度规是紧致的, 当 $\alpha \to -\infty$ 时度规须是欧氏的, 即当 $\alpha \to -\infty$ 时 N 必须为纯负虚数, 此时取作 $t = 0$. 在度规为洛伦兹的区域, N 将是正实数. 为了使欧式空间到洛伦兹空间的变换是光滑的, 取 N 为 $-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu}$ 的形式, $t = 0$ 时 $\mu = 0$. 为了使 $t = 0$ 时四维度规和标量场是正常的, 就必须使 $t = 0$ 时 a_n, b_n, c_n, d_n 和 f_n 均为零.

张量扰动 d_n 有欧氏作用量

$${}^T\hat{I}_n = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t d_n{}^T D d_n + \text{边界项}, \tag{3.9.3}$$

式中

$${}^TD = \left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\alpha}\mathrm{d}}{\mathrm{i}N_0\mathrm{d}t}\right) + \mathrm{i}N_0\mathrm{e}^{\alpha}(n^2 - 1)\right]$$

$$+4\mathrm{i}N_0\mathrm{e}^{3\alpha}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}-\frac{3}{2}m^2\phi^2-\frac{3\dot{\phi}^2}{2(\mathrm{i}N_0)^2}-\frac{3\dot{\alpha}^2}{2(\mathrm{i}N_0)^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{i}N_0\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\alpha}}{\mathrm{i}N_0}\right)\right]. \quad (3.9.4)$$

如果背景度规满足背景场方程, 则式 (3.9.4) 最后一项为零. 当 d_n 满足方程

$${}^{T}Dd_n=0 \quad (3.9.5)$$

时, 作用量就只剩下边界项

$${}^{T}\hat{I}_n^{cl}=\frac{1}{2\mathrm{i}N_0}\mathrm{e}^{3\alpha}(d_n\dot{d}_n+4\dot{\alpha}d_n^2). \quad (3.9.6)$$

按 d_n 的路径积分为

$$\int \mathrm{d}[d_n]\exp(-{}^{T}\hat{I}_n)=(\det{}^{T}D)^{-1/2}\exp(-{}^{T}\hat{I}_n^{cl}). \quad (3.9.7)$$

沿不同的背景度规积分 (3.9.7), 便得到波函数 ${}^{T}\Psi^{(n)}$. 我们期望主要贡献来自与经典背景场方程的解相近的背景度规. 对这些度规可采用一绝热近似, 令 α 为时间 t 的缓变函数. 这样, 式 (3.9.5) 的满足边界条件 $t=0$ 时 $d_n=0$ 的解可写为

$$d_n=A(\mathrm{e}^{\nu\tau}-\mathrm{e}^{-\nu\tau}). \quad (3.9.8)$$

式中

$$\nu=\mathrm{e}^{-\alpha}(n^2-1)^{1/2},$$
$$\tau=\int \mathrm{i}N_0\mathrm{d}t.$$

这种近似对于满足条件

$$\left|\frac{\dot{\alpha}}{N_0}\right|\ll n\mathrm{e}^{-\alpha} \quad (3.9.9)$$

的背景场是成立的. 一个正常的欧氏度规, 在 $t=0$ 附近有 $|\dot{\alpha}/N_0|=\mathrm{e}^{-\alpha}$. 如果度规是背景场方程的一个欧氏解, 则有 $|\dot{\alpha}/N_0|<\mathrm{e}^{-\alpha}$. 这个绝热近似当 n 足够大时成立, 在相应区域中背景场方程的解是洛伦兹的, 可采用 WKB 近似. 这样, 波函数 ${}^{T}\Psi^{(n)}$ 可写为

$${}^{T}\Psi^{(n)}=B\exp\left\{-\left[\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{2\alpha}\coth(\nu\tau)+\frac{2}{\mathrm{i}N_0}\dot{\alpha}\mathrm{e}^{3\alpha}\right]d_n^2\right\}. \quad (3.9.10)$$

在欧氏区域, τ 是正实数. 当 n 很大时有 $\coth(\nu\tau)\approx 1$. 在采用 WKB 近似的洛伦兹区域, τ 是复的, 但仍有正的实部; 当 n 很大时 $\coth(\nu\tau)$ 仍将近似为 1. 因此有

$${}^{T}\Psi^{(n)}=B\exp\left(-2\mathrm{i}\frac{\partial S}{\partial\alpha}d_n^2-\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{2\alpha}d_n^2\right). \quad (3.9.11)$$

归一化常数 B 可取为 1. 于是除了一个相因子之外, 引力波模式在 WKB 区域处于基态.

现在考虑波函数的矢量部分 ${}^V\Psi^{(n)}$. 这是一个纯规范, 因为 c_n 可由 j_n 参量化的规范变化给予任何值. 这个规范变换的可能性可由约束

$$\mathrm{e}^{-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial c_n}+4(n^2-4)c_n\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\Psi=0 \tag{3.9.12}$$

看出. 积分式 (3.9.12) 得到

$$\Psi(\alpha,\{c_n\})=\Psi\left[\alpha-2\sum_n(n^2-4)c_n^2,0\right], \tag{3.9.13}$$

这里隐去了对其他变量的依赖性. 也可以用 $\mathrm{i}(\partial S/\partial\alpha)\Psi$ 代替 $\partial\Psi/\partial\alpha$. 这样便可解出 ${}^V\Psi^{(n)}$

$${}^V\Psi^{(n)}=\exp\left[2\mathrm{i}(n^2-4)c_n^2\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right]. \tag{3.9.14}$$

标量扰动包括张量扰动和矢量扰动行为的组合. 前节给出了作用量的标量部分, 它决定于经典场方程 (3.8.10), (3.8.11) 和 (3.8.14) 的解. 这三个方程有一个三参数解族, 满足边界条件 $t=0$ 时 $a_n=b_n=f_n=0$. 还有两个约束方程 (3.8.15) 和 (3.8.17), 对应于两个被 k_n 和 g_n 参量化的规范自由度. 对于方程 (3.8.10), (3.8.11), (3.8.14), (3.8.15) 和 (3.8.17) 的解, 欧氏作用量为

$$\begin{aligned}{}^S\hat{I}^{cl}=&\frac{1}{2\mathrm{i}N_0}\mathrm{e}^{3\alpha}\Big\{-a_n\dot{a}_n+\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n\dot{b}_n+f_n\dot{f}_n+\dot{\alpha}\left[-a_n^2+\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\\&+3\dot{\phi}a_nf_n+g_n(\dot{\alpha}a_n-\dot{\phi}f_n)-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n\left[a_n+\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n\right]\Big\}.\end{aligned} \tag{3.9.15}$$

这里利用了背景场方程.

令 $g_n=k_n=0$ 的规范是最简单的. 但这样我们找不到一个四维紧致度规满足上面三个场方程和两个约束方程. 令 $a_n=b_n=0$, 解约束方程 (3.8.15) 和 (3.8.17), 得到

$$g_n=3\frac{(n^2-1)\dot{\alpha}\dot{\phi}f_n+\dot{\phi}\dot{f}_n+N_0^2m^2\phi f_n}{(n^2-4)\dot{\alpha}^2+3\dot{\phi}^2}, \tag{3.9.16}$$

$$k_n=3(n^2-1)\mathrm{e}^{\alpha}\frac{\dot{\alpha}\dot{\phi}\dot{f}_n+N_0^2m^2\phi f_n\dot{\alpha}-3f_n\dot{\phi}(-\dot{\alpha}^2+\dot{\phi}^2)}{(n^2-4)\dot{\alpha}^2+3\dot{\phi}^2}. \tag{3.9.17}$$

把它们代入式 (3.8.14), 得到 f_n 的一个二阶方程

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{f}_n}{N_0}\right)+N_0^2[m^2\mathrm{e}^{3\alpha}+(n^2-1)\mathrm{e}^{\alpha}]f_n$$

$$=\mathrm{e}^{3\alpha}(-2N_0^2m^2\phi g_n+\dot{\phi}\dot{g}_n-\mathrm{e}^{-\alpha}\dot{\phi}k_n). \tag{3.9.18}$$

当 n 很大时, 可再次利用绝热近似来估算 $|\phi|>1$ 时方程 (3.9.18) 的解

$$f_n=A\sinh(\nu\tau), \tag{3.9.19}$$

式中 $\nu^2=\mathrm{e}^{-2\alpha}(n^2-1)$. 因此, 对于这些模式有

$${}^S\Psi^{(n)}(\alpha,\phi,0,0,f_n)\approx\exp\left(-\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{2\alpha}f_n^2-\frac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial S}{\partial\phi}g_nf_n\right). \tag{3.9.20}$$

这是基态形式 (只差一个小的相因子). 当 a_n 和 b_n 不为零时, ${}^S\Psi^{(n)}$ 的值可由积分约束方程 (3.5.25) 和 (3.5.27) 得到.

张量和标量模式从它们的基态开始, 但要除去 n 很小的情况. 矢量模式是纯规范的, 因此可以忽略. 所以总的扰动能量为

$$E=\sum_n\frac{H_{|2}^{(n)}\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}.$$

当不考虑基态能量时, 这一总扰动能量是很小的. 又因为 $E=\mathrm{i}(\nabla_2S)\cdot J$, 式中 $J=\sum_n\nabla_2\Psi^{(n)}$, 所以 J 也很小. 这表明波函数 Ψ_0 满足未受扰动的小超空间模型的 W-D 方程. 相因子 S 近似为 $-\mathrm{i}\ln\Psi_0$. 然而均匀标量场模式 ϕ 将不再从它们的基态开始. 这有两个原因：第一, $t=0$ 时的规则性要求 $a_n=b_n=c_n=d_n=f_n=0$, 但不要求 $\phi=0$. 第二, ϕ 的经典方程具有频率为常数 m 的阻尼振荡形式. 这表明绝热近似在很小的 t 内是不成立的, 经典场方程的解 ϕ 近似为常数. 这些解的作用量很小, 大的 $|\phi|$ 值也不衰减. 因此, 从大的 $|\phi|$ 值开始的 WKB 具有很大的概率. 它们对应于那些有一个长的暴胀期而后又回到物质为主膨胀型的经典解, 在含有小静质量的其他场的模型中, 物质可在有质量标量场的振荡中分解为具有热谱的光子. 然后, 此模型像辐射为主的宇宙那样膨胀.

3.10 扰动的增长

张量模式满足薛定谔方程

$$\frac{\partial\,{}^T\Psi^{(n)}}{\partial t}={}^TH_{|2}^{n\,T}\Psi^{(n)}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{+d_n^2\left[10\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^2+6\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\right]\right. \tag{3.10.1}$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial d_n^2}-8d_n\mathrm{i}\frac{\partial S}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial d_n}+d_n^2\left[(n^2+1)\mathrm{e}^{4\alpha}-6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2\right]\right\}. \tag{3.10.2}$$

我们可将 ${}^T\Psi^{(n)}$ 写为

$$ {}^T\Psi^{(n)} = \exp(-2\alpha)\exp\left(-2\mathrm{i}\frac{\partial S}{\partial \alpha}d_n^2\right)^T \Psi_0^{(n)}. \tag{3.10.3} $$

利用 W-D 方程的 WKB 近似, 得到

$$ \mathrm{i}\frac{\partial^T \Psi_0^{(n)}}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left[-\frac{\partial^2}{\partial d_n^2} + d_n^2(n^2-1)\mathrm{e}^{4\alpha}\right]^T \Psi_0^{(n)}. \tag{3.10.4} $$

这样, 式 (3.10.4) 具有频率为 $\nu = (n^2-1)^{1/2}\mathrm{e}^{-\alpha}$ 的振子的薛定谔方程形式. 初始波函数 ${}^T\Psi_0^{(n)}$ 处于基态, 而且频率 ν 比 $\dot{\alpha}$ 要大. 在这种情况下, 可利用绝热近似来说明 ${}^T\Psi^{(n)}$ 保持在基本状态

$$ {}^T\Psi_0^{(n)} \approx \exp\left(-\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{2\alpha}d_n^2\right). \tag{3.10.5} $$

当 $\nu \approx \dot{\alpha}$ 时, 绝热近似失效. 此时引力波长在暴胀期等于视界尺度, 波函数也将冻结

$$ {}^T\Psi_0^{(n)} \approx \exp\left(-\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{-2\alpha_*}d_n^2\right), \tag{3.10.6} $$

式中 α_* 是模式超出视界范围时的 α 值. 波函数 ${}^T\Psi^{(n)}$ 将保持式 (3.10.6) 的形式, 直到模式再进入物质为主或辐射为主时期的视界, 此时 α 取大的值 α_e. 于是可以对 (3.10.4) 再次用绝热近似, 但 ${}^T\Psi_0^{(n)}$ 不再处于基态, 它将处于多个高激发态的叠加. 这是引力波模式中基态涨落的放大现象.

标量模式的行为和上面讨论的很相似, 但由于规范自由度的原因, 它们的描述是相当复杂的. 前面我们曾用路径积分的方法估算了 $a_n = b_n = 0$ 时的波函数 ${}^S\Psi^{(n)}$. 在绝热近似适用时, 所找到的基态形式是有效的; 但当绝热近似不再适用时, 即当波长超出暴胀期视界范围时, 这种有效性也就不复存在了. 为了讨论随后波函数的行为, 采用一阶哈密顿约束 (3.5.27) 来估算当 $a_n \neq 0, b_n = f_n = 0$ 时的 ${}^S\Psi^{(n)}$ 的值是比较方便的. 我们得到

$$ {}^S\Psi^{(n)}(\alpha,\phi,a_n,0,0) = B\exp[\mathrm{i}ca_n^2]^S\Psi_0^{(n)}(\alpha,\phi,a_n). \tag{3.10.7} $$

归一化因子 B 和相因子 c 依赖于 α 和 ϕ, 但不依赖于 a_n

$$ c = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^{-1}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2 - \frac{1}{3}(n^2-4)\mathrm{e}^{4\alpha}\right]. \tag{3.10.8} $$

当模式的波长等于暴胀期的视界线度时, 波函数 ${}^S\Psi^{(n)}$ 具有形式

$$ {}^S\Psi_0^{(n)} = \exp\left(-\frac{1}{2}ny_*^{-2}\mathrm{e}^{2\alpha_*}a_n^2\right), \tag{3.10.9} $$

式中 y_* 代表模式超出视界范围时 $y = (\partial S/\partial\alpha)(\partial S/\partial\phi)^{-1}$ 的值, $y_* = 3\phi_*$. 更一般地, 在势为 $V(\phi)$ 的标量场的情况下, $y = 6V(\partial V/\partial\phi)^{-1}$.

把 $b_n = f_n = 0$ 代入标量哈密顿 ${}^S H_{|2}^{(n)}$, 且分别用动量约束 (3.5.25) 和一阶哈密顿约束 (3.5.27) 代换 $\dfrac{\partial}{\partial b_n}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial f_n}$, 可以得到 ${}^S\Psi_0^{(n)}$ 的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial^S\Psi_0^{(n)}}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left\{-y^2\frac{\partial^2}{\partial a_n^2} + \mathrm{e}^{4\alpha}(n^2-4)\cdot\left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{4\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^{-2}\right]a_n^2\right\}{}^S\Psi_0^{(n)}, \quad (3.10.10)$$

式中忽略了 $\dfrac{1}{n^2}$ 阶项. 与 $\dfrac{1}{y^2}$ 比较, 项 $\mathrm{e}^{4\alpha}(\partial S/\partial\alpha)^{-2}$ 是很小的, 但在背景解的最大半径附近例外. ${}^S\Psi_0^{(n)}$ 的薛定谔方程与 ${}^T\Psi_0^{(n)}$ 的方程 [方程 (3.10.4)] 很相似, 只是动力项乘以一个因子 y^2, 势项除以 y^2. 因此, 我们希望对视界范围内的波长, ${}^S\Psi_0^{(n)}$ 有基态形式 $\exp\left(-\dfrac{1}{2}y^{-2}\mathrm{e}^{2\alpha}a_n^2\right)$, 像式 (3.10.9) 那样. 另一方面, 当波长超出视界范围时, 薛定谔方程 (3.10.10) 表明 ${}^T\Psi_0^{(n)}$ 将以式 (3.10.9) 的形式冻结, 一直到模式再进入物质为主时期的视界范围. 即使宇宙的状态方程到达波长超出视界线度的辐射为主时期, ${}^S\Psi_0^{(n)}$ 仍然将保持为式 (3.10.9) 的形式. 标量模式的基态涨落放大, 其方式与张量模式的相似. 在重返视界范围时, 标量模式的均方根涨落 (在规范 $b_n = f_n = 0$ 的条件下) 要比同样波长的张量模式的均方根涨落大一个因子 y_*.

3.11 实验检验

在矢量场 X^i 的矢量线上一给定点, 即在作为经典场方程解的背景度规中给定的 α 和 ϕ, 由 ${}^T\Psi_0^{(n)}$ 和 ${}^S\Psi_0^{(n)}$ 可以计算观测到不同的 d_n 和 a_n 值的相对概率. 实际上, 对 ϕ 的依赖性是无关紧要的, 可以忽略. 于是可以计算观测微波背景各向异性的不同量的概率, 并把这些预言与观测上限进行比较.

张量和标量扰动模式在 α 值很大时处于高激发态. 这表明我们可以把它们的发展作为一个整体演化来处理, 演化决定于 d_n 和 a_n 初始时的经典运动方程. $\dot{d}_n$ 和 $\dot{a}_n$ 的初始分布分别正比于 $|{}^T\Psi_0^{(n)}\pi_{d_n}{}^T\Psi_0^{(n)}|$ 和 $|{}^S\Psi_0^{(n)}\pi_{a_n}{}^S\Psi_0^{(n)}|$. 当模式重返视界内时, 分布集中在 $\dot{d}_n = \dot{a}_n = 0$ 处.

$b_n = f_n = 0$ 的超曲面为暴胀期金边解的常能量密度面. 根据局部能量守恒, 在暴胀期后它们仍保持为长能量密度面, 此时能量由均匀背景标量场 ϕ 的相关振荡决定. 如果标量粒子分解为光子, 并把宇宙加热, 则 $b_n = f_n = 0$ 的面是等温面. 这样, 微波背景最稀疏的面将是温度为 T_s 的超曲面. 可以认为, 微波辐射是从这个面传播到地球的. 因此, 观测到的温度将是

$$T_0 = \frac{T_s}{1+z}, \quad (3.11.1)$$

式中 z 是上述超曲面的红移, 不同方向上的 z 不同将引起观测到的温度不同, $1+z$ 的表达式为

$$1+z=l^{\mu}n_{\mu}, \tag{3.11.2}$$

式中 n_{μ} 是 $g_n=k_n=j_n=0$ 和 $b_n=f_n=0$ 时常数 t 面上的单位法矢量, l^{μ} 是零短程线的切矢量. 沿着观察者的过去光锥, 可以计算 $l^{\mu}n_{\mu}$ 的演化

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(l^{\mu}n_{\mu})=n_{\mu;\nu}l^{\mu}l^{\nu}. \tag{3.11.3}$$

λ 为零短程线上的仿射参量, $n_{\mu;\nu}$ 的非零分量为

$$n_{i;j}=\mathrm{e}^{2\alpha}\left[\dot{\alpha}\Omega_{ij}+\sum_n(\dot{\alpha}_n+\dot{\alpha}a_n)\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q+\sum_n(\dot{b}_n+\dot{\alpha}b_n)P_{ij}+\sum_n(\dot{d}_n+\dot{\alpha}d_n)G_{ij}\right]. \tag{3.11.4}$$

我们采用的规范中, 在视界尺度上, 式 (3.11.4) 中主要各向异性项是含有 $\overset{*}{\alpha}a_n$ 和 $\dot{\alpha}d_n$ 的那些项. 他们给出具有形式

$$\langle(\Delta T/T)^2\rangle\approx\langle a_n^2\rangle\text{或}\approx\langle d_n^2\rangle \tag{3.11.5}$$

的温度各向异性, 在视界尺度上, 对各向异性有贡献的模式数目具有 n^3 的量级. 我们得到

$$\langle a_n^2\rangle=y_*^2n^{-1}\mathrm{e}^{-2\alpha_*}, \tag{3.11.6}$$

$$\langle d_n^2\rangle=n^{-1}\mathrm{e}^{-2\alpha}. \tag{3.11.7}$$

对各向异性的主要贡献来自标量模式, 由此得到

$$\langle(\Delta T/T)^2\rangle\approx y_*^2n^2\mathrm{e}^{-2\alpha_*}. \tag{3.11.8}$$

于是 $n\mathrm{e}^{-\alpha_*}\approx\dot{\alpha}_*$ 是现在视界尺度的哈勃常数值. $\langle(\Delta T/T)^2\rangle$ 的观测上限为 10^{-8}, 这要求哈勃常数小于 $5\times10^{-5}m_p$, 从而限制标场的质量小于 10^{14}GeV. 这就是说, 如果标量场的质量为 10^{14}GeV 或更小, 则我们讨论的扰动 (由初始基态增长起来的扰动) 便与微波背景辐射的观测结果相符.

前面我们计算了常时间、常密度超曲面的标量扰动. 在那样的规范里, 没有密度变化. 但是我们可以对 $a_n=b_n=0$ 的规范作一个变换, 当波长进入视界范围时, 密度涨落为

$$\langle(\Delta\rho/\rho)^2\rangle\approx y^2\frac{\dot{\rho}_{\mathrm{e}}^2}{\dot{\alpha}_{\mathrm{e}}^2\rho_{\mathrm{e}}^2}\dot{\alpha}_*^2. \tag{3.11.9}$$

由于 y 和 $\dot{\alpha}_*$ 仅以对数形式依赖于扰动的波长, 于是式 (3.11.9) 给出一个大范围的密度涨落谱. 这些密度涨落可以按经典的场方程演化, 直到能够解释银河系和我们观测到的其他宇宙结构的形成.

第4章　虫洞波谱

在半经典近似中, 虫洞可看作经典欧氏场方程的解. 但是这些解相当特殊, 且仅对于某些类型的物质场才存在. 另一方面, 可把虫洞描述为具有适当边界条件的 W-D 方程的解. 含有无质量标量场的小超空间模型可给出这些解的不连续波谱. Giddings-Strominger 瞬子解对应于无限多这种解之和. 在有质量标量场的小超空间模型中, 也显示出具有给定渐近形式解的不连续波谱.

虫洞是由一狭窄管道式喉连接的两个大区域构成的欧氏度规. 宏观虫洞也许可以为黑洞的完全蒸发和消失提供机制, 而微观虫洞似乎会对物理常数, 尤其是宇宙常数有重要影响. 虫洞主要作为经典欧氏场方程的解 (瞬子) 来研究, 它们是半经典处理方案的基础. 在这类方案里, 人们做了稀薄虫洞近似, 即忽略连接相同大区域的不同虫洞端点之间的相互影响.

但是实的类虫洞解只在几种特殊的物质场情况下才存在 (允许 Ricci 张量有负的本征值). 这些物质场不包括极小耦合标量场 (除非它是纯虚的), 但包括反对称张量场; 在四维情况下, 张量场的场方程等效于标量场的方程. 在四维情况下没有电磁场虫洞解, 而有 Yang-Mills 解, 但是这些解一般不是作用量的局域极小值. 因此, 它们对半经典近似的贡献还不清楚. 也存在有作用量局域极小值的 Yang-Mills 解, 但它们只存在于 Yang-Mills 场没有同任何场耦合的情况. 此外, 这些解具有几个普朗克单位尺度的极大喉. 这使人们很难看到虫洞如何把所有在宏观黑洞蒸发时失去的粒子和信息带走.

可能有人因此假设, 仅仅在物质组成允许虫洞瞬子的几种非常受限制的理论中, 虫洞才重要. 如果这样, 则将难以使人相信虫洞是黑洞蒸发的机制, 因为这一过程对于任何物质组成, 甚至除了引力场没有物质都会发生. 这样还会在能否用虫洞解释宇宙常数取值的问题上产生疑问.

基于以上考虑, 霍金提出一个不同的研究方法, 即不把虫洞看作经典欧氏场方程的解, 而看作是 W-D 方程的解. 波函数必须满足某些边界条件, 以便描述虫洞. 边界条件是: 对于大的三维几何, 波函数指数衰减, 当三维几何坍缩至零时, 波函数以某一适当的方式成为规则的. 下面我们要讨论遵守边界条件的 W-D 方程解的不连续波谱. 我们用含有标量场的 W-D 方程的小超空间解来说明这一点. 含有无质量标量场的一连续解簇, 对应于 Giddings 和 Strominger 发现的瞬子解. 在无限远处波函数是衰减的, 但是在零半径附近它们无限地振荡. 这些解可以描述为不连续

解簇的无限项和, 它们在无限远和半径为零处都有好的行为. 在有质量标量场的情况下, 也可以近似地构造出这些解, 对它们的渐近形式, 我们将给出明显的表达式.

4.1 边界条件

在稀薄虫洞近似中, 可以把每一个虫洞分立地当作连接两个渐近欧氏区域的虫洞来处理. 因此, 我们要讨论拓扑为 $R^1 \times S^3$ 的欧氏度规, 在 R^1 的每一终点处, 它是渐近欧氏的. 为此, 需要计算格林函数

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(y_1)\phi(y_2)\cdots\rangle, \tag{4.1.1}$$

式中 $x_1, x_2, \cdots$ 和 $y_1, y_2, \cdots$ 是远离虫洞的两渐近区域中的点. 在平直空间中, 点 $x_1, x_2, \cdots$ 和 $y_1, y_2, \cdots$ 实际上可以取为无限远. 通过引入虫洞态的完全系

$$\begin{aligned} &\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(y_1)\phi(y_2)\cdots\rangle \\ =&\sum_k \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots|\Psi_k\rangle \times \langle \Psi_k|\phi(y_1)\phi(y_2)\cdots|0\rangle \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

(式中 $|0\rangle$ 是没有虫洞的真空态, 而 $|\Psi_k\rangle$ 是虫洞态的完全系), 便可以将格林函数分解因式.

这些 $|\Psi_k\rangle$ 虫洞态是什么? 令 S 为分离两个渐近欧氏区域的三维曲面, 于是虫洞量子态可以描述为波函数 $\Psi_k(h_{ij}, \phi_0)$, 它依赖于三维度规 h_{ij} 和物质场 ϕ_0. 这波函数在所有有限非零的三维度规 h_{ij} 处满足 W-D 方程和动量约束方程

$$\begin{aligned} H\Psi_k =& \bigg[-\frac{1}{2} m_p^{-2} h^{1/2} (h_{il}h_{jm} + h_{im}h_{jl} - h_{ij}h_{lm}) \frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{lm}} \\ &- m_p^2 h^{1/2(3)} R + \frac{1}{2} h^{1/2} T^{mn}\left(\phi_0, -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\phi_0}\right)\bigg], \\ &\Psi_k(h_{ij}, \phi_0) = 0. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

$$H^i\Psi_k = \left[-2\mathrm{i}m_p^2\left(\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\right)_{|j} + T^{ni}\left(\phi_0, -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\phi_0}\right)\right]\Psi_k(h_{ij}, \phi_0) = 0. \tag{4.1.4}$$

但是如果这个波函数对应于虫洞而不是其他种类的时空, 它们还将满足三维度规 h_{ij} 退化或者变为无限大时的边界条件.

h_{ij} 退化时的边界条件描述四维度规非奇异这一事实. 在所有三维度规的超空间中这些边界条件将是什么还不清楚, 但是在小超空间模型中, 正如下面要考虑的, 波函数应该是规则的或者 (依赖于因子顺序) 随 a 接近零而变为半径 a 的幂的形式, 它当然不应该振荡无限多次.

当 h_{ij} 足够大时，边界条件应表示四维度规是渐近欧氏的. 这可以解释为：渐近态中没有引力激发. 如果在渐近区域也没有物质激发的边界条件，就将得到 “基态” 或真空波函数 Ψ_0 和无边界波函数相似，由路径积分可以得到真空波函数

$$\Psi_k(h_{ij}, \phi_0) = \int \mathrm{d}[g_{\mu\nu}]\mathrm{d}[\phi]\mathrm{e}^{-I[g,\phi]}. \tag{4.1.5}$$

在无边界状态的情况下，路径积分是沿所有给出的紧致度规和物质场的. 但在真空态情况下，路径积分遍及所有的欧氏度规和所有在无限远处为零或者规范为零的物质场.

在小超空间模型中，无边界波函数以 $\mathrm{e}^{a^2/2}$ 的形式随 a 的增大而增大，其中 a 是三维曲面 S 的半径；另一方面，真空态波函数对于足够大的 a 以 $\mathrm{e}^{-\alpha^2/2}$ 的形式随 a 的增大而减小. 这一不同是由于引力作用量中的主要项是表面项

$$-\frac{m_p^2}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x\sqrt{h}K, \tag{4.1.6}$$

式中 K 是曲面 S 外法线 2 形式的迹. 在无边界波函数的情况下，零物质场稳态度规是半径为 a 的三维球内平直空间. 外法线发散，作用量为负的. 这使得无边界波函数随着三维曲面尺寸的增大而增大. 另一方面，真空波函数的稳态度规是半径为 a 的三维球外部平直空间. 外法线收敛，作用量为正的，在大半径 a 处波函数衰减.

然而，对于小超空间模型存在另一个 W-D 方程的解，在 $a=0$ 处也是规则的，在大半径处也衰减. 此时某些解可以描述为具有守恒量子流的解的叠加，这些解不能与紧致四维几何隔离，因为那样通量将为零. 在大半径处的行为表明，这些解是渐近欧氏的，而且在 $a=0$ 处是非奇异的. 这样，这些解应该对应于连接两个接近欧氏区域的虫洞.

借助于 $S^3\times R^1$ 拓扑空间所有度规上的路径积分，可以定义虫洞的基态. 在 R^1 每一终点处，路径积分中的物质场将规范为零. 这意味着虫洞的波函数与真空态波函数是等同的，由遍及所有渐近欧氏度规和所有渐近零质量场的路径积分给出. 另外，在 $a=0$ 处规则，在大半径处衰减的其他 W-D 方程的解可以解释为虫洞的 “激发态”. 在文献 (Hartle, 1983) 中，把这些解解释为闭宇宙的激发态. 这是因为在小 a 处波函数振荡，所以对应于洛伦兹的闭弗里德曼度规. 同样可以认为，大 a 处指数形式的波函数对应于欧氏虫洞度规. 实际上，虫洞度规是弗里德曼度规的解析延拓.

虫洞激发态的波函数也可以由路径积分描述. 路径积分中的度规是渐近欧氏的，这意味着这里没有渐近的引力激发. 但是在无限远处有物质场源，可以解释为存在有穿越虫洞的物质粒子. 这里，“在无限远处” 意指与虫洞特有尺度相比的大距离. 这适用于计算低能格林函数的源，也适用于稀薄虫洞近似下其他虫洞的有效

源. 我们可以把稀薄虫洞近似解释为虫洞是 "即壳"(on sell). 于是有关于 W-D 方程的边界条件: 至少在小超空间情况下允许解的唯一一个分立波谱. 然而, 当超出稀薄虫洞近似时, 或者探讨相互靠近的虫洞时, 就要在对格林函数分解因式的态中包含 "离壳"(off sell) 虫洞态的连续簇.

4.2 具有无质量标量场的小超空间模型

我们讨论形式为

$$ds^2 = \sigma^2[N^2(t)\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2] \tag{4.2.1}$$

的度规, 式中 $\sigma^2 = 2G/3\pi, \mathrm{d}\Omega_3^2$ 是单位半径三维球的度规. 如果 N 为虚数, 这是弗里德曼宇宙的洛伦兹度规, 当 N 为实数时, 这是欧氏虫洞度规. 但是 W-D 方程的解不依赖于 N 和 t. 于是根据波是振动的或指数形式的, 分别解释为弗里德曼宇宙或虫洞.

首先考虑零质量最小耦合标量场 ϕ, W-D 方程为

$$\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial a}a\frac{\partial}{\partial a} - \frac{1}{a^3}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - a\right]\Psi(a,\phi) = 0, \tag{4.2.2}$$

其中因子顺序在小超空间坐标变换下是不变的, 于是可以令

$$\Psi(a,\phi) = c(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\phi} \tag{4.2.3}$$

来分离变量, 其中

$$\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}a^2} + \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}a} + \left[\frac{k^2}{a^2} - a^2\right]c = 0. \tag{4.2.4}$$

两个独立的解为

$$J_{\pm\mathrm{i}k/2}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}a^2\right]. \tag{4.2.5}$$

可以找到这些解的线性组合, 在大的半径 a 处以 $\mathrm{e}^{-a^2/2}$ 形式变化, 但在接近 $a = 0$ 处, 解以 $a^{\pm\mathrm{i}k}$ 形式变化, 于是它们振动无限多次.

这些解是量子力学算符 $\pi_\phi = -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ 的本征态, 本征值为 k. 经典地,

$$\pi_\phi = \frac{\mathrm{i}}{N}a^3\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{4.2.6}$$

于是这些解携带一守恒的标量流 $q = 2\pi^2 k$, 其中

$$q = \mathrm{i}\int_S \phi_{;\mu}\mathrm{d}\sigma^\mu. \tag{4.2.7}$$

它们将在 a 处振荡 $(0 < a < k^{1/2})$, 在这些区域, 它们可以解释为对应于具有标量流 q 的经典洛伦兹–弗里德曼解. 这些解将从 $a=0$ 膨胀到最大半径 $a=(q/2\pi^2)^{1/2}$, 并再次收缩到 $a=0$. 在 $a=0$ 附近无限多数目的波函数振动对应于最初和最终弗里德曼解的奇点.

当 $a > k^{1/2}$ 时, 波函数将以 $\mathrm{e}^{-a^2/2}$ 的形式指数地衰减. 这表明它们对应于渐近欧氏经典解, 半径 a 的下限 $k^{1/2}$ 和非零标量流 q 的存在表明解具有连接两个渐近欧氏区域的虫洞的形式. 对于实的 q, 在欧氏解中 ϕ 的梯度将是虚的, 这意味着标量场的能量–动量张量将和在欧氏部分上为实的标量场的能量–动量张量反号. 经典欧氏解和 Giddings 与 Strominger 发现的解相同, 恰恰是含有实 ϕ 的经典弗里德曼解的解析延拓.

在虫洞的半经典方案中, 我们考虑作为经典欧氏解的瞬子. 如果要求物质场是实的, 这样的解仅在反对称张量场或 Yang-Mills 场的特殊情况下才存在. 在纯引力的情况下它们不存在. 这表明, 对于宇宙常数问题, 虫洞不是一般解. 另一方面, 在量子力学波函数方案中, 人们可以期望, 对于所有合理的物质形式, 存在满足适当边界条件的 W-D 方程的解.

当然上面给出的解不满足 $a=0$ 处的规则性条件. 但我们将表明, 有另外一类 W-D 方程的解, 它们在 $a=0$ 处的规则的, 并在大 a 值处是衰减的, 在小超空间中, 我们引入一新的坐标, 定义为

$$x = a\sinh\phi, \quad y = a\cosh\phi. \tag{4.2.8}$$

此时 W-D 方程变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - y^2 + x^2\right)\Psi = 0. \tag{4.2.9}$$

这是能量符号相反的两个谐振子的方程. 其解在原点处规则, 且在无限远处衰减, 恰为两谐振子波函数的乘积

$$\Psi = \Psi_n(x)\Psi_n(y), \tag{4.2.10}$$

式中

$$\Psi_n(x) = (2^n n!)^{-1/2} H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}. \tag{4.2.11}$$

这些谐振子解, 以下用 $|n\rangle$ 表示, 构成 W-D 方程解的基础, 它们在原点处规则, 在无限远处衰减. 于是在 W-D 方程的对称性下, 它们必须可以相互转换. 这可以看作是 xy 平面内的洛伦兹变换, 由 Killing 矢量 $\partial/\partial\phi = y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$ 生成. 我们可以用两个谐振子的湮灭和产生算符来表示, 采用

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + a_x^+), \tag{4.2.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x-a_x^+). \tag{4.2.13}$$

对称生成元 $K=\mathrm{i}\pi_\phi$ 为

$$\frac{\partial}{\partial \phi}=(a_x a_y-a_x^+ a_y^+). \tag{4.2.14}$$

我们可以按谐振子态, 用式 (4.2.14) 来表示 K 本征态; 反之亦然. 令

$$|k\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(k)|n\rangle. \tag{4.2.15}$$

用 K 作用之, 得到

$$\mathrm{i}kc_n=(n+1)c_{n+1}-nc_{n-1}. \tag{4.2.16}$$

可以由 $c_0(k)$ 用递推的方法得到 $c_n(k)$, 而 $c_0(k)$ 由规则化来确定. 用超几何函数 F 表示, 得到

$$\begin{aligned}c_n(k)&=(-1)^n\pi^{3/2}\mathrm{sech}\left(\frac{1}{2}\pi k\right)F\left(-n,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}k,1,2\right)\\&=\pi^{3/2}\mathrm{sech}\left(\frac{1}{2}\pi k\right)F\left(-n,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}k,1,2\right).\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

这里 F 是 $\mathrm{i}k$ 的奇或偶的 n 次多项式. 因此, 我们可以把奇异的 K 本征态看作无限多规则谐振子解的叠加. 类似地, 谐振子解可认为是不同 K 本征态的叠加, 就像波动方程的波包解可被看作平面波的叠加一样. 于是, 谐振子解可以解释为经典解的相干态.

含有共形不变标量场 ϕ 的小超空间模型, 存在谐振子解的类似的不连续波谱. W-D 方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-a^2+\xi^2\right)\Psi=0, \tag{4.2.18}$$

式中 $\xi=a\phi$. 这一方程显然有 a 和 ξ 的谐振子解. 然而人们总可以利用一个自由度做一度规的共形变换, 来建立耦合于引力的共形标量场和最小标量场之间的等价性. 在目前的情况下, 由定义新的半径和标量场

$$\tilde{a}=a\sqrt{1-\phi^2},\quad \phi=\mathrm{arctanh}\phi, \tag{4.2.19}$$

可以看到这种等价性, 用这些新变量, W-D 方程就和最小无质量标量场的方程一样了. 于是存在有 K 本征态解. 在 $a=0$ 处这些解是奇异的, 它们是解析延拓了欧氏虫洞瞬子中 $a=0$ 处的奇点. 在 $\phi=\pm1$ 处, 它们也是奇异的, 这对应于在 $\phi=\pm1$ 处牛顿引力常数变为无限大且改变符号. 但在 $a=0$ 和 $\phi=\pm1$ 处谐振子解的行为都是好的. 这样, 它们可在有共形不变标量场的理论中提供一种虫洞的量子力学描述.

4.3 有质量标量场的小超空间模型

共形不变的和无质量的最小耦合标量场都是相当特殊的物质形式. 对于其他的物质形式, 是否存在 $a=0$ 处规则、大半径处衰减的 W-D 方程的解? 很难完全有信心地回答这个问题, 因为人们显然不能得到封闭形式的、明显的严格解, 即使在具有非零自耦合势 $U(\phi)$ 的最小耦合标量场这一简单情况下. 但是, 对于有质量标量场的情况, 人们可以找到明显的渐近解, 而且类似的构造方法对于相当任意的势都是可行的.

对于耦合于均匀标量场 ϕ、半径为 a 的 FRW 三维球几何, 选择适当单位, W-D 方程可以写为

$$\begin{aligned} W\Psi &\equiv \left[a\frac{\partial}{\partial a}a\frac{\partial}{\partial a}-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-a^4+2a^6U(\phi)\right]\Psi(a,\phi) \\ &\equiv \ddot{\Psi}-\Psi''-a^4\Psi+2a^6U\Psi=0, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

式中圆点表示 $\partial/\partial a$, 撇表示 $\partial/\partial\phi$. 作为出发点, 构造一个零级 WKB 近似 e^{-I}, 其中 $I(a,\phi)$ 是经典欧氏解的作用量, 从 (a,ϕ) 点到 $\alpha=\infty$ 和 $U(\phi)$ 极小处的 ϕ(为了使解是渐近欧氏的, 必须使 $\phi=0$ 处 $U=0$).

欧氏作用量 $I(a,\phi)$ 满足哈密顿-雅可比方程

$$\dot{I}^2-I'^2-a^4+2a^6U=0. \tag{4.3.2}$$

I 中平方项的符号与洛伦兹作用量中的相反. 对于大的 a, 可以用渐近形式给出作用量

$$I(a,\phi)=a^3E(\phi)+\frac{1}{2}a^2F(\phi)+aG(\phi)+H(\phi)+o(a^{-1}), \tag{4.3.3}$$

式中

$$E'^2-9E^2=2U, \tag{4.3.4}$$

在 $\phi=0$ 处 $E(\phi)$ 有极小值零, 我们得到关于 ϕ 的其他函数的微分方程, 积分后得到

$$F(\phi)=\exp\left[\int_0^\phi\frac{6E(x)\mathrm{d}x}{E'(x)}\right], \tag{4.3.5}$$

$$G(\phi)=[F(\phi)]^{1/2}\int_0^\phi[E'(x)]^{-3}[F(x)]^{-1/2}\times\left\{U(x)[F(x)]^2-\frac{1}{2}[E'(x)]^2\right\}\mathrm{d}x, \tag{4.3.6}$$

$$H(\phi)=\int_0^\phi[E'(x)]^{-1}\left[F(x)G(x)-\frac{1}{2}F'(x)G'(x)\right]\mathrm{d}x. \tag{4.3.7}$$

只在 $\phi=0$ 处 $F(\phi)\neq 0(F=1)$, 于是沿着 $\phi=0$ 的线有 $I(a,0)=\frac{1}{2}a^2$, 这对应于空的平直时空的欧氏解. 由式 (4.3.4) 和 (4.3.5) 容易看到, 随着远离 $\phi=0, E(\phi)$ 和 $F(\phi)$ 都是 $|\phi|$ 的单调递增函数, 只要 $U(\phi)$ 维持为非负或至少不降低到 $-\frac{9}{2}E(\phi)$.

对于 $U(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi^2$ 和 $\phi^2\ll 1$, 我们可以找到 E,F,G 和 H 的幂级数解

$$F(\phi)=m\left[\frac{1}{2}\phi^2+\frac{3^2}{2^5}\phi^4+\frac{3^3}{2^8}\phi^6+\frac{3^5}{2^{14}}\phi^8+0\phi^{10}+\frac{3^7}{2^{21}}\phi^{12}-\frac{3^9}{2^{24}}\phi^{14}+o(\phi^{16})\right], \tag{4.3.8}$$

$$E(\phi)=1+\frac{3}{2}\phi^2+\frac{3^2 5}{2^6}\phi^4+\frac{3^2}{2^8}\phi^6-\frac{3^3 13}{2^{16}}\phi^8+\frac{3^4 41}{2^{15}5}\phi^{10}-\frac{3^4 2603}{2^{21}5}\phi^{12}-\frac{3^5 904417}{2^{24}7^2}\phi^{14}+o(\phi^{16}), \tag{4.3.9}$$

$$\begin{aligned}G(\phi)=&m^{-1}\left[\frac{3}{2^4}\phi^2-\frac{3^3}{2^8}\phi^4+\frac{3\times 41}{2^{12}}\phi^6+\frac{3^2 115}{2^{19}}\phi^8\right.\\&\left.-\frac{3^3 410953}{2^{21}5^2}\phi^{10}-\frac{3^3 2319221}{2^{25}5^2}\phi^{12}+o(\phi^{14})\right],\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

$$H(\phi)=m^{-2}\left[-\frac{3}{2^4}\phi^2-\frac{3^2}{2^8}\phi^4-\frac{43}{2^9}\phi^6+\frac{3^3 26267}{2^{22}}\phi^8-\frac{3^4 1377457}{2^{19}5^5}\phi^{10}+o(\phi^{12})\right]. \tag{4.3.11}$$

对于 $U(\phi)=(\lambda/2p)\phi^{2p}$, 我们得到

$$\begin{aligned}E=&\left[\frac{\lambda}{p}\right]^{1/2}\frac{\phi^{p+1}}{p+1}\cdot\left[1+\frac{3^2\phi^2}{2(p+1)(p+3)}+\frac{3^4(3p+1)\phi^4}{2^3(p+1)^3(p+3)(p+5)}\right.\\&\left.+\frac{3^6(5p^3+15p^2-5p+1)\phi^6}{2^4(p+1)^5(p+3)^2(p+5)(p+7)}+o(\phi^8)\right],\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

$$F=1+\frac{3\phi^2}{p+1}+\frac{3^2p(p+4)\phi^4}{2(p+1)^3(p+3)}+\frac{3^2(p^4+10p^3+23p^2-34p+6)\phi^6}{2(p+1)^5(p+3)(p+5)}+o(\phi^8), \tag{4.3.13}$$

$$G=\left[\frac{\lambda}{p}\right]^{-1/2}\frac{3(2p-1)\phi^{3-p}}{2(p+1)^2(3-p)}\times\left[1-\frac{3(4p^4-14p^3-61p^2+134p-39)}{2(p+1)^2(p+3)(2p-1)(5-p)}\phi^2+o(\phi^4)\right], \tag{4.3.14}$$

$$H=-\left[\frac{\lambda}{p}\right]^{-1}\frac{3(2p-1)\phi^{4-2p}}{(p+1)^3(3-p)}[1+o(\phi^2)]. \tag{4.3.15}$$

如果把展开式 (4.3.3) 写为

$$I(a,\phi)=\frac{1}{2}a^2+\sum_{l=-3}^{\infty}a^{-l}F_l(\phi), \tag{4.3.16}$$

则 $E=F_{-3}$, $F=1+2F_{-2}$, $G=F_{-1}$ 和 $H=F_0$, 然后我们看到对于小的 ϕ 值, F_l 以 $\lambda^{-1-l/2}\phi^{2-(p-1)(l+2)}$ 的形式变化. 因此, 如 $p>1$, 对于 $l>(4-2p)/(p-1)$, 在

小 ϕ 值处这一展开式不成立. 然而, 对于 $U=\frac{1}{2}m^2\phi^2, p=1$ 的情况, 显然这个展开式对所有的 l 在小 ϕ 值处均成立. 于是我们假设, 在足够小的 ϕ 值处, 势以 $\frac{1}{2}m^2\phi^2$ 的形式变化 $(m^2>0)$.

假设 $U(\phi)$ 不比 $e^{6|\phi|}$ 的常数倍增长得更快, 可以看到, 对于大的 $|\phi|, l<0$ 时, α^{-l} 的展开系数为

$$F_l(\phi)\approx C_l e^{-l|\phi|}, \tag{4.3.17}$$

式中 C_l 是依赖于 $U(\phi)$ 的常数. 原则上, 对式 (4.3.4)~(4.3.6) 做数值计算, 便可求出其值, 显然, C_{-3} 和 C_{-2} 都是正的. 于是对于大的 a 值,

$$a^2=y^2-x^2=uv, \tag{4.3.18}$$

和大的 $|\phi|$ 值,

$$\phi=\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{v}{u}, \tag{4.3.19}$$

作用量

$$I\approx C_{-3}a^3e^{3|\phi|}=C_{-3}(y+|x|)^3=C_{-3}\max(u^3,v^3), \tag{4.3.20}$$

式中 u 和 v 是小超空间零坐标

$$u=y-x=ae^{-\phi},\quad v=y+x=ae^{\phi}, \tag{4.3.21}$$

它们均取非负值. 用这些零坐标, 可将哈密顿–雅可比方程 (4.3.2) 改写为

$$\frac{\partial I}{\partial u}\frac{\partial I}{\partial v}=\frac{1}{4}uv-\frac{1}{2}u^2v^2U\left(\frac{1}{2}\ln\frac{v}{u}\right), \tag{4.3.22}$$

在小超空间的一个零边界附近 (如 $v=0$), 作用量的近似式 (4.3.20) 也成立, 只要另一个零坐标 (如 u) 取足够大的值 (甚至当 $a^2=uv$ 为零).

为了粗略地想象整个小超空间上作用量的行为, 需要有一个自然近似的清晰的表述. 为此, 我们用 $E=\frac{2}{9}m\sinh^2\frac{3}{2}\phi$ 代替式 (4.3.3) 中的前两项, 此式用来给出当 $u=\frac{1}{2}m^2\phi^2$ 时式 (4.3.8) 的第一项. 如果标量场的势为 $U=\frac{2}{9}m^2\sinh^2\frac{3}{2}\phi$, 实际上这个 E 是式 (4.3.4) 的解. 因此, 如果实际的势增长得稍快了些, 使它显得太大了, 但是对于大的 ϕ 值, E'^2 和 $9E^2$ 均将粗略地以 $9C_{-3}^2e^{6|\phi|}$ 的形式变化, 并且如果势上升得不那么快, 它们将比 $2U$ 项大得多. 由式 (4.3.5) 给出 $F=\cosh^{4/3}\frac{3}{2}\phi$, 它确实与式 (4.3.9) 的前两项符合, 并且具有正确的近似式 (4.3.17). 此时这两个近似函数给出

$$I(a,\phi)\sim\frac{2}{9}ma^3\sinh^2\frac{3}{2}\phi+\frac{1}{2}a^2\cosh^{4/3}\frac{3}{2}\phi$$

$$=\frac{2}{9}m\left(\frac{1}{2}u^{3/2}-\frac{1}{2}v^{3/2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u^{3/2}+\frac{1}{2}v^{3/2}\right)^{4/3}. \tag{4.3.23}$$

一旦有了欧氏哈密顿–雅可比方程 (4.3.2) 或 (4.3.22) 的解, 梯度矢量场 ∇I 的积分曲线便给出经典欧氏解的轨迹. 指标的上升由小超空间度规

$$\mathrm{d}s^2=-a\mathrm{d}a^2+a^3\mathrm{d}\phi^2=(y^2-x^2)^{1/2}(-\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2)=-u^{1/2}v^{1/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{4.3.24}$$

的逆给出.

沿每一条积分曲线的欧氏时间导数由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}=-\nabla I\cdot\nabla=a^{-1}\frac{\partial I}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}-a^{-3}\frac{\partial I}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}=2u^{-1/2}v^{-1/2}\left(\frac{\partial I}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial I}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\right) \tag{4.3.25}$$

给出, 或者由 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\tau=a^{-3}(\dot{I}\dot{f}-I'f')$ 给出.

按照对应于度规 (4.3.24) 的拉普拉斯, W-D 方程 (4.3.1) 对应于

$$\frac{1}{2}a^{-3}W\Psi=\left(-\frac{1}{2}\nabla^2+V\right)\Psi=0, \tag{4.3.26}$$

$$V(a,\phi)=-\frac{1}{2}a+a^3U(\phi), \tag{4.3.27}$$

并且哈密顿–雅可比方程具有形式

$$\frac{1}{2}(\nabla I)^2=V. \tag{4.3.28}$$

如果将 WKB 波函数写为

$$\Psi=C(a,\phi)\mathrm{e}^{-I}\equiv\mathrm{e}^{h-I}, \tag{4.3.29}$$

则采用式 (4.3.25), 给出

$$h=\int\left[\frac{1}{2}\nabla^2 I-\frac{1}{2}(\nabla h)^2-\frac{1}{2}\nabla^2 h\right]\mathrm{d}\tau, \tag{4.3.30}$$

式中积分沿着每一条经典的轨迹. 在 I 比 h 变化更迅速的 WKB 极限情况下, 由式 (4.3.30) 右端含 h 的衰减项构成的一级 WKB 近似是足够精确的. 如果要求更高阶近似, 可以把导出的左端放回到右端去做更高阶的 WKB 近似迭代.

对于 n 维小超空间中切于 ∇S 的 $(n-1)$- 参数轨迹簇中的每一个, 式 (4.3.30) 有一个积分常数 (此处 $n=2$). 把因子 C 具体化为维数是 1 的超曲面 (在此为一曲线) 上的缓变函数 ($C=\mathrm{e}^h$), 此超曲面与经典轨迹相交, 可以得到所有以相同作用量为基础又依赖于这一 $(n-1)$ 变量的函数 C 的 WKB 解簇. 对于小的 ϕ 值, 势 $U(\phi)$ 变为 $\frac{1}{2}m^2\phi^2$, 作用量有好的行为, 且处处为正 (除了 $a=0$ 处, ϕ 有限, 在此处

为零). 对于大的 a 值, 作用量随着 a^2 加上 a^3 乘以一非负单调递增函数 $E(\phi)$ 趋于无限大. 因此, 如果 C 有好行为, 并且保持有界或者在无限远处不像 e^I 一样快地发散, 则 $\Psi = C\mathrm{e}^{-I}$ 将有好行为, 到处有界, 且在无限远为衰减的.

在反复试验之后, 霍金发现一种方案, 对于 $U = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ 有效. 这一想法由

$$\Psi_{n0} = \phi^n \mathrm{e}^{-L_n(a,\phi)} \tag{4.3.31}$$

开始, 对每一非负整数 n, 其中 L_n 是 a 和 ϕ 的正的解析函数, 使得 Ψ_{n0} 尽可能满足 W-D 方程 (4.3.1). 但这一形式不能严格地满足方程 (4.3.1), 因此 $-\Psi''_{n0}$ 中含 $-n(n-1)\phi^{-2}\Psi_{n0}$, 如果 $\phi=0$ 处 L_n 是解析的, 这一项不能消除 (如此处不包含 $\ln\phi$ 项). 但是我们可以解方程

$$W\Psi_{n0} \equiv \ddot{\Psi}_{n0} - \Psi''_{n0} - a^4\Psi_{n0} + m^2a^6\phi^2\Psi_{n0} = -n(n-1)\phi^{-2}\Psi_{n0}, \tag{4.3.32}$$

它等效于

$$\dot{L}_n^2 - L_n'^2 - \ddot{L}_n + L_n'' + 2n\phi^{-1}L_n' - a^4 + m^2a^6\phi^2 = 0. \tag{4.3.33}$$

此方程有一个渐近级数解, 形式为

$$\begin{aligned}
L_n =& \sum_{l=0}^{\infty} a^{3-l}L_{nl}(\dot{\phi}) + c_n\ln a \\
&= a^3E(\phi) + \frac{1}{2}a^2F(\phi) + a\left[G(\phi) - \left(n+\frac{1}{2}\right)mF^{1/2}(\phi)\right] \\
&+ \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2}n - \frac{1}{8}(2n+1)^2m^2\right]\ln a + \sum_{l=3}^{\infty} a^{3-l}L_{nl}(\phi) \\
=& \frac{1}{2}ma^3\phi^2\left[1 + \frac{3^2}{2^4}\phi^2 + \frac{3^3}{2^7}\phi^4 + \frac{3^5}{2^{13}}\phi^6 + 0\phi^8 + \frac{3^7}{2^{20}}\phi^{10} - \frac{3^9}{2^{23}7}\phi^{12} + o(\phi^{14})\right] \\
&+ \frac{1}{2}a^2\left[1 + \frac{3}{2}\phi^2 + \frac{3^3 5}{2^6}\phi^4 + \frac{3^2}{2^8}\phi^6 - \frac{3^3 13}{2^{16}}\phi^8 + \frac{3^4 41}{2^{15}5}\phi^{10}\right. \\
&\left. - \frac{3^4 2603}{2^{21}5}\phi^{12} - \frac{3^5 904417}{2^{24}7^2}\phi^{14} + o(\phi^{16})\right] + \frac{3}{2^4}m^{-1}a\phi^2\left[1 - \frac{3^2}{2^4}\phi^2 + \frac{41}{2^8}\phi^4 + \frac{345}{2^{15}}\phi^6\right. \\
&\left. - \frac{3698577}{2^{17}5^2}\phi^8 - \frac{20872989}{2^{21}5^2}\phi^{10} + o(\phi^{12})\right] - \left(n+\frac{1}{2}\right)ma\left[1 + \frac{3}{2^2}\phi^2 + \frac{3^2}{2^7}\phi^4 - \frac{3^2}{2^8}\phi^6\right. \\
&\left. + \frac{3^3 103}{2^{17}}\phi^8 + \frac{3^4 221}{2^{15}5}\phi^{10} - \frac{3^5 72463}{2^{24}5}\phi^{12} + o(\phi^{14})\right] \\
&- (\ln a)\left[\frac{3}{2}n - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(2n+1)^2m^2\right] - \left[\frac{3}{2^4}m^{-2} + \frac{3^2}{2^4}n + \frac{3}{2^5} + \frac{3}{2^5}(2n+1)^2m^2\right]\phi^2 \\
&- \left[\frac{3^2}{2^8}m^{-2} - \frac{3^4}{2^8}n - \frac{3^3 5}{2^9} - \frac{3^3}{2^{10}}(2n+1)^2m^2\right]\phi^4 - \left[\frac{43}{2^9}m^{-2} + \frac{3^3 37}{2^{12}}n + \frac{3^5 7}{2^{13}}\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{3^3}{2^{12}}(2n+1)^2m^2\Bigg]\phi^6+\left[\frac{3^3 26267}{2^{22}}m^{-2}+\frac{3^6 149}{2^{20}}n+\frac{3^7 79}{2^{21}}-\frac{3^6}{2^{20}}(2n+1)^2m^2\right]\phi^8$$
$$-\left[\frac{3^4 1377457}{2^{19}5^2}m^{-2}-\frac{3^4 111481}{2^{21}5^2}n-\frac{3^4 119581}{2^{22}5^2}-\frac{3^9}{2^{21}5}(2n+1)^2m^2\right]\phi^{10}$$
$$+o(\phi^{12})+o(a^{-1}). \tag{4.3.34}$$

于是对于每一非零整数 n, 可以得到一个好行为的指数衰减的波函数的渐近级数形式

$$\Psi_n=\mathrm{e}^{-L_n}\sum_{k=0}^{\infty}a^{-k}f_{nk}(\phi), \tag{4.3.35}$$

式中 $f_{n0}=\phi^n$, 有更高 k 值的 f_{nk} 是 ϕ 的解析函数, 以使按照展开参数 a^{-1}, Ψ_n 满足 W-D 方程 (4.3.1). 由不定积分, 我们可以得到各个 f_{nk}:

$$f_{nk}=\phi^nF^{-k/2}\int\frac{\mathrm{d}\phi}{2E'}\phi^{-n}F^{k/2}\sum_{l=1}^{k}\{\delta_{l3}f''_{n(k-l)}-2L'_{nl}f'_{n(k-l)}$$
$$+[2n\phi^{-1}L'_{nl}+2(k-l)(l-3)L_{nl}-(k-l)(2c_n+k-l)\delta_{13}]f_{n(k-l)}\}. \tag{4.3.36}$$

在每一积分中, 选择 f_{nk} 的积分常数, 使得在接下来的积分 $f_{n(k-1)}$ 中不存在含有非解析因子 $\ln\phi$ 的项.

例如, 计算式 (4.3.36), 避免 $\ln\phi$ 项, 得到

$$f_{n0}=\phi^n, \tag{4.3.37}$$

$$f_{n1}=0, \tag{4.3.38}$$

$$f_{n2}=\frac{9}{32}n(n-1)\phi^nF^{-1}=\frac{9}{32}n(n-1)\phi^n\left(1-\frac{3}{2}\phi^2\right)+o(\phi^{n+4}), \tag{4.3.39}$$

$$f_{n3}=-\frac{n(n-1)}{4m}\phi^{n-2}\left\{1-\left[1+\frac{2n+1}{4}m^2\right]\phi^2\right\}+o(\phi^{n+2}), \tag{4.3.40}$$

$$f_{n4}=-\frac{3n(n-1)}{2048}[24m^{-2}+277n^2-233n+60$$
$$-12(2n+1)^2m^2]\phi^n+o(\phi^{n+2}), \tag{4.3.41}$$

$$f_{n5}=\frac{3n(n-1)}{128}[4m^{-3}+(n-1)(13n+8)m^{-1}]\phi^{n-2}+o(\phi^n), \tag{4.3.42}$$

$$f_{n6}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{32m^2}\phi^{n-4}+o(\phi^{n-2}), \tag{4.3.43}$$

$$f_{n(3j)}=\frac{n!}{j!(n-2j)!}\left[\frac{-1}{4m}\right]^j\phi^{n-2j}+o\left[\frac{n!}{(n-2j+2)!}\phi^{n-2j+2}\right], \tag{4.3.44}$$

$$f_{m(3j+1)}=o\left[\frac{n!}{(n-2j)!}\phi^{n-2j}\right], \tag{4.3.45}$$

$$f_{n(3j+2)}=o\left[\frac{n!}{(n-2j)!}\phi^{n-2j}\right]. \tag{4.3.46}$$

由式 (4.3.36) 可看出, 当被积函数中的勒让德展开式没有 ϕ^{-1} 项时 (它将对非解析项 $\ln\phi$ 求积分), 每一个 $f_{nk}(\phi)$ 具有仅含 ϕ 的非负指数的洛伦兹展开式, 所以它是 $\phi=0$ 附近 ϕ 的解析函数, 只要函数 $L_{nl}(\phi)$ 是解析的, 使得 ϕ 中的幂级数收敛. 显然, Ψ_n 关于 ϕ 是对称还是反对称取决于 n 为偶数还是奇数,

$$\Psi_n=(a,-\phi)=(-1)^n\Psi_n(a,\phi).$$

由式 (4.3.44)~(4.3.46) 可见, 对于大的 a 值和小的 ϕ 值 [此时级数 (4.3.35) 可以有一个好的近似, 用来求值], 我们得到

$$\Psi_n=\phi^n\mathrm{e}^{-Ln}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{k!(n-2k)!}\left[\frac{-1}{4ma^3\phi^2}\right]^k\times\left[1+o\left[\frac{1}{a}\right]+o(\phi^2)\right], \tag{4.3.47}$$

式中 $[n/2]$ 表示小于等于 $(n/2)$ 的最大整数. 对于 $4ma^3\phi^2\gg n(n-1), k=0$ 的项起决定性作用, 于是得到

$$\Psi_n\approx\phi^n\mathrm{e}^{-L_n},\quad \frac{1}{4}n(n-1)m^{-1}a^{-3}\ll\phi^2\ll(n+1)^{-1}, \tag{4.3.48}$$

但是对于 $4ma^3\phi^2\ll(n+1)^{-1}, k=[n/2]$ 的项起决定性作用. 如果 n 为偶数, $n=2l$, 则有

$$\begin{aligned}&\Psi_{2l}\approx(2l-1)!!\mathrm{e}^{-L_{2l}}(-2ma^3)^{-l},\\&\phi^2\ll\frac{1}{4}(2l+1)^{-1}m^{-1}a^{-3}\ll(2l+1)^{-1};\end{aligned} \tag{4.3.49}$$

如果 n 为奇数, $n=2l+1$, 则有

$$\begin{aligned}&\Psi_{2l+1}\approx(2l+1)!!\mathrm{e}^{-L_{2l+1}}(-2ma^3)^{-l}\phi,\\&\phi^2\ll\frac{1}{8}(l+1)^{-1}m^{-1}a^{-3}\ll\frac{1}{2}(l+1)^{-1}.\end{aligned} \tag{4.3.50}$$

对于 $(n+1)^{-1}\lesssim 4ma^3\phi^2\lesssim n(n-1)$, 中间的一些项和式 (4.3.47) 将更复杂.

把很大的 n 对应的 Ψ_n 叠加起来, 尝试构造洛伦兹 WKB 波包是很有趣的. 也许我们可以克服 Kiefer 遇到的困难 (他试图按照 a 中转变点附近的经典轨迹来构造波包). 但是可能要求从 $a\gg m^{-1}+1+nm$ 区域向内延拓 L_n, 这里渐近表达式 (4.3.47) 适用, 因为此式给出随 a 增大而单调减小的 $\Psi_{2l}(a,\phi=0)$.

第 5 章　没有假真空的开暴胀

近几年的微波背景辐射观测结果倾向于支持低密度的开暴胀模型.

本章讨论 Hawking 和 Turok(1998) 给出的没有假真空的开暴胀模型.

哈特–霍金认为, 他们的"无边界"宇宙可以给出宇宙开暴胀, 对于暴胀势没有任何特殊要求. 在最简单的暴胀模型中, 欧氏路径积分的半经典近似和人择条件给出密度参数 $\Omega_0 \approx 0.01$. 在具有多个场和额外维度的模型中, 比这个数值要大一些.

5.1　关于宇宙的暴胀

暴胀宇宙学的图像为人们提供了一个关于现在宇宙的线度、 平直性、 均匀性以及涨落起源机制的很有说服力的解释.　但是在一个给定的暴胀宇宙模型中, 暴胀是否实际发生, 很强地依赖于暴胀的初始条件. 关于这一初始条件的假定, 常会遇到困难. 哈特–霍金认为他们提出的"无边界"的初始条件则可避免这个困难. 下面我们讨论, 这一"无边界"条件加上最弱的人择原理, 对于一般标量场, 预言了开暴胀宇宙. 具有最弱人择原理的最简单暴胀势要求 $\Omega_0 \sim 0.01$. 对于包含附加场的一般情况则要求稍大一些的 Ω 值. 通常, 各模型均要求暴胀势有一个亚稳的极小值 ——"假真空", 有一个慢滚动相, 使之能够创生一个具有量子涨落的 de Sitter 空间. 这个场会通过量子隧道效应, 产生众多泡泡. 在泡里, 滚动会慢下来, 直到真最小. Coleman 和 De luccia(1980) 指出, 这样一个泡的内部实际上是一个无限开放的宇宙. 调整慢滚动的时间, 人们可以建立一个宇宙模型, 使现在空间曲率与哈勃半径相一致.

所有的暴胀模型都必须保证量子涨落足够小, 这就要求势很平坦. 但在开暴胀中, 这必须要求势有一个假真空, 而且有一个 Coleman-De luccia 形式的泡解. 如果假真空中的标量场质量太大, 则这个泡只"内部适合"de Sitter 哈勃半径. 总之, 这些要求表明, 开暴胀需要的标量势只是对单场模型设计的. 二场模型已由 Linde(1995) 提出, 该模型仍然要求一个假真空.

在哈特–霍金理论框架内, 不再要求"假真空"暴胀过程, 量子涨落是用延拓场和欧氏度规扰动来计算的. 这一理论提出宇宙是由初始空间的微小涨落开始的.

5.2　瞬　　子

设耦合标量场具有势 $V(\phi)$, 考虑爱因斯坦引力路径积分. 设想势有个真最小

$V = 0$. 我们来寻找经典运动方程的解并延拓它们, 用确定涨落大小的方法来逼近路径积分. 首先从欧氏瞬子开始. 如果 $V(\phi)$ 在一些非零值处有一个固定点, 则存在 $O(5)$ 不变解, 此时 ϕ 为常数, 欧氏流形为一四维球. 我们对一般的只具有 $O(4)$ 不变性的解感兴趣. 这时度规形式为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\sigma^2 + b^2(\sigma)\mathrm{d}\Omega_3^2 = \mathrm{d}\sigma^2 + b^2(\sigma)(\mathrm{d}\psi^2 + \sin^2\psi \mathrm{d}\Omega_2^2), \tag{5.2.1}$$

式中 $b(\sigma)$ 是 S^4 的"纬线" S^3 的半径. 对于 $O(5)$ 不变解,

$$b(\sigma) = H^{-1}\sin(H\sigma), \quad H^2 = 8\pi GV/3,$$

但在一般情况下 $b(\sigma)$ 不一定是正弦函数.

把只具有 $O(4)$ 不变性的解自然地延拓到一个开宇宙 (图 5-1). 首先从欧氏空间延拓到洛伦兹空间, 为了获得实的洛伦兹度规, 必须在度规是固定的三维表面上延拓. 设 Ψ 在欧氏区域, 然后沿一个假想方向在洛伦兹区域从 0 到 $\frac{\pi}{2}$,

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\tau,$$

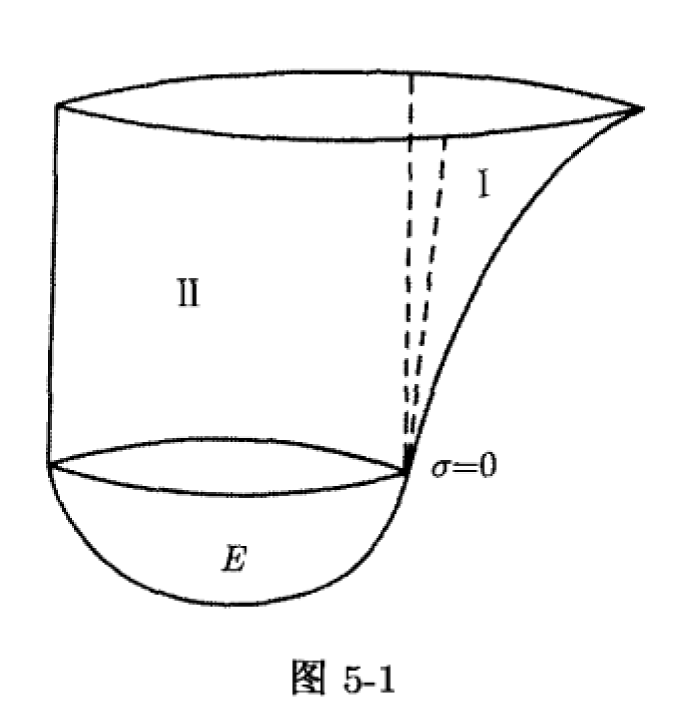


图 5-1

我们得到

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\sigma^2 + b^2(\sigma)(-\mathrm{d}\tau^2 + \cosh^2\tau \mathrm{d}\Omega_2^2). \tag{5.2.2}$$

这是一个空间不均匀的类 de Sitter 度规, 描述解的区域 II, 即暴胀泡的外部. 半径 $b(\sigma)$ 在 σ 的两个值处为零. 第一个值 (我们设 $\sigma = 0$) 附近, $b(\sigma)$ 随着 σ 线性地变为零. 这个度规有一个唯一的延拓穿过零表面 $\sigma = 0$.

设

$$\sigma = \mathrm{i}t, \quad \tau = \frac{1}{2}\mathrm{i}\pi + \chi,$$

我们有

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)(\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi \mathrm{d}\Omega_2^2), \tag{5.2.3}$$

式中 $a(t) = -\mathrm{i}b(\mathrm{i}t)$. 这是描述区域 I 的膨胀开放宇宙.

可在假想方向上延拓坐标 σ, 使之超过 $\sigma_{\max}$. 这样, 在欧氏区域 σ 从 0 到 $\sigma_{\max}$, 且在洛伦兹区域 $\sigma = \sigma_{\max} + \mathrm{i}T$. 后者是均匀的类 de Sitter 空间, 但时间依赖于空间截面

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}T^2 + b^2(T)(\mathrm{d}\psi^2 + \sin^2\psi \mathrm{d}\Omega_2^2). \tag{5.2.4}$$

稍后我们再来讨论这个解, 它描述一个闭合的暴胀宇宙.

现在, 我们更详细地讨论欧氏瞬子的特性. 场 ϕ 和半径 b 满足场方程

$$\phi'' + 3\frac{b'}{b}\phi' = V_{,\phi}, \quad b'' = -\frac{8\pi G}{3}b(\phi'^2 + V), \tag{5.2.5}$$

式中的撇表示对 σ 求导数. 根据第一个方程, ϕ 沿着势 $-V$ 向下滚动. 设点 $\sigma = 0$ 是非奇异的, 这个流形在球坐标中局部地看起来像 R^4. 这要求在 σ 小的时候 $(b\sigma) \sim \sigma$. 当 $\sigma = 0$ 时场取值 ϕ_0. 我们假定在 $\phi = \phi_0$ 处势有一个非零倾斜, $V_{,\phi} \neq 0$. $O(4)$ 不变性和解析性要求 $\phi'(0) = 0$. 跟随这个解, 沿 σ 向前 $b(\sigma)$ 减速, 且速度 $b'(\sigma)$ 变号. 此后, 在点 $\sigma_f, b(\sigma)$ 降为零. 在另一边, 场 ϕ 被强制项沿着势向上驱动, 开始衰减; 在 $b'(\sigma)$ 变号之后反衰减. 这个反衰减在接近 σ_f 时发散, $\phi'(\sigma)$ 趋向无限大. 当接近 σ_f 时, 由第一个场方程得到 $\phi' \propto b^{-3}$, 由第二个方程得到 $b \propto (\sigma_f - \sigma)^{1/3}$. 这样, 当我们接近奇点时, $\phi' \propto (\sigma_f - \sigma)^{-1}$, 按对数规律发散. 若存在另外的极点, 驱动项 $V_{,\phi}$ 就可能变号, 并且如果它足够大, 能抵消反衰减项, 便可停止 ϕ 的运动. Coleman-De luccia 瞬子仅在上述情况下才能得到. 选择 ϕ_0 的值, 使 ϕ' 恰在 σ_f 变为零, 就出现上述情况. 这时解的两端是非奇异的, 且能够延拓至第三洛伦兹区域. 在过去的暴胀宇宙模型中多采用 C–D 瞬子, 因为它是唯一非奇异的解, 类似于闵可夫斯基的隧道解. 但是 de Sitter 空间和闵可夫斯基空间不同, 哪一个瞬子解是容许的, 这问题需要分别研究. 决定一个瞬子解是不是物理上容许的, 主要准则是计算欧氏作用量 I. 系统的波函数在主级近似下正比于 e^{-I}, 所以不构成无限大的作用量. 欧氏作用量由下式给出:

$$I = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V\right]. \tag{5.2.6}$$

在四维情况下, 爱因斯坦方程的迹可写为

$$R = 8\pi G[(\partial\phi)^2 + 4V(\phi)],$$

所以作用量为

$$I = -\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}V = -\pi^2\int \mathrm{d}\sigma b^3(\sigma)V(\phi), \tag{5.2.7}$$

式中积分沿 S^3 的一半, 注意作用量是负的. 有趣的是, 即使对于奇异瞬子 (在奇点 V 按对数规律发散), $b^3(\sigma)$ 也随 $(\sigma_f - \sigma)$ 线性地变为零, 所以欧氏作用量仍然是收敛的. 仔细考察不难发现, 作用量的标量场部分对数地发散 (因为 ϕ' 线性地发散), 但是这一发散恰好被引力作用量中的一个相反的发散抵消了. 现在的计算和闵可夫斯基空间中隧道效应的计算存在两个根本的区别: 第一, 瞬子在空间上是有限的, 这就去掉了与场相联系的发散; 第二, 引力作用量不是正的, 这样可以消掉标量场

作用量中的发散. 这两点区别有个值得注意的结果, 类似于闵可夫斯基空间的情况, 能够找到一个容许瞬子解的单参数族.

现在我们来考察在 σ_f 处的类时奇点. 存在类时奇点在半经典近似下不一定是致命的问题, 这跟氢原子的情况类似, 粒子轨道可避免奇点. 另外, 量子涨落对于消除奇点可能已经足够了. 哈特–霍金认为, 场和度规涨落可由欧氏区域的延拓来定义, 奇性仅在此区域的边沿上的一点出现. 场涨落的模函数很容易用改变坐标 (从 σ 到共形坐标 $X = \int_{\sigma}^{\sigma_f} \mathrm{d}\sigma/b(\sigma)$ 的方法来处理. 因为在 σ_f 处积分收敛, 所以 X 不能小于零. 重新调整 $\phi = \chi/b$ 以后, 便可满足具有势

$$U = b^{-1}\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}x^2} - V_{,\phi\phi}b^2 \sim -\frac{1}{4}X^{-2}(\text{当 } X \sim 0)$$

的类薛定谔方程. 区域 II 的因果结构在同样的共形坐标中很容易看出来. 靠近奇点, 区域 II 的空间度规与管 $R^+ \times S^2$ 是共形的. 这个奇点是与管端相对应的世界线.

正如前面提到的, 还能找到另外的瞬子, 描述一个由 $\sigma_{\max}$ 沿虚方向延拓的闭合暴胀宇宙. 这个瞬子的作用量是式 (5.2.7) 的两倍, 但积分区间只取 $[0, \sigma_{\max}]$. 函数 $b(\sigma)$ 和 $\phi(\sigma)$ 也稍为不同 —— $\phi'(0)$ 必须是零, 所以速度 ϕ' 在对应面上是奇异的, 这使得在 $\sigma = 0$ 点关于 ϕ 的泰勒展开只含奇数项, 于是 $\phi(T)$ 在洛伦兹区域是复的, 而我们希望 ϕ 的解是实的. 虽然不可能严格操作, 但总可以给 ϕ_0 加上一个小的虚部. 在这种方法中, ϕ 的虚部在暴胀期间衰减. 此后便可认为场和度规是实的了.

人们希望势是十分平坦的, 以容许更大的暴胀 e 重数. H-T 对于各种标量势进行了数字计算, 在这种框架中, e 重数的数目很大, 结果很简单 —— 对于 σ 的大部分范围, 有很好的近似 $\phi(\sigma) \approx \phi_0$ 和 $b(\sigma) \approx H^{-1}\sin H\sigma$, 式中 $H^2 = 8\pi G V(\phi_0)/3$. 在开和闭的两种情况下, 欧氏作用量均为

$$I \approx -\frac{12\pi^2 M_{\mathrm{p}}^4}{V(\phi_0)}, \tag{5.2.8}$$

式中普朗克质量 $M_{\mathrm{p}} = (8\pi G)^{-1/2}$.

5.3 Ω_0 的 值

密度参数 Ω_0 的值由暴胀 e 重数确定. 在对应的面上, Ω 的值在开暴胀的情况下是零, 在闭合的情况下是 ∞. 在暴胀期间, 由于 $\Omega^{-1} - 1 \propto a^{-2}$, 所以 Ω 趋近 1. 再加热之后, 在辐射时期 $\Omega^{-1} - 1 \propto a^2$, 在物质时期 $\Omega^{-1} - 1 \propto a$, 所以 Ω 都偏离 1.

综上所述, 且假设瞬间加热, 我们得到

$$\Omega_0 \approx \frac{1}{1 \pm \mathscr{A} \exp[-2N(\phi_0)]},$$
$$\mathscr{A} \approx 4\left(\frac{T_{\text{reheat}}}{T_{\text{eq}}}\right)\frac{T_{\text{eq}}}{T_0}, \tag{5.3.1}$$

式中正和负分别对应于开放和闭合. 现在的温度是 T_0, 在物质 - 辐射相等时为 T_{eq}. 我们假定 $T_{\text{eq}} > T_0$. 常数 $\mathscr{A}$ 依赖于再加热温度. 为了分别再加热到弱电和大统一标度, $\mathscr{A}$ 应在 10^{25} 和 10^{50} 之间.

在慢滚动期间, 暴胀 e 重数由

$$N(\phi_0) \approx \int_{\phi_e}^{\phi_0} \mathrm{d}\phi \frac{V(\phi)}{V_{,\phi}(\phi) M_{\text{p}}^2} \tag{5.3.2}$$

近似地给出, 式中积分下限 ϕ_e 是刚离开慢滚动相时的 ϕ 值. 对于二次势, $N \sim (\phi_0/2M_{\text{p}})^2$. 对应于很小的 $\phi_{0,e}$ 重数也很小. 在开的情况下 Ω_0 很小. 对于充分大的 N, Ω_0 接近于 1. 但是在 $\frac{1}{2}\lg\mathscr{A} \pm 1$(即 30±1 或者 60±1) 范围内的 N, 为了再加热到弱电和大统一标度, 我们有 $0.1 < \Omega_0 < 0.9$. 这些都是 H- T 的数值计算结果.

式 (5.3.1) 包含 n 个未知参量, 我们要选择其中一个保持固定. 爱因斯坦方程容许三个独立常数, 如 H_0, Ω_0 和 T_0. 在物质–辐射相等时温度 T_{eq} 是不独立的, 因为它由现在的物质密度确定 (由 Ω_0 和 H_0 确定), 而现在的辐射密度由 T_0 确定. 原则上 T_{eq} 跟退耦时的温度一样由拉格朗日确定, 但是不知道这一恰当的拉格朗日的具体形式. 于是只好由式 (5.3.1) 确定 Ω_0, 代入

$$T_{\text{eq}} = 2.4 \times 10^4 \Omega_0 h^2 T_0,$$

得到

$$\Omega_0 \approx 1 \mp \mathscr{A}' \exp[-2N(\phi_0)],$$
$$\mathscr{A}' \approx 4\left(\frac{T_{\text{reheat}}^2}{2.4 \times 10^4 h^2 T_0^2}\right). \tag{5.3.3}$$

[对于开的情况, 如果 $\Omega_0 < (2.4 \times 10^4 h^2)^{-1}$ 和 $T_0 > T_{\text{eq}}$, 应该将 (5.3.1) 中的 T_{eq} 代之以 T_0.] 由现在观测到的参数 T_0, H_0 和暴胀参数 (即初始场 ϕ_0 和再加热温度 T_{reh}), 代入式 (5.3.3), 可以给出 Ω_0.

我们把前面的讨论小结一下. 对任意的暴胀势, H-T 构造了描述开的和闭的暴胀宇宙的背景解簇. 这些解解决了标准暴胀模型的困难, 由指定哈勃体积中的初始数据便可获得均匀宇宙; 还定义了用欧氏区域解析延拓获得的涨落谱. 下面我们讨论这些解预言的扰动和 Ω_0 的几率分布.

5.4 Ω_0 的估计

宇宙波函数在半经典近似下正比于 $\exp(-2I)$, 由 Ω_0 值给出的宇宙原初扰动几率和这个波函数的平方成正比. 按照我们选择的理论, 再加热温度 $T_{\rm reh}$ 由拉格朗日确定, 而初始场 ϕ_0 仍然是一个自由参数. 考虑一个从零开始增大的暴胀势. 对于任意大的 ϕ_0, 都存在闭的和开的解. 所以至少对于适当平坦的势, 原则上所有可能的 Ω_0 都是容许的. 当然也存在 $\mathscr{A}{\rm e}^{-2N} > 1$ 的闭合解, 其宇宙在加热到现在的温度 T_0 之前又重新坍缩.

欧氏作用量 (5.2.8) 是相当大的, 在几率分布 $P(\Omega_0)$ 中很可能起决定性作用. 人们偏爱的那些宇宙应该具有微小的初始场 ϕ_0—— 在开的情况下, 它们在 T_0 应该是空的, 而在闭的情况下比 T_0 早很多时就应重新坍缩. 这些宇宙与我们所在的宇宙相当不同. 似乎我们有理由抛弃这个理论. 但是 H-T 认为, 其他的暴胀模型在这个问题上都失败得更惨 —— 它们根本没有关于这个问题的数学上的显式. 比如, 根据混沌暴胀模型, 宇宙按指数规律膨胀的部分仍然在暴胀, 我们生活的宇宙当然不是这样的.

H-T 提出, 可以把人择条件自然地放入贝叶斯 (Bayesian) 框架, 然后再计算导致星系形成的 Ω_0 的概率. 这样, 我们有

$$P(\Omega_0|{\rm gal}) \propto P({\rm gal}|\Omega_0)P(\Omega_0) \propto \exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_{\rm gal}^2} - 2I(\phi_0)\right]. \tag{5.4.1}$$

式中第一个因子表示对于给定的 Ω_0, 我们附近星系质量区域经历过引力坍缩的概率是在星系质量尺度上线性密度场的均方差; $\delta_c \approx 1$, 是发生引力坍缩要求的线性扰动幅的极限. 在式 (5.4.1) 中, 只包含主要的指数项, 并假定最简单的暴胀模型预言的扰动是高斯扰动.

现在密度场中的均方根差等于哈勃半径处的扰动幅 $\Delta(\phi_{\rm gal})$ 乘以生长因子 $G(\Omega_0)$. 这个因子强烈地依赖于 Ω_0. 对于 $h = 0.65$, 我们有 $G(\Omega_0) \sim 2.4\times10^4h^2\Omega_0^2 \sim 10^4\Omega_0^2$. 在慢滚动近似中, 视界处的线性扰动幅为

$$\Delta^2(\phi) \equiv \frac{V^3}{M_{\rm p}^6V_{,\phi}^2}. \tag{5.4.2}$$

比较一下开暴胀和闭暴胀的延拓是很有趣的. 如果固定 ϕ_0, 欧氏作用量和先前的概率是很相似的. 由 (5.3.3) 可见, 对于固定的 H_0 和 T_0, 一个具有密度参数 Ω_0 的开宇宙和一个具有密度参数 $2-\Omega_0$ 的闭宇宙一样, 很可能都是先验的. 当然, 这两个宇宙很不相同. 第一个区别是, 闭宇宙相当年轻, 对于 $h = 0.65$, 开宇宙年龄是 150 亿年, 而闭宇宙只有 80 亿年; 第二个 (也是最重要的) 区别是, 开宇宙在空间

上是无限的, 而闭宇宙是有限的. 按照 Vilenkin 和温伯格的观点, 观测到的星系总数是决定因素, 人们将推断, 开暴胀是最可能的, 因为它可以给出无限大的星系数. 霍金则采用贝叶斯统计的方法, 他认为考虑在固定的 H_0 和 T_0 形成一个星系的概率比考虑星系总数要好.

在开的情况下, 星系形成的概率在 Ω_0 之后有一个峰. 在很低的 Ω_0, 生长因子是相当小的. 由式 (5.3.3) 有

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_0}{\mathrm{d}\phi_0} = \frac{2V}{M_{\mathrm{p}}^2 V_{,\phi}}(1-\Omega_0), \tag{5.4.3}$$

由此可得 Ω_0 的最可能值

$$\Omega_0 \approx 0.01\left(\frac{\Delta^2(\phi_{\mathrm{gal}})}{\Delta^2(\phi_0)}\right)^{1/5}. \tag{5.4.4}$$

对于最简单的暴胀模型, 后一因子接近 1, 因此 $\Omega_0 \approx 0.01$. 这一结果很有趣, 它接近原始核合成要求的重子密度, 但与现在的观测比较则太低了.

根据以上分析, 霍金认为, 最可能的开宇宙应是这样的：其中物质 - 辐射相等发生在红移 100, 相当于在退耦之后. 这时视界尺度 $\sim 2500h^{-1}M_{\mathrm{pc}}$, 并且对于纯重子宇宙, 物质扰动能谱从这个尺度 (降) 到 Silk 阻尼尺度是不变的, 数量级比较小.

在闭合的情况下, 以前的几率分布支持温度达到 T_0 之前就重新坍缩的那些宇宙. 如果固定 T_0 和 H_0(即要求宇宙是膨胀的), 就要靠人择条件来产生 Ω_0 几率的峰. 这个人择条件是, 宇宙应该足够的老, 容许生命的发展, 比如 5 万亿年. 对于哈勃常数 $h=0.65$, 上述条件要求 $\Omega_0<10$, 后来几率的峰会在 $\Omega_0=10$ 处. 如果我们升高这个年龄到 10 万亿年, 则最可能的 Ω_0 值将恰好大于 1. 在第一种情况下, 闭宇宙比开宇宙存在的可能性更大, 在第二种情况下则相反.

总之, 霍金和他的学生们提出了一个关于暴胀宇宙的新框架, 在这一框架中, 对于一般暴胀势, 允许密度参量 $\Omega_0 \neq 1$, 仍保持了曾经预言密度扰动的一个成功的暴胀模型. 这个框架的一般预言是一个很开的或者很闭的宇宙, 若再含其他场和额外维度, 则可能导致更可接受的接近 1 的 Ω_0 值.

第 6 章　Vilenkin 的量子宇宙学

确定宇宙的量子态有两种方法：第一种是由霍金和他的合作者们建立起来的，他们用欧氏几何的路径积分来定义宇宙波函数；第二种是由 Vilenkin 等建立起来的，这一方法认为，宇宙在 de Sitter 空间自发成核，然后沿暴胀线演化. 这个宇宙成核的数学描述与穿过一个势垒的量子隧道的计算十分相似. 这两个学派都说他们各自的波函数预言了暴胀，但这两个波函数无法直接进行比较，因为它们是对于不同的宇宙模型来计算的.

本章重点介绍 Vilenkin 的隧道效应方法，并把他的宇宙学预言与霍金等的方法对应的预言进行一些比较.

6.1　基本体系

我们首先考虑由拉格朗日

$$\mathscr{L} = l_{\rm p}^{-2}R + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi) \tag{6.1.1}$$

定义的模型，式中 $l_{\rm p}=(16\pi G)^{1/2}$ 为普朗克长度，G 是牛顿常数，$\hbar = c = 1$，R 是标曲率. 物质场由一个标量场描述. 这个模型的波函数定义在所有三维度规 $h_{ij}(x)$ 的空间和三维标量场 $\phi(x)$：

$$\psi(h_{ij}(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})).$$

假设宇宙是闭合的，这个波函数满足方程

$$H^i(\boldsymbol{x})\psi = 0, \tag{6.1.2}$$

$$H^0(\boldsymbol{x})\psi = 0. \tag{6.1.3}$$

式中

$$H^i = 2\mathrm{i}D_j\frac{\delta}{\delta h_{ij}} - \mathrm{i}h^{ij}\phi_{,j}\frac{\delta}{\delta\phi}, \tag{6.1.4}$$

$$H^0 = -l_{\rm p}^2\nabla^2 + h^{1/2}\left[-l_{\rm p}^{2(3)}R + \frac{1}{2}h^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + V(\phi)\right] \equiv -l_{\rm p}^2(\nabla^2 - U), \tag{6.1.5}$$

$$\nabla^2 = G_{ijkl}\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\frac{\delta}{\delta h_{kl}} + r_{ij}\frac{\delta}{\delta h_{ij}} + \frac{1}{2}l_{\rm p}^{-2}h^{-1/2}\frac{\delta^2}{\delta\phi^2}, \tag{6.1.6}$$

$h = \det(h_{ij}), D_j$ 是关于度规 $h_{ij}(\boldsymbol{x})$ 的协变微分；G_{ijkl} 为

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}h^{-1/2}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}).$$

式 (6.1.6) 第二项的系数 r_{ij} 依赖于第一项因子次序的选择. 正确选择目前还不知道, 也可能不存在, 因为以爱因斯坦引力理论为基础的自洽的量子引力理论目前还没有完成. 但是, 利用式 (6.1.2)~(6.1.6) 还是可以计算出半经典情况下的波函数 Ψ 的. 因子次序不确定性以及高阶修正项和重整化问题仅在普朗克曲率 Rl_p^{-2} 时才很重要. 我们将看到, 在一些宇宙模型中, 对于宇宙整个历史, 均可以做半经典的处理.

式 (6.1.2) 和 (6.1.4) 意味着 Ψ 与三维空间的坐标选择无关. 这个事实通常表示为 Ψ 定义在所有三维几何空间和物质场构形 (超空间) 中, 在它们中, $\{h_{ij}(x), \phi(x)\}$ (只用坐标变换来区分) 的所有组合都是等同的.

采用式 (6.1.5) 和 (6.1.6) 中的记法, 我们可以把 W-D 方程 (6.1.3) 写为与克莱因–戈尔登方程类似的形式

$$(\nabla^2 - U)\psi = 0. \tag{6.1.7}$$

像克莱因–戈尔登的情况一样, 我们可以构造一个守恒流

$$J = \frac{\mathrm{i}}{2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \tag{6.1.8}$$

$$\nabla \cdot J = 0.$$

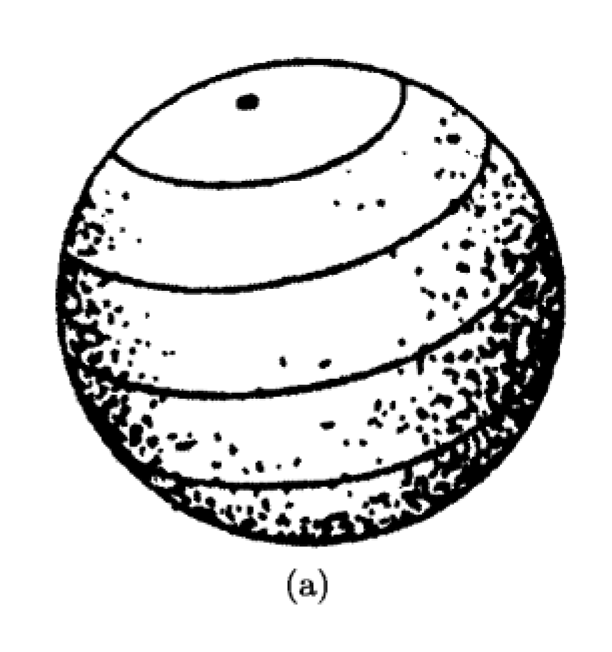
式中的标积所用的度规是式 (6.1.6) 所定义的. 这个流和超空间的几率流是一致的, 但是和克莱因–戈尔登情况一样, 也将遇到负几率的问题.

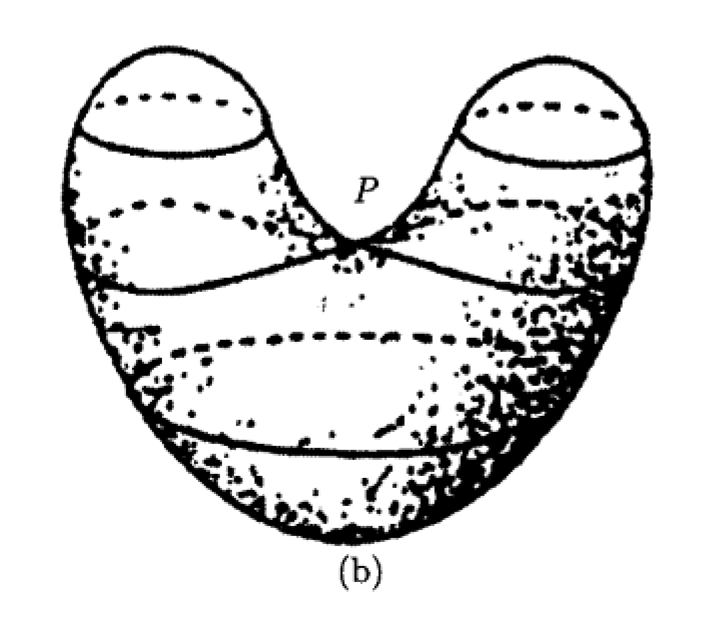
6.2 边界条件

在隧道效应方案中, 宇宙的形成是非奇异的事件. 半经典地, 势垒下的传播对应于虚时间里的演化, 因此, 量子隧道由一个欧氏场方程的规则解 (一个瞬子) 描述. 这个解在成核点与洛伦兹解相符合. 即使宇宙以一种非奇异的方式开始, 在未来也会出现奇异性 (如黑洞或大挤压).

超空间的边界可以看作由奇异性构形组成, 这些构形有一些点或区域具有无限大的三维曲率或无限大的 ϕ 或者无限大的 $(\partial_i\phi)^2$ 和无限大三维体积的构形. 需要指出的是, 三维几何奇异不一定表示四维几何奇异. 例如, 像图 6-1 中给出的那样切割一个四维球, 得到一个没有半径的、在两极有无限大曲率的三维球, 虽然这个四维几何是完全规则的. 更一般地, 如果我们把三维度写为

$$\widetilde{h}_{ij} = \Omega^2\widetilde{h}_{ij}, \tag{6.2.1}$$


(a)



(b)

图 6-1

当 $\Omega \to 0$, 而 $\widetilde{h}_{ij}, \phi$ 非奇异, 这个构形也不一定是四维奇异的. 另一个例子如图 6-1 中 (b) 所示, 三维空间在 P 点有奇异性. 这个构形对有拓扑改变的隧道跃迁是很重要的. 把所有的由切割规则四维几何产生的可能奇异性进行分类是很有趣的. 由于篇幅有限, 这里不讨论, 我们只简单地假定这是可以做到的, 这样, 我们可以把超空间分成两部分. 第一部分包括三维几何, 这三维几何仅有切割规则四维几何产生的奇异性, 我们称为超空间的非奇异性边界. 第二部分包括边界的其余部分, 称为超空间的奇异性边界. 波函数 ψ 的隧道边界条件可以表述为

在超空间的奇异边界, ψ 仅包括出射模式.

这个边界条件与费曼传播子的因果边界条件形式上类似.

入射、出射模式的定义与正、负频率模式的定义类似, 方向指向起"时间"方向作用的边界. 这些模式在一般情况下能否精确定义还不是很清楚, 但在半经典表述中, 这样的定义是可能的. 半经典波函数可以写为

$$\psi = \sum_n C_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_n}, \tag{6.2.2}$$

式中 S_n 是迅速变化的波函数, 它满足超空间的哈密顿–雅可比方程

$$(\nabla S_n)^2 + U = 0. \tag{6.2.3}$$

式 (6.2.2) 第 n 项的流为

$$J_n = -|C_n|^2 \nabla S_n. \tag{6.2.4}$$

边界条件 (6.2.1) 要求矢量 $-\nabla S_n$ 在边界处由超空间向外. 每一个函数 S_n 都定义了一个超空间中的经典路径. 边界条件 (6.2.1) 还表明, 这些路径可以在超空间的奇异性边界处终结, 但不能从这里出发.

除了式 (6.2.1) 以外, 我们还加一个规则性条件

$$|\psi| < \infty. \tag{6.2.5}$$

哈特–霍金的理论认为, 对于一个确定的三维构形, 波函数由一个路径积分定义

$$\psi_{\rm H}=\int[\mathrm{d}g_{\mu v}][\mathrm{d}\phi]\exp[-I_E(g_{\mu v},\phi)]. \tag{6.2.6}$$

致密四维几何可以看作位于一点“无” (nothing) 和一有限三维几何之间. 这样, 式 (6.2.6) 给出的理论与“从无到有”的量子隧道效应相似. 这个波函数 $\psi_{\rm H}$ 与由式 (6.2.1) 定义的波函数 $\psi_{\rm T}$ 很不相同. 其中一个重要区别是 $\psi_{\rm H}$ 是实的, 因此式 (6.1.8) 恒为零; 而式 (6.2.1) 定义的波函数 $\psi_{\rm T}$ 则必定是复的.

6.3　小超空间波函数

1. de Sitter 空间

我们首先考虑一个简单的小超空间模型

$$I=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}(l_p^{-2}R-\rho_v), \tag{6.3.1}$$

式中 ρ_v 是恒定真空能, 假设宇宙是闭合、均匀和各向同性的

$$\mathrm{d}s^2=\sigma^2[N^2(t)\mathrm{d}t^2-a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2], \tag{6.3.2}$$

式中 $N(t)$ 为任意的时移 (lapse) 函数, $\mathrm{d}\Omega_3^2$ 为单位三维球上的度规, $\sigma^2=2G/3\pi$. 这个模型只有一个自由度, 标度因子为 a, 因此 $\psi=\psi(a)$. 当 $N(t)=1$ 时, 这个模型的经典解为 de Sitter 空间

$$a(t)=H^{-1}\cosh(Ht), \tag{6.3.3}$$

式中

$$H=\frac{4}{3}G\rho_v^{1/2}. \tag{6.3.4}$$

关于 $\psi(a)$ 的 W-D 方程是

$$\left[a^{-p}\frac{\partial}{\partial a}a^p\frac{\partial}{\partial a}-U(a)\right]\psi=0, \tag{6.3.5}$$

参数 p 表示因子次序的不确定性,

$$U(a)=a^2(1-H^2a^2). \tag{6.3.6}$$

方程 (6.3.5) 和坐标为 $a(t)$ 的单粒子一维薛定谔方程形式相同. 粒子能量为零, 势为 $U(a)$. 经典区域为 $U(a)\leqslant 0$ 或 $a\geqslant H^{-1}$. 在这个区域中, 方程 (6.3.5) 的 WKB 解 (忽略指数前的因子) 为

$$\psi_\pm^{(1)}(a)=\exp\left[\pm\mathrm{i}\int_{H^{-1}}^{a}p(a')\mathrm{d}a'\mp\frac{\mathrm{i}\pi}{4}\right], \tag{6.3.7}$$

在区域 $a < H^{-1}$, 即势垒下, 解为

$$\psi_{\pm}^{(2)}(a) = \exp\left[\pm\int_a^{H^{-1}} |p(a')|\mathrm{d}a'\right], \tag{6.3.8}$$

式中 $p(a) \equiv [-U(a)]^{1/2}$. $\psi_{+}^{(1)}$ 描述一个正在收缩的宇宙, 而 $\psi_{-}^{(1)}$ 描述一个正在膨胀的宇宙. 穿过势垒的隧道对应于 $a > H^{-1}$ 的出射波

$$\psi_{\mathrm{T}}(a > H^{-1}) = \psi_{-}^{(1)}(a). \tag{6.3.9}$$

由 WKB 的连接公式可以得到形式为

$$\psi_{\mathrm{T}}(a < H^{-1}) = \psi_{+}^{(2)}(a) - \frac{\mathrm{i}}{2}\psi_{-}^{(2)}(a) \tag{6.3.10}$$

的势垒下波函数. 不考虑 $a = H^{-1}$ 的邻近区域, 式 (6.3.10) 的第二项可以忽略. 因此 $\psi_{\mathrm{T}} \approx \psi_{+}^{(2)}(a)$. 波函数按指数规律增大, 直到 $a = 0$. “隧道幅”与下式成正比:

$$\psi_{\mathrm{T}}(H^{-1})/\psi_{\mathrm{T}}(0) = \exp\left[-\int_0^{H^{-1}} |p(a')|\mathrm{d}a'\right] = \exp\left[-\frac{3}{16G^2\rho_v}\right]. \tag{6.3.11}$$

由哈特-霍金理论可以得到

$$\psi_{\mathrm{H}}(a < H^{-1}) = \psi_{-}^{(2)}(a), \tag{6.3.12}$$

$$\psi_{\mathrm{H}}(a > H^{-1}) = \psi_{+}^{(1)}(a) + \psi_{-}^{(1)}(a). \tag{6.3.13}$$

这个波函数描述了一个收缩的和再次膨胀的宇宙. 势垒下波函数 $\psi_{\mathrm{H}}(a)$ 按指数规律减小 [图 6-2(b)].

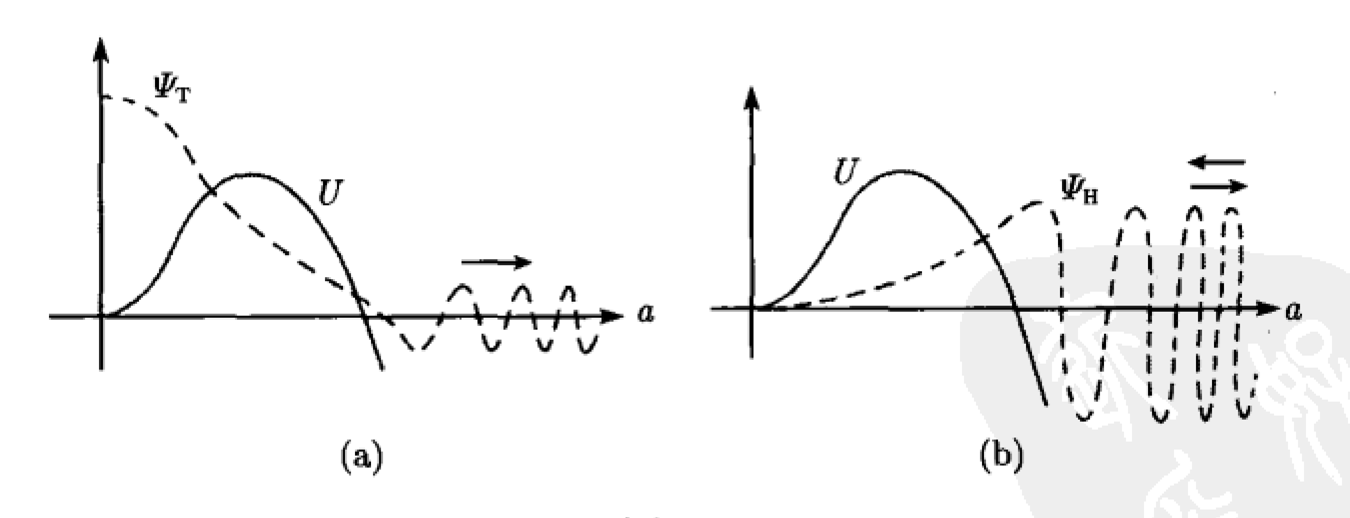


图 6-2

2. 标量场模型

现在我们考虑一个更真实的模型, 由作用量

$$I = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[l_p^{-2}R + \frac{1}{2}(\partial_\mu\widetilde{\phi})^2 - V(\widetilde{\phi})\right] \tag{6.3.14}$$

确定. 这里假设标量场是均匀、各向同性的, 度规为式 (6.3.2). 引入量

$$\phi = (4\pi G/3)^{1/2}\widetilde{\phi}, \quad V = (4G/3)^2\widetilde{V}. \tag{6.3.15}$$

W-D 方程具有形式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{p}{a}\frac{\partial}{\partial a} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - U(a,\phi)\right]\psi = 0, \tag{6.3.16}$$

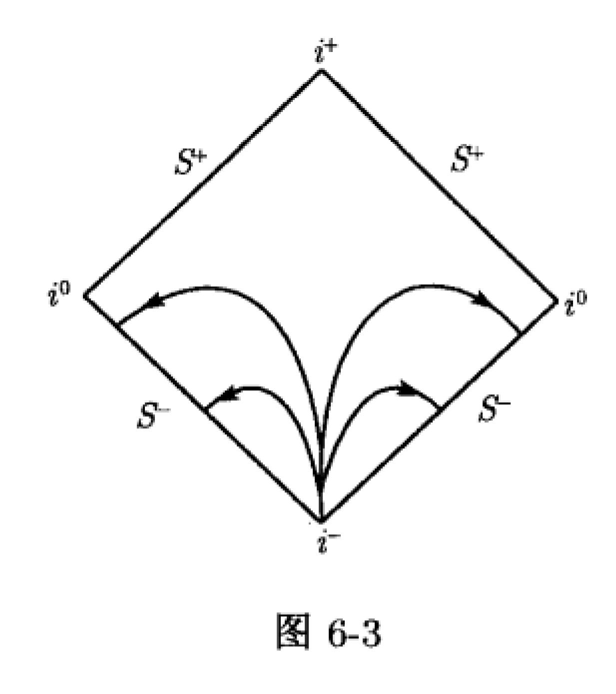


图 6-3

式中

$$U(a,\phi) = a^2[1 - a^2 V(\phi)]. \tag{6.3.17}$$

这个模型的小超空间是一个二维流形, $0 < a < \infty, -\infty < \phi < \infty$. 它的非奇异性边界是线 $a = 0$, $|\phi| < \infty$. 在奇异边界, 两个变量中至少有一个是无限大. 引入一新变量 $\alpha = \ln a$, 我们通过一个共形图可以表示出小超空间和它的边界 (图 6-3). 这个图与 α 为时间坐标、ϕ 为空间坐标的闵可夫斯基空间图相同. 非奇异性边界由过去类时无限大处的单 (奇) 点 i^- 表示.

在 WKB 近似下, 波函数表示为式 (6.2.2) 的形式, 哈密顿 - 雅可比方程 (6.2.3) 取

$$\left[\frac{\partial S_n}{\partial a}\right]^2 - \left[\frac{\partial S_n}{\partial \phi}\right]^2 + U = 0 \tag{6.3.18}$$

的形式. 当 a 很小 $(a \to \infty)$ 时, 势 $U(a,\phi)$ 趋于零, ψ 是形如

$$\psi_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\alpha \mp \phi)} \tag{6.3.19}$$

的项的叠加. $k > 0$ 的项描述向奇点坍缩的宇宙. 相应的无质量自由标量场的爱因斯坦方程的经典解为

$$a \propto (t_0 - t)^{1/3}, \quad |\phi| \approx \frac{1}{3}\ln(t_0 - t),$$

t_0 是任意的. 在共形图上, 表示这些解的路径在过去零无限大处与边界相交, $k < 0$ 的项描述由奇点向外膨胀的宇宙. 隧道边界条件 (6.2.1) 要求现在的模型是正 k 的. 在非奇异性边界 i^-, 波函数接近一个常数 (对应于 $k = 0$ 的模型)

$$\psi(a = 0, \phi) = \mathrm{const}. \tag{6.3.20}$$

我们对 i^- 的邻域内 ψ 的行为感兴趣. 这个区域对应于宇宙的极早期 (成核和膨胀的开始), 在这个时期量子宇宙效应才是重要的.

假设 $V(\phi)$ 是 ϕ 的缓变函数

$$|V^{-1}\mathrm{d}V/\mathrm{d}\phi| \ll 1. \tag{6.3.21}$$

还假设 $V(\phi)$ 远小于普朗克尺度:

$$|V| \ll 1. \tag{6.3.22}$$

当这个条件不满足时, 半经典近似就不能使用. 此时量子引力的高阶项变得很重要. 式 (6.3.20) 和 (6.3.21) 表明, 对于足够小的 a, 波函数 ψ 也是 ϕ 的缓变函数. 因此, 我们可忽略对 ϕ 的导数. 式 (6.3.16) 变为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{p}{a}\frac{\partial}{\partial a} - U(a,\phi)\right]\psi = 0. \tag{6.3.23}$$

现在 ϕ 仅仅是一个参数, 问题归结为前面讨论过的一维小超空间模型. 这个小超空间 (a,ϕ) 可以分为 $U>0$ 和 $U<0$ 两个区域. 只要式 (6.3.23) 是正确的, 这种分法就是把小超空间分为经典禁区 (ψ 呈指数形式) 和经典允许区 (ψ 呈振荡形式). 这两个区域之间的区域是 $U=0$ 或

$$a^2 = 1/V(\phi). \tag{6.3.24}$$

为了找到式 (6.3.23) 的解, 我们注意到: ① 参数 p 不影响半经典几率; ② 取 $p=-1$, 式 (6.3.23) 可以精确地解出, 引入一个新的变量

$$z = -(2V)^{-2/3}(1-a^2V), \tag{6.3.25}$$

取 $p=-1$, 我们有

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z\right]\psi = 0.$$

这个方程的一般解是 Airy 函数 $\mathrm{Ai}(-z)$ 和 $\mathrm{Bi}(-z)$ 的线性组合. Airy 函数的系数是 ϕ 的任意函数. 为了读者的方便, 这里我们给出大 z 值 ($z\to+\infty$)Airy 函数的渐近形式

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ai}(z) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\mathrm{e}^{-\zeta},\\
\mathrm{Bi}(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\mathrm{e}^{\zeta},\\
\mathrm{Ai}(-z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\sin\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\right),\\
\mathrm{Bi}(-z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\right),
\end{aligned} \tag{6.3.26}$$

式中 $\zeta \equiv \dfrac{2}{3}z^{3/2}$.

由出射波只应出现在经典允许区域 (对于 $a^2 > V^{-1}, \mathrm{i}\psi^{-1}\partial\psi/\partial a > 0$) 的要求, Vilenkin 找到了隧道波函数 ψ_{T}. 由式 (6.3.26) 和条件 (6.3.21) 得到

$$\psi_{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{Ai}(-z) + \mathrm{iBi}(-z)}{\mathrm{Ai}(-z_0) + \mathrm{iBi}(-z_0)}, \tag{6.3.27}$$

式中 $z_0 = z(a=0) = -(2V)^{-2/3}$. 当 $V(\phi)$ 为负时, z 和 z_0 是复的. 令

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}|V(\phi)|, -z = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}|z|, \\ -z_0 &= \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}|z_0|. \end{aligned}$$

我们得到与式 (6.3.27)(在 $V(\phi) = +0$) 相对应的解析延拓.

采用关系式

$$\mathrm{Ai}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}z) + \mathrm{iBi}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}z) = 2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}\mathrm{Ai}(z), \tag{6.3.28}$$

可以把 $V(\phi) < 0$ 时的波函数写为

$$\psi_{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{Ai}(|z|)}{\mathrm{Ai}(|z_0|)}[V(\phi) < 0]. \tag{6.3.29}$$

我们注意到, 在这个区域内波函数是实的.

在经典容许区域, $a^2V > 1$, 且不太接近势垒时, z 取大值且为正, z_0 取大值且为负 [式 (6.3.22)]. 于是采用渐近式 (6.3.26) 得到

$$\psi_{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}(a^2V-1)^{-1/4}\exp\left[-\frac{1+\mathrm{i}(a^2V-1)^{3/2}}{3V}\right] (a^2V > 1). \tag{6.3.30}$$

类似地, 在经典禁区, 我们找到

$$\psi_{\mathrm{T}} = (1-a^2V)^{-1/4}\exp\left[\frac{(1-a^2V)^{3/2}-1}{3V}\right] (a^2V < 1). \tag{6.3.31}$$

应该指出, 最后一个表达式在 $V=0$ 是非奇异的, 对于 $V(\phi)$ 为正和为负两种情况都适用. 采用式 (6.3.30) 和 (6.3.31), 很容易验证, 如果满足条件

$$\left|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}\right| \ll \max\{|V|, 1/a^2\}, \tag{6.3.32}$$

则在式 (6.3.16) 中略去对 ϕ 的导数项是恰当的. 这是关于 $V(\phi)$ 的条件的最终形式, 它代替形式 (6.3.21).

现在我们来寻找对于这一模型的哈特–霍金波函数 $\psi_{\rm H}$. 它在经典禁区应该是 a 的指数函数. 由式 (6.3.20), 我们有

$$\psi_{\rm H} = \frac{{\rm Ai}(-z)}{{\rm Ai}(-z_0)}. \tag{6.3.33}$$

采用渐近式 (6.3.26), 得到经典容许区内 $\psi_{\rm H}$ 的 WKB 近似式

$$\psi_{\rm H} = 2(a^2V-1)^{-1/4}\exp\left[\frac{1}{3V}\right]\cos\left[\frac{(a^2V-1)^{3/2}}{3V}-\frac{\pi}{4}\right](a^2V>1). \tag{6.3.34}$$

在禁区有

$$\psi_{\rm H} = (1-a^2V)^{-1/4}\exp\left[\frac{1-(1-a^2V)^{3/2}}{3V}\right](a^2V<1). \tag{6.3.35}$$

有趣的是, 由式 (6.3.33) 给出的 $\psi_{\rm H}$ 可以由式 (6.3.27) 的 $\psi_{\rm T}$ 经过解析延拓得到. 这由式 (6.3.28) 可以看出. 如果把 a 代之以 ${\rm e}^{{\rm i}\pi/2}a, V(\phi)$ 代之以 ${\rm e}^{-{\rm i}\pi}V(\phi)$, 则 $z\to {\rm e}^{2\pi{\rm i}/3}z, z_0\to {\rm e}^{2\pi{\rm i}/3}z_0, \psi_{\rm T}$ 就变成了 $\psi_{\rm H}$

$$\psi_{\rm H} = \psi_{\rm T}(V\to {\rm e}^{-{\rm i}\pi}V, a\to {\rm e}^{{\rm i}\pi/2}a). \tag{6.3.36}$$

这导致一种有趣的可能性：在一般情况下, $\psi_{\rm T}$ 和 $\psi_{\rm H}$ 也应该可以通过一个解析延拓联系起来. 我们建议把上述变换推广为

$$h_{ij}\to {\rm e}^{{\rm i}\pi}h_{ij},\quad V(\phi)\to {\rm e}^{-{\rm i}\pi}V(\phi). \tag{6.3.37}$$

很容易证明, 这个变换不改变 W-D 方程 (6.1.7).

6.4 $\psi_{\rm T}$ 和 $\psi_{\rm H}$ 的宇宙学预言

在宇宙成核之后不久, 宇宙的演化已成为经典的了, 波函数 (6.3.30) 和 (6.3.34) 描述了全部经典宇宙. 量子宇宙学的任务是确定宇宙初态的几率分布. 在我们的简单的模型中, 初态由标量场 ϕ 表征 [a 的初始值由 $a^2=1/V(\phi)$ 得到, $\dot a$ 和 $\dot\phi$ 的初始值均为零].

在 Vilenkin 的量子隧道方案中, 由守恒方程 (6.1.8) 可以得到 ϕ 的几率分布. 在小超空间模型 (6.3.16) 中, 物质流有两部分:

$$j^a = \frac{\rm i}{2}a^p(\psi^*\partial_a\psi-\psi\partial_a\psi^*), \tag{6.4.1}$$

$$j^\phi = -\frac{\rm i}{2}a^{p-2}(\psi^*\partial_\phi\psi-\psi\partial_\phi\psi^*), \tag{6.4.2}$$

连续性方程为

$$\partial_a j^a + \partial_\phi j^\phi = 0. \tag{6.4.3}$$

j^a 可以看作 a 处 ϕ 的几率密度. 关系式

$$\partial_a \int j^a \mathrm{d}\phi = 0 \tag{6.4.4}$$

表明几率守恒. 由波函数 (6.3.30) 给出的经典解仅包含膨胀宇宙

$$a \approx V^{-1/2}\cosh(V^{1/2}t), \quad \phi \approx \text{const}, \tag{6.4.5}$$

而且这里不存在负几率问题 (换句话说, 标度因子 a 对于上述模型是一个好的时间变量).

几率密度 $\rho(a,\phi)$ 是这样定义的: 当标度因子为 a 时, $\rho(a,\phi)\mathrm{d}\phi$ 表示标量场处于 ϕ 到 $\phi+\mathrm{d}\phi$ 间的概率. 把式 (6.3.30) 代入式 (6.4.1), 且令 $p=-1$, 我们可以得到对应于 ψ_{T} 的 $\rho(a,\phi)$

$$\rho_{\mathrm{T}}(a,\phi) = C_{\mathrm{T}} \exp\left[-\frac{2}{3V(\phi)}\right]. \tag{6.4.6}$$

由式 (6.4.6) 可见, ρ_{T} 与 a 无关. 这是因为 $V(\phi)$ 是缓变函数, 于是在经典轨道上 ϕ 近似为常数. 式 (6.4.6) 仅适用于 $V(\phi)>0$ 的区域. 当 $V(\phi)<0$ 时, ψ_{T} 是实的, 且 $\rho_{\mathrm{T}}=0$. 归一化常数 C_{T} 由式

$$C_{\mathrm{T}}^{-1} = \int_{[V(\phi)>0]} \mathrm{d}\phi \exp\left[-\frac{2}{3V(\phi)}\right] \tag{6.4.7}$$

确定. 当 $\phi\to\pm\infty$ 时, $V(\phi)<0$ 时, 或者 $V(\phi)$ 比 $\frac{2}{3}\ln|\phi|$ 更快地趋近于零, 则此积分是收敛的. 如果 ϕ 是定义在有限区域 $0<\phi<\phi_0$ 内的周期变量, 这个积分也是收敛的. 如果这些条件都不满足, 式 (6.4.6) 就是不可归一化的. 其他的方案也应该要求式 (6.4.7) 是收敛的, 并把它作为粒子 - 物理模型的一个约束条件来考虑.

图 6-4 中给出了不同类型 $V(\phi)$ 的几率分布 $\rho_{\mathrm{T}}(\phi)$. 在第一个例子中, 当 $|\phi|\to\infty$ 时, $V(\phi)\to\infty$, $\rho_{\mathrm{T}}(\phi)\to$ const. $\rho_{\mathrm{T}}(\phi)$ 的最大值对应于势 $V(\phi)>1$. 虽然半经典方法在这个区域并不可靠, 但是 $V(\phi)<1$ 时 ρ_{T} 的行为暗示了在这类模型中 $V(\phi)>1$ 时宇宙极有可能成核. 如果在大 ϕ 处势的增大足够缓慢, 则这个初态就会导致混沌暴胀. 在第二个例子中, 势 $V(\phi)$ 没有下限. 我们认为, 只要在 $\phi=0$ 时亚稳态的寿命比目前的宇宙年龄还要大, $V(\phi)$ 没有下限就不成问题. $V(\phi)$ 最大时宇宙成核概率也最大. 这种初始条件已纳入新的暴胀模型之中. 表中的例 3 表明, 在大 $|\phi|$ 值, $V(\phi)\to 0$ 时, 可以得到一个类似的几率分布. 如果 $\max[V(\phi)]\ll 1$, 则宇宙的初始密度就远小于普朗克值, 便可以用半经典的方法来处理宇宙的全部演化过程.

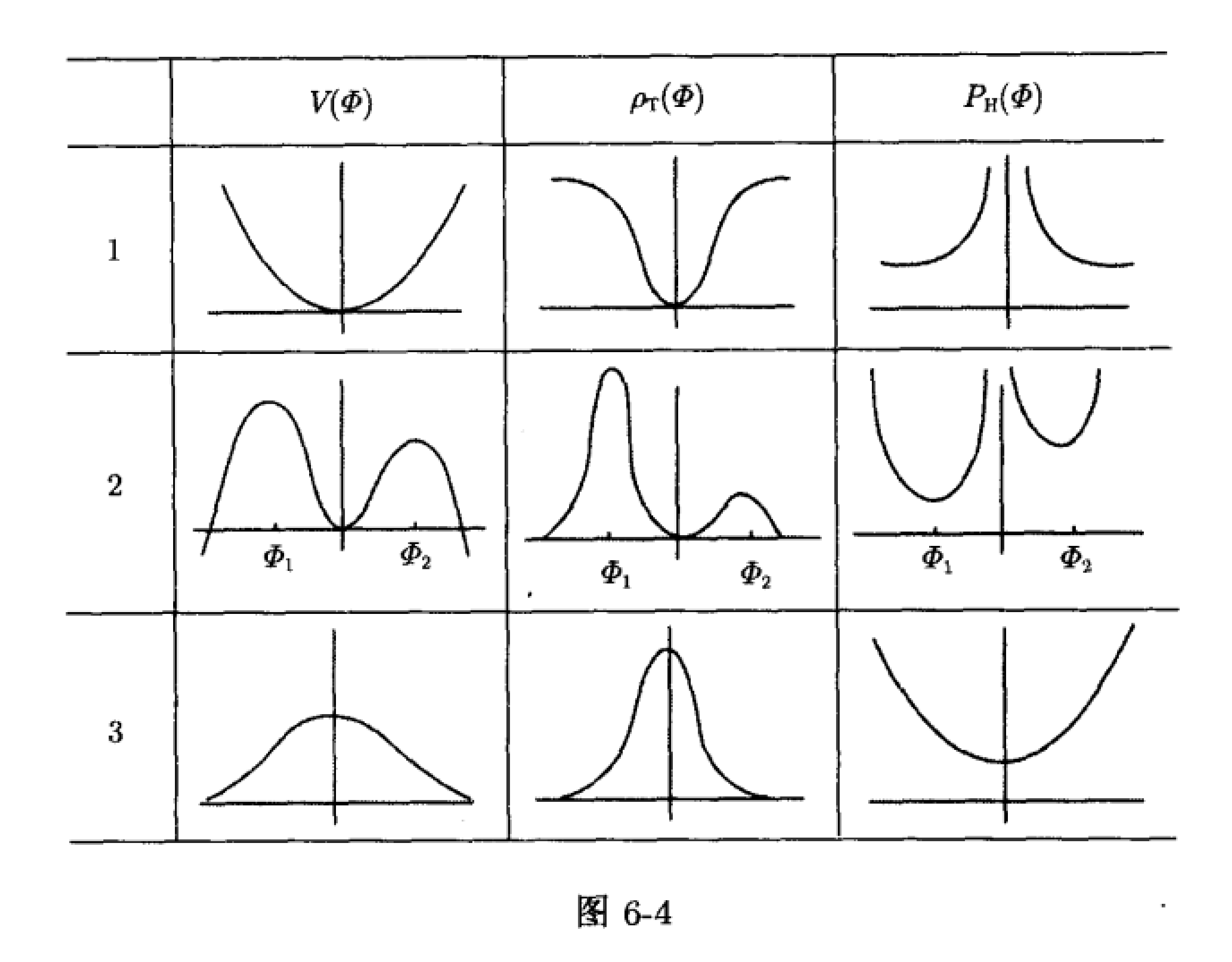


图 6-4

6.5 扰动超空间

本节讨论小超空间的线性扰动. 这个扰动理论和 de Sitter 空间的量子场论是等效的, 并且宇宙波函数的边界条件确定了引力场和标量场的量子态. 霍金等用哈特–霍金方法讨论了这个问题, 得到结论: 量子的初态是 de Sitter 恒定真空态. 本节用 Vilenkin 的量子隧道方法得到同样的结果.

假设标量场的势有上限. 由小超空间模型的分析可知, 隧道波函数 ψ_{T} 在最大 $V(\phi)$ 值附近达到峰值. 在最大值附近有

$$V(\phi)=H^2-\mu^2\phi^2+O(\phi^3). \tag{6.5.1}$$

假设 $\mu\ll H$, 以使最大值对于暴胀是足够平坦的. 在 $\phi=0$ 附近标量场的小扰动可以用球谐函数展开

$$\phi(x)=(2\pi^2)^{1/2}\sum_{n,l,m}f_{nlm}(t)Q_{lm}^n(x^i), \tag{6.5.2}$$

式中 $n=1,2,3,\cdots;l=0,1,\cdots,n-1;m=-l,-l+1,\cdots,l$, 因子 $(2\pi^2)^{1/2}$ 是为了 Q_{lm}^n 能归一化. 通过选择一个适当的规范, 引力扰动形式上等效于一对最小耦合无质量标量场, 这对于只考虑这个标量场来说是足够了.

考虑这标量场的所有模式, 波函数 ψ 就变成了一个有无限多个变量的波函数

$\psi(a, f_1, f_2, \cdots)$, W-D 方程具有形式

$$\left\{a^2\frac{\partial^2}{\partial a^2}+pa\frac{\partial}{\partial a}-a^4(1-H^2a^2)-\sum_n\left[\frac{\partial^2}{\partial f_n^2}-(n^2-1)a^4f_n^2+\mu^2a^6f_n^2\right]\right\}\psi=0. \tag{6.5.3}$$

波函数表述为

$$\psi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}, \tag{6.5.4}$$

式中

$$S(a,\{f_n\})=S_0(a)+\frac{1}{2}\sum_n S_n(a)f_n^2+O(f_n^3). \tag{6.5.5}$$

把标度因子 a 看作半经典变量, 并忽略 f_n 中四阶以上的高阶项. 这样, 可以得到关于 S_0 和 S_n 的方程

$$S_0'^2+a^2(1-H^2a^2)=0, \tag{6.5.6}$$

$$a^2S_0'S_n'-S_n^2-(n^2-1)a^4+\mu^2a^6=0, \tag{6.5.7}$$

式中小撇代表对 a 的导数. 式 (6.5.6) 是描述 de Sitter 空间一维小超空间模型的半经典方程. 在经典容许区域, $a>H^{-1}$, 它的解为

$$S_0(a)=-\frac{1}{3H^2}(H^2a^2-1)^{3/2}, \tag{6.5.8}$$

式中选择的符号对应于一个膨胀的宇宙 (出射波).

由于 $\mu\ll H^{-1}$, 且量子隧道问题的特征尺度为 $a\sim H^{-1}$, 所以与 $(n^2-1)a^4$ 比较起来式 (6.5.7) 中的 μ^2a^6 项可以忽略. 唯一例外的情况是 $n=1$ 的均匀模式. 均匀模式 f_1 的波函数已经在二维小超空间模型中研究过了. 把 $V(\phi)=H^2-\mu^2f_1^2$ 代入式 (6.3.30), 并按 f_1^2 的幂展开, 可以得到 $S_1(a)$

$$S_1(a)=\frac{2\mathrm{i}\mu^2}{3H^4}+\frac{\mu^2}{3H^4}(H^2a^2-1)^{1/2}(H^2a^2+2). \tag{6.5.9}$$

由式 (6.5.9) 中第一项, 使得波函数 ψ_T 是 f_1 的按指数规律减小的函数. 它集中在 $f_1=0$ 附近宽度为 $\Delta f_1\sim H^2/\mu$ 的管中. 下面我们讨论 $n>1$ 的非均匀模式, 并忽略式 (6.5.7) 中的最后一项.

这里, 我们可以通过关系式

$$S_0'=-\frac{a\dot{a}}{N(a)}$$

引入时间变量 t, 其中 $\dot{a}=\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$, $N(a)$ 为时移函数. 按照 Wada 的方法, 我们选择 $N(a)=a$, 对应于“共形时间”此时有

$$a=(H\cos t)^{-1}. \tag{6.5.10}$$

我们用 t 代替 a, 看作一个独立变量.

式 (6.5.7) 是一个 Riccatti 方程, 可以用代换

$$S_n(t) = a^2\dot{\nu}_n/\nu_n \tag{6.5.11}$$

线性化. 式中 a 满足式 (6.5.10). 所得到的 ν_n 的方程为

$$\ddot{\nu}_n + 2(\dot{a}/a)\dot{\nu}_n + (n^2-1)\nu_n = 0. \tag{6.5.12}$$

它与 de Sitter 空间中标量模式函数的方程是一致的. 因此, $\nu_n(t)$ 起了标量场 ϕ 模式函数的作用. 方程 (6.5.12) 的一般解为

$$\nu_n(t) = \nu_n^{(1)}(-\mathrm{itan}t) + B_n\nu_n^{(2)}(-\mathrm{itan}t), \tag{6.5.13}$$

式中

$$\nu_n^{(1)}(y) = (y-1)^{(n-1)/2}(y+1)^{-(n+1)/2}(1+y/n), \tag{6.5.14a}$$

$$\nu_n^{(2)}(y) = (y+1)^{(n-1)/2}(y-1)^{-(n+1)/2}(1-y/n), \tag{6.5.14b}$$

由于在式 (6.5.11) 中 $\nu_n(t)$ 互相抵消, 所以它们的归一化问题并不重要. 系数 B_n 的选择决定场 ϕ 的量子态.

在经典禁区, $a < H^{-1}$ 未受扰动的波函数是与

$$S_0(a) = \pm\frac{\mathrm{i}}{3}(1-H^2a^2)^{3/2} \tag{6.5.15}$$

对应的两项的叠加 [式 (6.3.10)]. 在式 (6.5.13) 和 (6.5.14) 中, 把 t 换成 $\pm\mathrm{i}t$, 可以得到相应的模式函数. 波函数的三个分支分别是: 按指数规律增大的 ψ_{I} 、按指数规律减小的 ψ_{II} 和出射波 ψ_{III}, 如图 6-5 所示. 在成核点 ($a = H^{-1}$) 附近, ψ_{I} 和 ψ_{II} 有可以比较的量级, 而 ψ_{II} 控制了禁区的大部分.

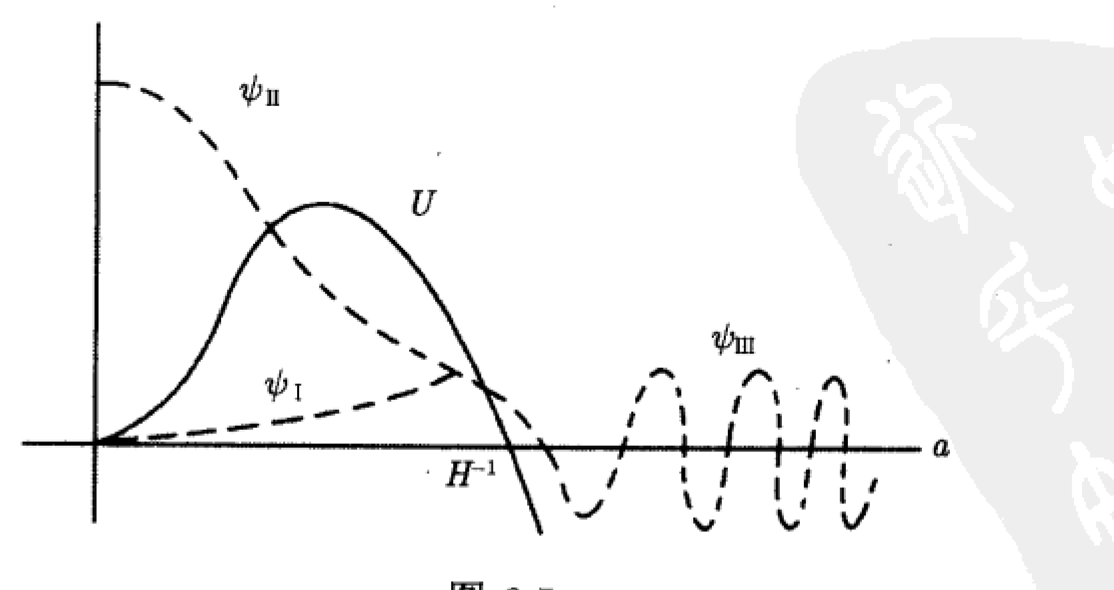


图 6-5

系数 B_n 的选择, 应该对于所有的 a 值都有

$$\mathrm{Im}S_n(a) \geqslant 0, \tag{6.5.16}$$

否则 ψ 将是 f_n 的按指数规律增大的函数, 限制条件 (6.2.5) 将被破坏. 采用模式函数的表现形式 (6.5.14) 很容易看出, 当 $|B_n| < 1$ 时, ψ_{I} 和 ψ_{II} 满足条件 (6.5.16), 而对 ψ_{I} 唯一可能的选择是 $B_n = 0$.

为了找到函数不同分支中 B_n 之间的关系, 我们考虑成核点 $a = H^{-1}$ 的邻近区域. 这里半经典近似方法不适用. 这个问题需要细致分析, 在量子隧道方法和哈特–霍金方法中都会遇到. 我们假设波函数的三个分支是互为解析延拓的, 使 B_n 在 $\psi_{\mathrm{I}}, \psi_{\mathrm{II}}$ 和 ψ_{III} 中具有相同的值. 这样, 在三个分支中都有 $B_n = 0$.

对于引力子来说, 模式函数 (6.5.14a) 的选择对应于 de Sitter 恒定真空态. 具有势 (6.5.1) 的标量场是不稳定的, 不具有 de Sitter 恒定态, 对于最小耦合无质量标量场也是一样的. 有质量标量场具有 de Sitter 恒定态, 相应的模式波函数在零质量极限时又回到函数 (6.5.14a). 在这种情况下, 各量子宇宙模型预言的量子态都与这里得到的 de Sitter 真空态非常接近. 在量子隧道方法中预言的量子态与哈特–霍金方法得到的量子态也是相似的, 它们仅仅在均匀模型中有一些不同.

人们常说, 闭的宇宙必然要重新收缩. 如果真是这样, 那么 ψ_{T} 和 ψ_{H} 描述的所有暴胀宇宙都将热化, 并在有限长时间内到达一个大挤压状态. 但是如果考虑到标量场的量子涨落, 这个结论就会改变. Vilenkin 认为, 宇宙有一个开端, 但没有终点. 我们生活在一个 10^{10} 年以前就已热化的区域, 但是宇宙本身可能比这还要古老.

6.6　开暴胀和人择原理

多年来, 人们对开宇宙不太感兴趣, 因为暴胀预言的是一个平直的宇宙. 近几年情况有了变化. 因为观测结果倾向于低的物质密度值, 所以人们相继提出了一些开暴胀的宇宙模型, 与观测结果相符合. 在第 5 章中, 我们介绍了 Turok Hawking 的工作, 下面我们讨论 Vilenkin 关于开暴胀方面的工作.

Vilenkin 认为, 人们对人择原理怀有偏见 (坏印象) 是不应该的. 因为如果我们真的生活在开宇宙中, 不用人择原理就很难解释 Ω 的观测值. 同样道理也适用于具有非零宇宙常数的宇宙.

1. 单场模型

开暴胀的最简单模型是考虑一个标量场 ϕ 和具有相当特殊形式的势 $V(\phi)$. 这个势有一个亚稳的假真空, 经过一个势垒和一段平坦的慢滚动区域到真真空. 暴胀的第一阶段发生在场 ϕ 陷入假真空时. ϕ 不时地隧道贯穿势垒而形成泡. 接着 ϕ 缓

慢地滚向势的真最小, 导致泡内暴胀的第二阶段. 泡的成核过程由一个紧致的 $O(4)$ 不变的瞬子描述, 这瞬子是欧氏场方程的一个解. 成核几率为 $P \sim \mathrm{e}^{-I_{\mathrm{E}}}$, 式中 I_{E} 是瞬子的欧氏作用量. 成核后泡的演化由把瞬子解析延拓到洛伦兹号差而得到. 可以证明, 泡的内部与开的 Robertson-Walker 宇宙同构. 泡的均匀和各向同性由瞬子的高度对称性保证. 因此, 视界问题的解决不是因为大量的暴胀而是因为泡成核过程的对称性.

对于泡之间的空间, 扩散速率相当高, 且泡之间的碰撞非常少. 因此, 泡可视为孤立的开宇宙. 所有这些宇宙都具有相同的 Ω 值, 而此值由慢滚动暴胀的 e 重数 N 决定. 对于观测到的值, 应有 $N \approx 60$.

这个最简单的模型证明, 暴胀确实可以与低密度宇宙相合, 但需要大量的微调. 势 $V(\phi)$ 要有一个尖锐的垒和平坦的慢动区域相连, 而这是一种相当不自然的拼合.

2. 双场模型

Linde 和 Mezhlumian 引入了一个更自然的模型, 其中有两个场 σ 和 ϕ, σ 用于隧道贯穿, 而 ϕ 用于慢滚动. 势的形式为

$$V(\sigma, \phi) = V_0(\sigma) + \frac{1}{2} g \sigma^2 \phi^2, \tag{6.6.1}$$

式中 $V_0(\sigma)$ 在 $\sigma = 0$ 处有亚稳的假真空, 而在 $\sigma = \sigma_0$ 处有真真空. 处于假真空时 ϕ 是无质量的. 但在真真空中它的质量为

$$m = g^{1/2} \sigma_0. \tag{6.6.2}$$

暴胀宇宙中的无质量标量场受制于量子涨落, 而后者可描述为沿 ϕ 轴的随机移动. 过一会儿, ϕ 的所有值都变得同样可能.

在这一模型中, 泡可以在不同的 ϕ 值处成核, 其成核几率为

$$P \sim \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{E}}}(\phi). \tag{6.6.3}$$

泡内慢滚动暴胀的 e 重数也是与 ϕ 有关的

$$N(\phi) \approx 2\pi G \phi^2. \tag{6.6.4}$$

因此, 可以期望得到具有不同 Ω 值的泡分布.

然而, 最近 Garcia-Bellido, Garriga 和 Montes 给出的分析表明这种图像过于简单了. 场 ϕ 在泡中不是均匀的. 其原因是泡扩展到涨落的场 ϕ 的区域中去, 而涨落又渗透了泡壁. 数学上, 这可以由所谓超曲率模式描述. 令 t_σ 表示场 σ 停顿于 σ_0 处的真最小时所用的时间 (这里 t 是泡内的 R-W 时间). 则在时间为常数的曲面上 $(t \sim t_\sigma)$, ϕ 具有高斯分布

$$P(\phi) \propto \exp(-\phi^2/2\langle\phi^2\rangle), \tag{6.6.5}$$

其中弥散

$$\langle \phi^2 \rangle \sim m^{-2} R_0^{-4}. \tag{6.6.6}$$

这里 R_0 为泡成核时刻的半径. 分布 (6.6.5) 实际上与式 (6.6.3) 中的分布相同, 但意义完全不同. 式 (6.6.3) 给出的是 ϕ 值给定时泡核的几率, 而式 (6.6.5) 则给出单个泡中 ϕ 的几率分布.

只有 ϕ 大于普朗克质量 $m_{\rm p}$ 的区域才暴胀, 而且由式 (6.6.4) 可知, 暴胀量对于各个区域都不相同. 因此, 每个泡都包含着无数多个具有不同 Ω 值的区域. G-B 等称这一图像为“准开暴胀”.

$t \sim t_\sigma$ 时刻泡内 ϕ 的关联长度为 $\zeta \sim R_c / H_{\rm F}^2 m^2 R_0^4$, 式中 $H_{\rm F}$ 为假真空的膨胀率, 而 R_c 是超曲面 $t \sim t_\sigma$ 的曲率半径. 这个关联长度决定了 Ω 变化的长度标度, 且必须比现在可观测宇宙的共动尺度大得多 (因子至少是 10^7, 这是为了使微波背景辐射的各向异性不致于大得不可接受). 为了做到这一点, 可以在势 (6.6.1) 中选择适当的参数.

显然, 在这类模型中, 不可能肯定地预言 Ω 值, 只能确定 Ω 的几率分布.

3. 平凡原理

每个泡上都可能寄居无限多个文明世界, 而每个文明世界测量的 Ω 值一般不相同. 在某些区域, Ω 会很低而不能形成任何星系. 于是, 测量此 Ω 值的概率为零, 因为那里没有文明世界观测它们. 人们所谈到的人择原理一般就是指这类约束条件. 但是, 这里我们要讨论的是另一表述 —— 由 Vilenkin 提出的一种更加定量化的表述.

Vilenkin 提议, Ω 在区间 $\mathrm{d}\Omega$ 内的概率 $P(\Omega)\mathrm{d}\Omega$ 应正比于在此区间中测量 Ω 的文明世界个数. 假设我们是典型的文明世界, 我们可以期望观测到的 Ω 值在 $P(\Omega)$ 的最大值附近. 这种人择原理表述称为平凡原理, 是哥白尼原理的推广. 哥白尼原理认为我们在宇宙中的位置不是特殊的, 而平凡原理则认为我们要测量的宇宙参数的值也不是特殊的. (Carter, Leslie 和 Gott 用类似的方法来估算我们人类的期望寿命, Gott 又将其用于估算各种政治、经济结构的寿命, 包括他发表文章的《自然》杂志.)

基于平凡原理的计算由 Vilenkin(1997) 给出. 当时, 人们还未发现 L-M 模型 (6.6.1) 的准开性质. 下面我们介绍 Vilenkin 和 Garriga, Tanaka 的工作 (1997). 他们首先运用了准开宇宙的图像, 大大简化了计算. 其次, 他们更注意了星系形成的天体物理学方面的讨论.

平凡原理也用于其他的宇宙参数的计算, 如宇宙常数和密度涨落幅.

4. $P(\Omega)$ 的计算

准开图像使计算可以大大简化, 这是因为在泡内 Ω 可以取所有可能值. 由于所有泡在统计上是平权的, 所以对单个泡计算 $P(\Omega)$ 就足够了.

分布 $P(\Omega)$ 可以表示为

$$P(\Omega) \propto P(\phi)\mathrm{e}^{3N(\phi)}\nu(\Omega)\left|\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Omega}\right|. \tag{6.6.7}$$

这里, $P(\Omega)$ 是 ϕ 的几率分布 (6.6.5), 后面一个因子的出现是因为初始 ϕ 值不同的区域暴胀量不一样; $\mathrm{e}^{3N(\phi)}$ 是体积膨胀因子. "人择因子" $\nu(\Omega)$ 正比于单位体积内星系形成的个数. 更准确地说, 它是星系尺度的体积中最终坍缩形成星系的那部分所占的分数 (我们假定文明世界的个数正比于星系数). 最后一个因子是从 ϕ 变换到 Ω 的雅可比因子, 其变换关系为

$$H_*^2\mathrm{e}^{2N(\phi)} \approx \frac{T_*^2}{T_{\mathrm{eq}}T_{\mathrm{CMB}}}\cdot\frac{\Omega}{1-\Omega}, \tag{6.6.8}$$

式中 H_* 和 T_* 分别表示暴胀结束时的膨胀率和温度, T_{eq} 是物质和辐射密度相等时的温度, T_{CMB} 是 Ω 值给定时的温度.

高斯分布 $P(\phi)$ 在 $\phi=0$ 处取峰值, 这对应于 $\Omega=0$, 而体积因子支持大的 ϕ 值, 并促使 Ω 增至 $\Omega=1$. 对于 $\nu(\Omega)$ 的效应的理解, 我们应注意到, 开宇宙中的密度涨落在红移满足 $1+z\sim\Omega^{-1}$ 处不再增大. 如果 Ω 太低, 星系就形成不了. 因此, 当 $\Omega\to 0$ 时, $\nu(\Omega)\to 0$.

一个有趣的情况是 $P(\phi)$ 比体积因子大很多. 此时人择因子 $\nu(\Omega)$ 使分布的峰值由 $\Omega=0$ 处移至 Ω 的非零值处.

为了计算 $\nu(\Omega)$, 要对宇宙密度涨落的性质做一些假设. 我们采用高斯涨落, 由再复合时刻在随动星系尺度上的弥散 σ_{rec} 表征. 这里, 参考时间的选择是不重要的, 只要比曲率为主的时刻早得多即可, 所以可以假定 σ_{rec} 与 Ω 无关. 关于星系尺度, 我们现在取随动尺度为 1Mpc.

在 t_{rec} 时刻, 具有密度参量 Ω_{rec} 的开宇宙中, 渐近未来密度涨落的弥散 σ_∞ 只比 σ_{rec} 大一个有限因子

$$\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{\mathrm{rec}}}=\frac{5}{2}\frac{\Omega_{\mathrm{rec}}}{1-\Omega_{\mathrm{rec}}}=\frac{5}{2}\frac{T_{\mathrm{rec}}}{T_{\mathrm{CMB}}}\frac{\Omega}{1-\Omega}, \tag{6.6.9}$$

式中最后一步采用了物质时期满足的关系式

$$T(1-\Omega)/\Omega=\mathrm{const}. \tag{6.6.10}$$

现在可以用 Press-Schechter 格式来确定 $\nu(\Omega)$ 了. 只有在线性化密度差 δ 大于临界值 $\delta_{\mathrm{c}}\approx 1.7$ 的区域中星系才能形成. 因此, $\nu(\Omega)$ 由高斯分布对 $\delta>\delta_{\mathrm{c}}$ 的积分即误

差函数给出

$$\nu(\Omega) = \mathrm{erfc}\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_\infty}\right) = \mathrm{erfc}\left(\kappa\frac{1-\Omega}{\Omega}\right), \tag{6.6.11}$$

式中

$$\kappa = \frac{2}{5}\frac{T_{\mathrm{CMB}}}{T_{\mathrm{rec}}}\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_{\mathrm{rec}}}. \tag{6.6.12}$$

原则上, σ_{rec} 值可以由密度涨落的基本理论中得到. 但是实际上还没有这种理论, 在实际操作中我们可以令 σ_{rec} 符合 CMB 观测. 但是这样做又有局限性, 因为由观测得到的 σ_{rec} 值依赖于宇宙中我们所占据的这一部分的哈勃常数 H_0 和密度参数 Ω_0, 而这恰恰是未完全确定的. 由于这种不确定性,

$$\kappa = 0.1 \pm 0.05. \tag{6.6.13}$$

由方程 (6.6.5)~(6.6.8) 和 (6.6.11), 可以得到对于 Ω 的几率分布的最终形式,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{dln}y} \propto y^{3(\mu-\frac{1}{2})}\mathrm{erfc}(y), \tag{6.6.14}$$

式中

$$y = \kappa\frac{1-\Omega}{\Omega}, \tag{6.6.15}$$

$$\mu = \frac{m_{\mathrm{p}}^2}{24\pi\langle\phi^2\rangle} \sim m_{\mathrm{p}}^2 m^2 R_0^4. \tag{6.6.16}$$

注意, 由式 (6.6.10), 变量 y 并不依赖于测量 Ω 时的温度 T_{CMB}.

对于 $y > 1$, 误差函数可近似为

$$\mathrm{erfc}(y) \approx \frac{1}{\sqrt{2}y}\mathrm{e}^{-y^2}, \tag{6.6.17}$$

且分布 (6.6.14) 峰值处的 Ω 值可以解析得到

$$\kappa\left(\frac{1-\Omega}{\Omega}\right)_{\mathrm{peak}} \approx \left(\frac{3}{2}\mu - \frac{5}{4}\right)^{1/2} \tag{6.6.18}$$

这个峰相当宽, 宽度为

$$\Delta\left(\frac{1-\Omega}{\Omega}\right) \sim 5. \tag{6.6.19}$$

Ω_{peak} 的一些有兴趣的值, 既不靠近 0 也不接近 1, 由一些 $\mu \sim 1$ 的模型中得到 (这些模型很容易构造).

以上分析的意义在于, 给出一个粒子物理模型, 对于 Ω 的几率分布就可以由基本原理进行明确的计算.

5. 宇宙的年龄

对于 $\Omega < 1$ 模型的反对意见通常是它很难解释为什么我们恰好生活在曲率为主的时代, 即为什么有

$$t_0 \sim t_c, \tag{6.6.20}$$

式中 t_0 是现在的时刻, t_c 是曲率为主的时刻. 在 $t \ll t_c$ 的时刻, 观测者会发现 $\Omega \approx 1$, 而当 $t \gg t_c$ 时, $\Omega \ll 1$. 人们似乎应该为生活在 Ω 与 0 和 1 都相差很远的时代而感到幸运. 其实, 一致关系 (6.6.20) 并非那么令人惊奇.

由 6.5 节的分析可知

$$t_c \sim t_{\text{G}}, \tag{6.6.21}$$

式中 t_c 是星系形成的时刻. 不存在人择因子 $\nu(\Omega)$ 时, Ω 的几率分布在 $\Omega > 0$ 处取峰值, 这对应于 $t_c \to 0$. $\nu(\Omega)$ 的作用是移动峰值的位置, 使得星系一旦形成曲率就占主导地位, 故有 $t_c \sim t_{\text{G}}$.

Dicke 的观测结果表明, 现在的时间 t_0 和典型主序星的寿命差不多, $t_0 \sim t_* \sim 10^{10}$ 年. 而且从观测上看, 大星系出现的宇宙结构形成年代满足 $Z_{\text{G}} \sim 1 \sim 3$, 或者 $t_{\text{G}} \sim 10^9 \sim 10^{10}$ 年. 故有 $t_{\text{G}} \sim t_* \sim t_0$, 由式 (6.6.21) 有 $t_c \sim t_0$. 以上论述基于与观测相符合的关系

$$t_{\text{G}} \sim t_*, \tag{6.6.22}$$

而这关系不能在我们的模型中得到解释. 星系形成的时间 t_{G} 依赖于宇宙密度涨落的幅度, 而恒星寿命 t_* 由基本常数决定. 在我们的模型中, 唯一可变的量是 t_c, 而 t_{G} 和 t_* 都是固定的. 可以设想, 关系 (6.6.22) 可以在更一般的模型中找到某种人择解释, 在这种模型中其他一些"常数"也可变.

6. 开宇宙的量子创生问题

在本篇第 5 章中我们介绍了霍金和 Turok 提出的宇宙创生模型: 开宇宙可以自发地从无到有地创生, 他们提出用 Coleman-de Luccia 瞬子描述这一过程. Vilenkin 指出, Linde 曾用同一个瞬子描述具有泡的闭合宇宙成核过程. 此瞬子的解析延拓给出一个具有膨胀泡的闭合暴胀宇宙, 泡的内部同构于开 R-W 空间. 在接下来的演化过程中还有不止一个泡成核. 霍金也认为, 他们的工作预言了一个很开的或很闭的宇宙. 霍金和 Turok 的工作还认为, 开宇宙在具有最简单的势的模型中也可以创生, 它没有假真空. 对于这一点, Vilenkin 曾提出质疑. 他认为, 比如 $V(\phi) = \frac{1}{2}m\phi^2$, 这种模型没有规则的瞬子解, H-T 瞬子是奇异的. 从几何上看, 它像是具有刺的球, 而刺的顶点正是奇点, 此处曲率和标量场为无限大. 后来霍金和 Turok 又指出, 此奇异性是可积的, 而且瞬子作用量是有限的. 这一瞬子的解析延拓给出闭的奇异宇

宙, 此时空的一部分同构于开 R-W 宇宙. 这一奇异性具有膨胀着的奇异泡的形式, 但绝不会让宇宙的 R-W 部分的观测者遇上, 所以霍金和 Turok 认为此奇异性不是一个问题. 他们的瞬子有一个自由参数, 对应于奇异性的强度. 当此参数变化时, 开宇宙的密度参数 Ω 也变化. 霍金和 Turok 运用一种人择方案找到了 Ω 的最可几值. 他们的人择方案与 Vilenkin 的不同 (不是平凡原理). 霍金和 Turok 令人择因子 $\nu(\Omega)$ 正比于空间密度, 而 Vilenkin 令其正比于观测者的个数.

Vilenkin 认为, 瞬子应该作为欧氏作用量的驻点, 能给出对欧氏路径积分的主要贡献. 而在奇异瞬子中, 场方程在奇点处不能被满足, 所以这类瞬子不是作用量的驻点. 因此他认为, 所有的奇异瞬子都值得怀疑, 除非能够证明此奇异性并非真的.

另外, 对于同一个模型 $\left[V(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi^2\right]$, Vilenkin 也构造了一个渐近平直的奇异瞬子. 从几何上看, 它像是具有刺的平面. 场在奇点附近的行为与 H-T 瞬子相同, 且作用量也是有限的. Vilenkin 认为这一瞬子会导致与观测相矛盾的结果. 所以他认为, 他得到的奇异瞬子和 H-T 奇异瞬子都不太可取.

一个有趣的进展是 Garriga 的工作 (1998), 他证明, H-T 瞬子可以由非奇异的五维的 Kaluza-Klein 瞬子退化到四维而得到. 而且他还发现, Vilenkin 的渐近平直瞬子也有五维的对应物. 结果, H-T 瞬子和 Vilenkin 瞬子都没有自由参数了.

Garriga 发现, 对于紧致维的足够大半径, 平直空间衰减几乎小到可以忽略. 看来, Garriga 的瞬子描述宇宙创生还是可以的, 但是正如他本人已注意到的, 由于他的瞬子没有自由参量, 故所得到的 Ω 值是固定的. 前面关于人择原理的讨论不适用于此模型, 而且还需要用一定量的微调来得到现在的非平凡 Ω 值. 这种允许 Ω 在一连续范围内取值的模型至今尚没构造出来.



第 7 章　其他量子宇宙学模型

前面我们讨论了哈特–霍金的量子宇宙学, 其中物质场只限于共形耦合标量场. 下面我们讨论几种其他的情况.

7.1　有质量标量场模型

霍金和 Wu 考虑了包含有质量标量场的更实际的模型. 在这种情况下, 采用代换

$$x = a\mathrm{sh}\phi, \quad y = a\mathrm{ch}\phi, \tag{7.1.1}$$

W-D 方程可写为

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+V(x,y)\right]\Psi(x,y)=0, \tag{7.1.2}$$

其中势 V 为

$$V(x,y)=x^2-y^2+m^2(x^2-y^2)^2\mathrm{arcth}^2(x/y). \tag{7.1.3}$$

方程 (7.1.2) 的边界条件由半经典近似波函数给出. 注意到在 x-y 空间中的光维 $y=|x|$ 上经典作用量的值很小, 因而边界条件可取为

$$\Psi = 1, \quad 当 y=|x|, a\geqslant 0.$$

方程 (7.1.2) 在上述边界条件下的数值积分已由霍金和 Wu 给出. 结果表明, 在 $V<0$ 区域, Ψ 是指数增长的; 在 $V>0$ 区域, Ψ 具有振荡形式. 这正是 Hawking 所预言的结果. 他指出, 经典区域的半经典波函数具有形式

$$\Psi(a,\phi)\approx N\exp\left(\frac{1}{3m^2\phi^2}\right)\cos\left[(m^2\phi^2a^2-1)^{3/2}/3m^2\phi^2-\frac{\pi}{4}\right]. \tag{7.1.4}$$

这波函数具有快速振荡的性质, 故可用 WKB 近似. 在 WKB 近似下, 波函数可写为

$$\Psi\approx C\ \exp(\mathrm{i}S). \tag{7.1.5}$$

式中 S 是快速变化的相因子, 满足 a-ϕ 平面中的经典哈密顿–雅可比方程; C 是缓变系数, 由 W-D 方程给出.

为了得到快速振荡的经典波函数, 并有足够长的暴胀期, 模型中包含这种有质量标量场是必不可少的.

Hawking 和 Luttvell 定义了新的变量, 将作用量写成

$$
\begin{aligned}
I = & -\frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}[R - aC^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} + \beta R^2] \\
& -\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x\sqrt{h}[K(1+2\beta R) - 4_\alpha K_{ij}C^{\mu i\nu j}n_\mu n_\nu] \\
& (\alpha, \beta = \text{const.})
\end{aligned} \tag{7.1.6}
$$

式中 $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 Weyl 张量. 这里 R 是一个独立变量. 作代换

$$
\tilde{g}_{\mu\nu} = (1+2\beta R)g_{\mu\nu}, \phi = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\beta R, \tag{7.1.7}
$$

可以证明 ϕ 满足方程

$$
\left[1 + 4\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2}\phi\right]\Box\phi - 4\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2}\phi_{;\nu}\,\phi_{;\mu}\,\tilde{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{6\beta}\phi = 0. \tag{7.1.8}
$$

这一方程和与引力耦合的质量为 $m = \left(\frac{1}{6\beta}\right)^{1/2}$ 的标量场满足的方程形式相同. 用 (7.1.7) 引入的变量 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ 和 ϕ, 可将作用量 (7.1.6) 改写为

$$
I = -\frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R} + \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[\phi_{;\mu}\,\phi_{;\nu}\,\tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{1}{6\beta}\phi^2\right]\left[1 + 4\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2}\phi\right]^{-2}. \tag{7.1.9}
$$

这种情况下和前面讨论的有质量标量场情况下的波函数的性质相似, 数值积分的结果也说明了这一点.

7.2　含暴胀标量场的模型

Moss 和 Wright 讨论了具有共形不变标量势的模型, 取势具有形式

$$
V(\phi) = \frac{1}{2}\alpha^2\phi^4\left(\ln\frac{\phi^2}{\phi_0^2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\alpha^2\phi_0^4 \quad (\alpha, \phi_0 = \text{const}). \tag{7.2.1}
$$

在 $\phi = \phi_0$ 处 V 有极小值.

波函数也可在两个不同区域加以讨论. 如果宇宙远离势的极小点, 则波函数关于 a 的形式与霍金给出的形式相同, 并且 H 的值由标量场给出

$$
H^2 = 2\pi\alpha^2\phi_0^4/3m_{\mathrm{p}}^2.
$$

波函数关于 $\tilde{\phi} = \phi/\alpha$ 的形式可写为

$$
\Psi(\tilde{\phi}) \approx \exp\left\{-\frac{2}{3\lambda}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\tilde{\phi}^2\right) - 1\right]\right\}, \quad \lambda = 2\alpha^2\left(\frac{1}{2} - \ln\frac{\phi_0^2}{H^2}\right). \tag{7.2.2}
$$

此波函数具有指数衰减的形式, 这表明宇宙最有可能处于较小 $\tilde{\phi}$ 值的状态. 这样, 如果宇宙开始就具有较小的 $\tilde{\phi}$ 值, 则它将会较长时间保持在这个状态. 在这段时间内, 宇宙按指数规律膨胀. 这正是暴胀的性质. 如果宇宙在平面 $\tilde{\phi}-a$ 中 P 点, 且靠近极小线 $\tilde{\phi}=a\phi_c$, 那么宇宙将围绕这极小线振荡. 在这种情况下, 对所有跨过极小线的宇宙平均所得的平均几率为

$$|\varPsi|^2_{\text{Av}} \approx \frac{3C_3^2}{11}(Ha_p)^{-1/3}n_1, \tag{7.2.3}$$

式中, C_3 为常数, n_1 给出宇宙第一次通过势极小点的时间, a_p 是 P 点的标度因子. 因为宇宙在第一次通过势极小点之前是按指数规律膨胀的, 而经典方程给出 $a_n \propto n^3$, 因此膨胀将使宇宙的标度增加 n_1^3 倍. 由式 (7.2.3) 给出的几率函数是相当平坦的, 这表明只要 ϕ 和 a 不很小, 宇宙取各种 ϕ 和 a 值的概率几乎相同; 取小 ϕ 值的概率较小.

Carow 和 Watamura 讨论了具有最小耦合标量场的情况. 此时势的形式为

$$V(a,\phi)=\frac{a^4\lambda}{M^4}(\phi^2-M^2)^2, \quad \lambda, M=\text{const}. \tag{7.2.4}$$

对相应的 W-D 方程作数值积分发现, 适当选择某些参数, 波函数局部极小附近有一个明显的峰. 这表明, 对于这些参数范围, 宇宙更可能处在假真空状态. 波函数的另一个特点是, 在欧氏区域波函数的指数增长区间有所收缩. 这可以解释为, 在反转点 $\dot{a}=0$ 标量场有一个非零的速度 $\dot{\phi}=0$.

在上述两种情况下, 宇宙处在假真空状态的概率是已知的.

在选取了"内禀时间"之后, 这种假真空的存在寿命便可以得出, 从而不难给出暴胀的平均时间.

7.3 整体转动模型

宇宙的整体转动在一定程度上可以说包含在现在的观测中, 确切地说, 现在的观测结果不能排除宇宙存在一个较小转动的可能性. 因此人们应该解释宇宙为什么会有这样一个较小的转动, 或者根本没有这种整体转动. 由高维空间投影到四维空间的热弦理论可以给出这种解释.

我们考虑一个具有 R-W 几何和无源辐射场以及有源物质场模型. 按一般方式定义转动参量

$$\varOmega^\alpha=(-g)^{-1/2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}W_{\beta\gamma\delta}, \quad W_{\beta\gamma\delta}=\frac{1}{3!}V_{[\beta V_\gamma,\delta]}.$$

可以发现, 半经典近似波函数对转动矢量模长 $\bar{\Omega}$ 的依赖关系为

$$\Psi(\bar{\Omega}) = \exp\left\{-\frac{\tilde{F}^2}{48}[(R_0^2\bar{\Omega}^2 + 4R_0\bar{\Omega} + 1)^{1/2} + R_0\bar{\Omega} - 1]\right\}, \tag{7.3.1}$$

式中

$$\tilde{F}^2 = 8\pi^2\sigma^2R_0^3f^2a\cos^2\frac{2}{R}(\bar{t} - \bar{t}_0) = F^2\cos^2\frac{2}{R}(\bar{t} - \bar{t}_0), \quad \frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{R_0}{R}},$$

$R_0 = \text{const}, f^2$ 以及以下的 b^2 分别表示流场及辐射场的能量密度参量. 对 $R_0\bar{\Omega} \gg 1$(对应于下面的 $\varepsilon = 3/2$) 及 $\bar{R}_0\Omega \ll 1$(对应于下面的 $\varepsilon = 1$), 波函数 (7.3.1) 简化为

$$\Psi = \exp\left(-\frac{\tilde{F}^2}{16\varepsilon}R_0\bar{\Omega}\right). \tag{7.3.2}$$

这个结果和由 W-D 方程

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial a}\left(a^p\frac{\partial}{\partial a}\right) - a^2 + H^2a^4 - \frac{\partial^2}{\partial B^2} + 4B^2 + F^2a\right]\Psi(a, B) = 0, \tag{7.3.3}$$

$$B = \sqrt{2}\pi\sigma R_0 A$$

的解所给出的结果相同.

波函数对转动参量 Ω 的依赖关系总的说来是按指数规律衰减的, 但是指数中的系数是依赖于时间的. 在大爆炸开始时, 因子 $\tilde{F} \sim 0$, 因此波函数很弱地依赖于 $\bar{\Omega}$. 这表明, 此时宇宙可以具有任何大小的角速度, 这是量子涨落为主时期的特征. 如果相对于流体的能量密度而言, 宇宙中辐射场的能量密度是占主导地位的, 这就可能形成宇宙的较大的转动角速度. 由于宇宙更有可能处在 a 很大的状态, 因此 $\tilde{F}^2$ 将更有可能具有非零值, 具有较大转动角速度参量的概率很小.

角速度的上限值 $\bar{\Omega}_m$ 取决于辐射场能量密度与流体能量密度之比 R_0b^2/af^2, 因此 $\bar{\Omega}$ 的平均值为

$$\langle\bar{\Omega}\rangle = \frac{1}{q}\left[1 - (q\bar{\Omega}_m + 1)\mathrm{e}^{-q\bar{\Omega}_m}\right], \tag{7.3.4}$$

式中

$$q = \tilde{F}^2R_0/\delta\varepsilon.$$

在宇宙常数起主导作用的情况下, 总有 $q\bar{\Omega}_m \ll 1$, 此时可得

$$\langle\bar{\Omega}\rangle \approx \frac{1}{2}q\bar{\Omega}_m^2, \tag{7.3.5}$$

即

$$\langle\bar{\Omega}\rangle \ll \bar{\Omega}_m \sim b^2/af^2. \tag{7.3.6}$$

结果 (7.3.5) 给出宇宙角速度演化的初始条件, 因此由它给出的宇宙现在的角速度应该可以与观测结果进行比较.

7.4 高维模型

通过增加维度的方法, 可以把哈特–霍金的基态理论用于高维情况. 最简单的模型是具有正宇宙常数的 Kaluza-Klein 宇宙模型. 其度规形式为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)d\Omega_i^2 - b^2(t)\mathrm{d}\Omega_j^2. \tag{7.4.1}$$

所有经典洛伦兹和欧氏解都是已知的, 但只有欧氏解

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 + \frac{6}{\Lambda}\sin^2\left[\left(\frac{\Lambda}{6}\right)^{1/2}\tau\right]\mathrm{d}\Omega_3^2 + C_3^2\cos^2\left[\left(\frac{\Lambda}{6}\right)^{1/2}\tau\right]\mathrm{d}\Omega_4^2, \quad C_3 = \text{const} \tag{7.4.2}$$

在南极才是紧致的.

在半经典近似下, 路径积分形式的波函数可写为

$$\Psi = N_0\sum_i A_i\exp(-B_i). \tag{7.4.3}$$

在所讨论的情况下, 波函数具有形式

$$\Psi(a,b) = N_0\exp\left[\frac{1}{4}a^2b(1-H^2a^2)^{1/2}\right], \tag{7.4.4}$$

式中 $a < \left(\frac{\Lambda}{6}\right)^{-1/2}$, N_0 为常数, $H^{-1} \equiv \left(\frac{\Lambda}{6}\right)^{-1/2}$. 当 $a > H^{-1}$ 时, 波函数具有形式

$$\Psi(a,b) = N'_0\cos\left[\frac{1}{4}a^2b(H^2a^2-1)^{1/2}+\delta\right], \tag{7.4.5}$$

式中 N' 和 δ 为常数. 把式 (7.4.5) 代入经典波包满足的方程

$$\nabla_i S = P_i, \tag{7.4.6}$$

可以得到波包的经典轨迹

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \frac{6}{\Lambda}\cosh^2\sqrt{N6t}\mathrm{d}\Omega_3^2 + C_3^2\sinh^2\sqrt{\Lambda/6t}\mathrm{d}\Omega_4^2, \tag{7.4.7a}$$

式中 C_3 为常数. 式 (7.4.7a) 表明第五维的圆扩张为三维球, 且不再自动压缩.

简单的五维 Kaluza-Klein 模型并不引起自动压缩. 下面我们考虑一个具有正宇宙常数的模型. 度规形式可写为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2 + b^2(t)\mathrm{d}\Omega_n^2, \tag{7.4.7b}$$

其引力作用量为

$$I = \int \mathrm{d}t R^{n+3}\left\{(n+2)(n+3)\left[\frac{-\dot{R}^2}{R} + \frac{3n\dot{r}^2}{(n+2)r^2}\right] + \frac{1}{R^2}[6r^{-2n} + (n-1)nr^6] - 2\Lambda\right\}, \tag{7.4.8}$$

式中我们给出参数

$$a = Rr^n, \quad b = Rr^{-6}, \tag{7.4.9}$$

一般以比例参数 R 作为一个时间坐标. W-D 方程可写为

$$\left\{-\frac{1}{R^p}\frac{\partial}{\partial R}R^p\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{R^2\partial\rho^2} + \frac{R^{2n+2}}{(n+2)(n+3)}\cdot [6\mathrm{e}^{2n\rho[(n+2)/3n]^{1/2}} + n(n-1)\mathrm{e}^{6\rho[(n+2)/3n]^{1/2}} - 2\Lambda R^2]\right\}\Psi(R,\rho) = 0, \tag{7.4.10}$$

$$\rho \equiv \left(\frac{3n}{n+2}\right)^{1/2}\ln r,$$

式中 p 代表路径积分中的一些值, 但不是所有的值. 令 $p=1$, 采用坐标变换

$$x = R\sin h\rho, \quad y = R\cos h\rho, \tag{7.4.11}$$

我们得到两个明显的欧氏解:

(1) $S_4 \times S_n$

$$a = \left[\frac{3(n+2)}{2\Lambda}\right]^{1/2}\cos\left[\left(\frac{2\Lambda}{3(n+2)}\right)^{1/2} r\right], \quad b = b_0 = \left[\frac{(n+2)(n-1)}{2\Lambda}\right]^{1/2}, \tag{7.4.12}$$

(2) $S_3 \times S_{n+1}$

$$a = a_0 = \left(\frac{n+2}{\Lambda}\right)^{1/2}, \quad b = \left[\frac{n(n+2)}{2\Lambda}\right]^{1/2}\cos\left[\left(\frac{2\Lambda}{n(n+2)}\right)^{1/2} r\right]. \tag{7.4.13}$$

我们选择 $\rho=1$, 这与 $\Psi=1$ 的边界条件一致, 且其偏导数为零. 在 $x=y$ 处, 条件 $\Psi=1$ 来自欧氏度规. 此时在欧氏度规南极有

$$b = 0, \quad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\tau} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau} = 0;$$

在 $x=-y$ 处, 上述条件为

$$a=0, \quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}=1, \quad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\tau}=0.$$

在 R 到达零势面

$$\frac{b}{a^2}+\frac{n(n-1)}{b^2}-2\Lambda=0 \tag{7.4.14}$$

之前, 波函数有一个典型行为, 它在

$$\frac{3n-(3n^2+6n)^{1/2}}{6}<\left[\frac{b}{a}\right]^2<\frac{3n+(3n^2+6n)^{1/2}}{6} \tag{7.4.15}$$

处开始震荡. 因此, 所有的经典演化都是从这里开始, 且初始速度为零. 这一条件来自爱因斯坦约束关系和 W-D 方程的经典计算部分. 在所有这些轨迹中, 两个明显的精确轨迹是式 (7.4.12) 和 (7.4.13) 中的洛伦兹部分

$$a=\left[\frac{3(\Lambda+2)}{2\Lambda}\right]^{1/2}\cos h\left[\left(\frac{2\Lambda}{3(n+2)}\right)^{1/2}t\right], \quad b=b_0 \tag{7.4.16}$$

$$b=\left[\frac{n(n+2)}{2\Lambda}\right]^{1/2}\cos h\left[\left(\frac{2\Lambda}{n(n+2)}\right)^{1/2}t\right], \quad a=a_0 \tag{7.4.17}$$

它们有一个固定标度 a_0, b_0 的内部空间 S_3 或 S_n. 如果 S_3 的初始标度小于 a_0, 它将坍缩, 而外部的 S_n 将无限膨胀. 如果 b 的初始标度小于 b_0, 则它们的行为将反过来. 如果初始标度都大于对应的常数标度, 则 S_3 和 S_n 都将无限地膨胀.

可以想见, 在内部空间即将坍缩时, 量子引力效应起着重要作用. 实际上半经典近似在这里已失效. 不仅表达式 (7.4.3) 不能给出一个稳定的波函数, 而且不能通过简单地丢掉高阶项把 W-D 方程变为 Hamilton-Jacobi 方程; 相反地, 必须把这些高阶修正项放在方程的右边, 在坍缩附近, 我们希望从波函数的数值计算中看到演化的细节.

我们把零势面从欧氏区域到洛伦兹区域的转变看作量子隧道的一种形式. 一个量子隧道在零势面通过 (a,b) 构形的相对几率可以用一个路径积分表示出来

$$\Psi^*\Psi=\int_{C+C^*}\delta[g_{\mu\nu}]\delta[\phi]\exp(-\bar{I}[g_{\mu\nu},\phi]). \tag{7.4.18}$$

爱因斯坦场方程的瞬子解决定了路径积分. 例如, 如果 $C+C^*$ 是一个瞬子, 则几率就取一个极值. 在一般情况下, 在瞬子北极的正则条件与南极的一样强. 因此, 它也显示出了最可能的演化途径.

必须强调的是拓扑 S_3 和 S_n 对这个模型不是必不可少的, 但其中的曲率项很重要. 如果缺少这些项, 质量演化就相当困难 (即使在经典条件下).

前面讨论的模型作为真实的理论模型有一定困难, 因为维度和宇宙常数都是任意给定的. 人们通常把十一维超引力作为更真实的理论, 下面我们就来讨论这一理论.

十一维时空可能是真实的. 通过自动收缩, 那额外的七维可被压缩在普朗克尺度范围内. 这个尺度范围表明了粒子物理的内部对称性. 超对称性要求引入一个三阶反对称张量 A_{MNP}. 这样场方程可写为

$$R_{MN}-\frac{1}{2}g_{MN}R=\frac{1}{48}(8F_{MPQR}F_N^{PQR}-g_{MN}F_{SPQR}F^{SPQR}), \tag{7.4.19}$$

$$F^{MNPQ}_{;M}=\left[\frac{-\sqrt{2}}{2(4!)}\right]\eta^{M_1\cdots M_8NPQ}F_{M_1\cdots M_4}F_{M_5\cdots M_8}$$
$$(0\leqslant M,N,P,Q,S,R,\cdots\leqslant 10), \tag{7.4.20}$$

式中
$$F_{MNPQ}=4!\partial_{(CMANPQ)}$$

$$\eta^{A\cdots N}=|g|^{-1/2}\epsilon^{A\cdots N}.$$

下面我们将使用有限自由度的小超空间模型. 假设时空为爱因斯坦形式 $M_K\times M_{11-K}$, 不为零的场分量为

$$g_{mn}(x), g_{\mu\nu}(y)\quad (m,n,p,q=0,\cdots,k-1),$$
$$F_{mnpq}(x), F_{\mu\nu\rho\sigma}(y)\quad (\mu,\nu,\rho,\sigma=k,\cdots,10).$$

现在我们尝试寻找基态波函数, 把 M_k 看作 $R\times S_{k-1}$, 把 M_{11-k} 看作 S_{11-k}; 这里 R 代表时间, S_{k-1} 和 S_{11-k} 分别代表外部和内部空间. W-D 方程中标度 ω 的几何平均值作为类时坐标. 在构型空间, ω 足够小, 欧氏度规的作用量也很小. 波函数的具体形式依赖于 W-D 方程中算符的次序. 人们希望一达到零势面的内空部分波函数就开始振荡, 宇宙就开始经典演化. 但是不幸的是零势面处处类时, 没有洛伦兹区域. 这与在这个 ansatz 下没有任何经典洛伦兹解相一致.

如果我们假设 $M_k=R\times H_{k-1}(k\geqslant 4), M_{11-k}=S_{11-k}, M_k=R\times S_{k-1}(k=2,3), M_{11-k}=H_{11-k}$, 则情况就完全不同了. 我们可以找到拓扑 $R\times S_{k-1}\times S_{11-k}$ 的经典解. 度规符号为 $(\underbrace{-\ -\ \cdots\ -}_{k}\ \underbrace{+\ +\ \cdots\ +}_{11-k})$ 和 $(\underbrace{+\ +\ \cdots\ +\ -\ -\ \cdots\ -}_{11-k})$, 这些解决定了基态的路径积分. 到达 H_{k-1} 或 H_{11-k} 时波函数开始振荡, 表示基态的经典洛伦兹轨道. $k=2,3,\cdots,9$ 时可能存在轨道, 这意味着可能得到 $2,3,\cdots,9$ 维的宏观时空, 考虑维度, 我们希望最可能的宇宙演化是 $k=4$, 事实确实如此.

为了得到最可能的演化, 我们必须找到瞬子解. 现在我们寻找拓扑空间 $S_k \times S_{11-k}$ 的瞬子. 如果 $k=1,2,3$, 我们有 $F_{mnqp}=0$, 由方程 (7.4.20) 得到

$$F^{\mu\nu\rho\sigma}_{;\sigma}=0, \tag{7.4.21}$$

或者

$$d^*F=0. \tag{7.4.22}$$

考虑到 F 是势 A 的度规场, 所以 F 必定是空间 S_{11-k} 中的四维形式. 由于 $H^4(S_{11-k})$ 是零维的, 我们得到

$$F_{\mu\nu\rho\sigma}=0. \tag{7.4.23}$$

当 $k=5$ 时, $H^4(S_5)$ 为零事实和方程 (7.4.20) 决定了 F_{mnpq} 的分量为零. 用同样的方法, 可得 (7.4.23). 值得注意的是, 在 S_5 北极的正则条件是很重要的, 如果缺少这个条件, S_5 的非紧致部分将有一个非零的 F_{mnpq}.

显然, 所有这些讨论也适用于 $k=6,8,9,10$ 的情况. 但是我们可以得出结论: 只有 $S_4\times S_7$ 的情况才能得到瞬子解.

由于 $H^4(S_4)=1$, 所以对于 $S_4\times S_7$, F_{mnpq} 必须采用下面的形式:

$$F_{mnpq}=f\eta_{mnpq}, \quad f=\text{const}. \tag{7.4.24}$$

如果令

$$F_{\mu\nu\rho\sigma}=0, \tag{7.4.25}$$

则由爱因斯坦方程可知, 洛伦兹部分必须是一个 Freund-Rubin 空间, 此空间是反 de Sitter 空间, 圆的 S_7 空间, $[\mathrm{SO}(3,2)/\mathrm{SO}(3,1)]\times \mathrm{SO}(8)/\mathrm{SO}(7)$ 空间, 或者是一个 Duff-Pope 空间. 前面的解给出了一个具有 SO(8) 不变性和 $N=8$ 超对称性的四维模型, 而后面的解只给出了 SO(5)×SO(2) 不变性和 $N=1.0$ 超对称性. 外部和内部空间的有效引力常数分别为 $-4f^2/3$ 和 $2f^2/3$. 瞬子的度规符号为 $(----+++++++)$.

如果 $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ 不为零, 则有

$$F_{\mu\nu\rho\sigma}=\frac{4}{f}S_{[\mu\nu\rho,\sigma]}. \tag{7.4.26}$$

对于 S_7, 如果 $S_{\mu\nu\rho}$ 是满足

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma^{\pi}_{\tau\omega}+S^{\pi}_{\tau\omega})=0 \tag{7.4.27}$$

的全反对称张量 $S_{\pm\mu\nu\rho}$ 中的一个, 则条件 (7.4.26) 可解出场方程 (7.4.20) 的 S_7 部分

$$F^{\mu\nu\rho\sigma}_{;\mu}=\frac{\sqrt{2}}{4!}f\eta^{\nu\rho\sigma\pi\tau\omega\delta}F_{\pi\tau\omega\delta}. \tag{7.4.28}$$

对于收缩的 S_7, $S_{\pm\mu\nu\rho}$ 使 S_7 变为 Ricci 平的,

$$R_{\mu\nu}(\Gamma^{\pi}_{\tau\omega}+S^{\pi}_{\tau\omega})=0. \tag{7.4.29}$$

形如式 (7.4.25) 和 (7.4.26) 的规范场导致了一个各向异性的宇宙常数 $(-5f^2/2, 3f^2/2)$, 这两个场均无超对称性.

我们可以证明, 所有式 (7.4.28) 的解都具有式 (7.4.26) 的形式. 对于式 (7.4.28) 的任意一个解, 定义

$$T_{\mu\nu\rho}=K\eta_{\mu\nu\rho\sigma\tau\pi\delta}F^{\sigma\tau\pi\delta}\quad (K=\text{const}). \tag{7.4.30}$$

具有扭量 $T_{\mu\nu\rho}$ 的 Ricci 张量满足

$$R_{\sigma\delta}(\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}+T^{\mu}_{\nu\rho})=R_{\sigma\delta}(\Gamma^{\mu}_{\nu\rho})-T_{\tau\sigma\omega}T^{\omega\tau}_{\delta}. \tag{7.4.31}$$

我们总可以选择适当的常数 K, 使 $R_{\sigma\delta}(\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}+T^{\mu}_{\nu\rho})=0$ 成立. 对于 Englert, Rooman, Spindel 的解, 我们有 $K=(1/\sqrt{2})4!$. 由式 (7.4.28) 和 (7.4.30) 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^*F(y)\ &\propto\ F(y),\\ T(y)\ &\propto^*\ F(y),\end{aligned} \tag{7.4.32}$$

由此可得

$$F(y)\ \propto\ \mathrm{d}T(y). \tag{7.4.33}$$

我们已经给出了所有已知的 $S_4\times S_7$ 的解. Freund-Rubin 解的重要意义在于通过假定的寄生规范场, 得出 S_7 是自发收缩的. 在量子宇宙学中, 只有瞬子解是重要的, 这是由理论本身决定的. 开始人们对引入 S_7 中规范场获得 Englert 解感到很惊奇. 现在人们意识到了, 所有的解都必须与 S_7 有关. 然而人们还不知道场方程的瞬子解是否已全部找到了.

总之, 本节指出了在 Hartle-Hawking 基态理论框架内, 瞬子解决定量子跃迁几率, 给出最可能的宇宙演化途径. 我们证明了, 在十一维超引力空间和小超空间 $S_k\times S_{11-k}$ 条件下, 瞬子解只能取 $S_4\times S_7$ 的形式. 对于真实的洛伦兹时空, 这意味着, 在十一维超引力空间中的自发收缩把我们的时空限制在四维或者七维, 并且只有一个时间坐标.

7.5 一个无奇点的宇宙解

在物理学中, 任何内禀奇异性都是令人厌恶的. 按照奇异性边界理论, 奇异性是一切非类空短程线不可延拓的边界. 宇宙奇点应表示宇宙化的起点或终点, 在那

里不存在任何因果联系, 或者说一切因果联系在那里均被割断了. 这在物理学中显然是难以接受的. 许殿彦和刘辽指出, 若考虑到早期宇宙物质场真空的量子单圈效应对经典爱因斯坦方程的修正, 宇宙奇点是可以避免的, 他们提出一个无奇点的振荡式反弹宇宙解.

含有奇点的弗里德曼度规, 对于 $K>0$, $K=0$ 和 $K<0$ 三种情况, 分别具有形式

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 =& a^2(\eta)(\mathrm{d}\eta^2-\mathrm{d}\chi^2-\sin^2\chi\mathrm{d}\theta^2-\sin^2\chi\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2),\\
\mathrm{d}s^2 =& a^2(\eta)(\mathrm{d}\eta^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2),\\
\mathrm{d}s^2 =& a^2(\eta)(\mathrm{d}\eta^2-\mathrm{d}\chi^2-\sin h^2\chi\mathrm{d}\theta^2-\sin h^2\chi\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2).
\end{aligned} \tag{7.5.1}$$

由此式可以得到 Ricci 张量的分量和标曲率

$$\begin{aligned}
R_1^1 =& R_2^2=R_3^3=-\frac{1}{a^4}(a\,\ddot{a}+\dot{a}^2+2a^2k),\\
R =& -\frac{6}{a^3}(\ddot{a}+a\theta),\quad C_{\mu\nu\lambda\tau}=0,
\end{aligned} \tag{7.5.2}$$

式中 $C_{\mu\nu\tau\lambda}$ 是外尔张量, $k=+1,0,-1$ 分别对应于 $K>0$, $K=0$ 和 $K<0$.

共形不变物质场的能量–动量张量 $T_{\mu\nu}$ 的真空平均值的反常迹为

$$T=\alpha\Box R+\beta\left(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}-\frac{1}{3}R^2\right)+\gamma C_{\mu\nu\lambda\tau}C^{\mu\nu\lambda\tau}, \tag{7.5.3}$$

式中 α,β,γ 为无量纲常数. 满足关系

$$3\alpha-\beta-2\gamma=0, \tag{7.5.4}$$

对于标量场、中微子场和电磁场依次为

$$\begin{matrix} & \alpha & \beta & \\ \dfrac{1}{2880\pi^2}\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. & \begin{matrix}1\\6\\12\end{matrix} & \begin{matrix}1,\\11,\\62,\end{matrix} & \begin{matrix}\text{标量场},\\\text{中微子场},\\\text{电磁场}.\end{matrix}\end{matrix} \tag{7.5.5}$$

将式 (7.5.2) 代入式 (7.5.3), 可得 Friedmann 时空的反常迹

$$\begin{aligned}
T=&-\frac{6\alpha}{a^6}\left[aa^{(4)}-4\dot{a}a^{(3)}+\frac{6}{a}\dot{a}^2\,\ddot{a}-3\,\ddot{a}^2+(2\dot{a}^2-2a\,\ddot{a})k\right]\\
&-\frac{12\beta}{a^6}\left[\frac{1}{a}\dot{a}^2\,\ddot{a}-\frac{1}{a^2}\dot{a}^4+(\dot{a}^2-a\,\ddot{a})k\right].
\end{aligned} \tag{7.5.6}$$

设宇宙中充满着共形不变的辐射场, 对于辐射场能量密度 $\rho_r = \bar{\rho}_r/a^4$, 其中 $\tilde{\rho}_r$ 是一个常数. 辐射场的作用量为

$$-\int \rho_r\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = -\int(\bar{\rho}_r a^{-4})\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = -V\int \bar{\rho}_r\mathrm{d}\eta. \tag{7.5.7}$$

对于 $K>0$ 的 Friedmann 时空,

$$V = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\chi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\sin\theta\sin^2\chi = 2\pi^2. \tag{7.5.8}$$

总的经典作用量为

$$\begin{aligned}I_0 =&\frac{1}{l^2}\int R\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x - \int\rho_r\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = \\ &-V\int\mathrm{d}\eta\left[\frac{6}{l^2}(\dot{a}^2 - a^2k) + \bar{\rho}_r\right],\end{aligned} \tag{7.5.9}$$

式中 l 是普朗克长度, $l = \left(\dfrac{16\pi\hbar G}{C^3}\right)^{1/2} = 1.2\times10^{-32}\text{cm}.$

考虑了单圈项的贡献以后, 总的有效作用量可表示为

$$I(g) = I_0(g) + \Gamma_1(g), \tag{7.5.10}$$

式中 $I_1(g)$ 为单圈项对作用量的贡献, 它与反常迹的关系可以表示为

$$T = \frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta\Gamma_1}{\delta g_{\mu\nu}}. \tag{7.5.11}$$

由式 (7.5.6) 和式 (7.5.11), 可以解出 I_1

$$\begin{aligned}I_1(a) =&V\int\mathrm{d}\eta\left[-3\alpha\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2\right.\\ &\left.-6\alpha\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2k + \beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 - 6\beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2k\right].\end{aligned} \tag{7.5.12}$$

把式 (7.5.9) 和式 (7.5.12) 代入式 (7.5.10), 得到

$$\begin{aligned}I(a) =&V\int\mathrm{d}\eta\left[-\frac{6}{l^2}(\dot{a}^2 - a^2k) - \bar{\rho}_r - 3\alpha\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2\right.\\ &\left.-6\alpha\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2k + \beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 - 6\beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2k\right].\end{aligned} \tag{7.5.13}$$

在 CGS 单位制中 $\bar{\rho}_r$ 应改写为 $\dfrac{1}{c\hbar}\bar{\rho}_r, I(a)$ 是一个无量纲的量.

令

$$a = lb, \tag{7.5.14}$$

l 是普朗克长度, b 是一个无量纲的实参数, 则式 (7.5.13) 可以改写为

$$I(b) = V\int \mathrm{d}\eta \mathscr{L}(b, \dot{b}, \ddot{b}), \tag{7.5.15}$$

式中

$$\dot{b} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\eta}, \quad \ddot{b} = \frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}\eta^2},$$

等等,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(b, \dot{b}, \ddot{b}) = &-6(\dot{b}^2 - b_\varepsilon^2) - \bar{\rho}_r \\ &- 3\alpha\left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)^2 - 6\alpha\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 k \\ &+ \beta\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^4 - 6\beta\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 k.\end{aligned} \tag{7.5.16}$$

经典几何应满足

$$\frac{\delta I}{\delta b} = 0. \tag{7.5.17}$$

由于 $\mathscr{L}(b, \dot{b}, \ddot{b})$ 和 η 无关, 一次积分后可得

$$E = -\dot{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{b}}\right) + \ddot{b}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{b}} + \dot{b}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{b}} - \mathscr{L}, \tag{7.5.18}$$

E 是积分常数. 将式 (7.5.16) 代入式 (7.5.18) 可得

$$\begin{aligned}E = &-6\dot{b}^2 - 6b^2 k + \bar{\rho}_r + 6\alpha\frac{\dot{b}b^{(3)}}{b^2} - 12\alpha\frac{\dot{b}^2\ddot{b}}{b^3} \\ &- 3\alpha\left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)^2 - 6\alpha\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 k + 3\beta\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^4 - 6\beta\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 k.\end{aligned} \tag{7.5.19}$$

这是一个单圈量子修正后的爱因斯坦引力场方程. 下面讨论此方程在 $\varepsilon = +1$ 情况下的解.

在所考虑的情况下, 经典弗里德曼宇宙由奇点膨胀, 到某一极大线度后又收缩, 直至奇点. 下面讨论式 (7.5.19) 的一个具有极小尺度 (无奇点) 的解的存在问题. 极小尺度 (或称反弹点) 的边界条件可写为

$$b(0) = b_0 > 0, \quad \dot{b}(0) = 0, \quad \ddot{b}(0) > 0, \tag{7.5.20a}$$

式中 b_0 表示宇宙的极小 (最小) 尺度.

在 b_0 附近, 可将 $b(\eta)$ 展开为

$$b(\eta) = b_0 + \dot{b}(0)\eta + \frac{1}{2}\ddot{b}(0)\eta^2 + \frac{1}{3!}b^{(3)}(0)\eta^3 + \cdots.$$

假设宇宙关于时间是对称的, 则有

$$b^{(3)}(0) = 0. \tag{7.5.20b}$$

极大尺度对应的边界条件可以表示为

$$b(\eta_m) = b_m, \quad \dot{b}(\eta_m) = 0, \quad \ddot{b}(\eta_m) < 0. \tag{7.5.21}$$

此时量子单圈效应可以不考虑, 式 (7.5.19) 简化为

$$E - \bar{\rho}_r = -6\dot{b}^2 - 6b^2 k. \tag{7.5.22}$$

将式 (7.5.22) 与经典弗里德曼时空的爱因斯坦引力场方程比较, 可得 $E = 0$. 显然, 当宇宙尺度较大或极大时, 即当 η 很大时, 式 (7.5.19) 的解趋近于经典弗里德曼度规.

由式 (7.5.20), 可将爱因斯坦引力场方程 (7.5.19) 简化为

$$3\alpha\left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)^2 + 6b^2 k - \bar{\rho}_r = 0. \tag{7.5.23}$$

当 $k = +1$ 时, 式 (7.5.23) 化为

$$3\alpha\,\ddot{b}^2 - \bar{\rho}_r b^2 + 6b^4 = 0. \tag{7.5.24}$$

进一步取近似, 得到

$$\ddot{b} - \left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/2} b\left(1 - \frac{3b^2}{\bar{\rho}_r}\right) = 0. \tag{7.5.25}$$

此方程的近似解为

$$b = b_0\cosh(p + \eta), \tag{7.5.26}$$

式中

$$p_+ = \left(\frac{\rho_r}{3\alpha}\right)^{1/4}\left(1 - \frac{3b_0^2}{\bar{\rho}_r}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.5.27}$$

当 $k = 0$ 时, 方程 (7.5.23) 具有形式

$$\ddot{b} - \left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/2} b = 0, \tag{7.5.28}$$

解之, 得

$$b = b_0 \cosh(p_0\eta), \tag{7.5.29}$$

式中

$$p_0 = \left(\frac{\bar{\rho}r}{3\alpha}\right)^{1/4}. \tag{7.5.30}$$

在 CGS 单位制中, $p_0 = \left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha c\hbar}\right)^{1/4}$. 由 $\eta = 0, b$ 为极小值知: b_0 不能为负, 更不能为零, 因而只能大于零. 这就避免了当 $\eta = 0$ 时的奇点解.

当 $k < 0$ 时, 方程 (7.5.23) 具有形式

$$3\alpha\ddot{b} - \bar{\rho}_r b^2 - 6b^4 = c. \tag{7.5.31}$$

进一步取近似, 式 (7.5.31) 变为

$$\ddot{b} - \left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/2} b\left(1 + \frac{3b^2}{\bar{\rho}_r}\right) = 0. \tag{7.5.32}$$

式 (7.5.32) 的近似解为

$$b = b_0 \cosh(p - \eta), \tag{7.5.33}$$

式中

$$p = \left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/4}\left(1 + \frac{3b_0^2}{\bar{\rho}_r}\right)^{1/2}. \tag{7.5.34}$$

由上面的讨论可知, 当计入单圈量子修正以后, 可以避免宇宙的奇点.

7.6 宇宙的拓扑结构

关于普朗克时期宇宙的时空拓扑结构问题, 已有诸多学者进行了有意义的探讨. 似乎在这一宇宙演化的极早期形成单连通宇宙和多连通宇宙的可能性都存在.

宇宙基态由哈特 - 霍金波函数描述:

$$\psi(h_{ij}) = N\int_c \mathrm{d}[g_{\mu\nu}]\exp(-\bar{I}[g_{\mu\nu}]). \tag{7.6.1}$$

我们取普朗克时期宇宙时空拓扑结构为

$$R^1 \otimes S^d \otimes T^D, \tag{7.6.2}$$

式中 R^1 表示时间维, S^d 表示 d 维球, T^D 表示 D 维环, 此时度规为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\mathrm{d}\Omega_d^2 + b^2(t)\mathrm{d}\Omega_D^2. \tag{7.6.3}$$

由式 (7.6.3) 经计算可得作用量为

$$I=-\int \mathrm{d}ta^d b^D\left[\frac{\mathrm{d}(d-1)\dot{a}^2}{a^2}+\frac{2D\mathrm{d}\dot{a}\dot{b}}{a^b}\right.$$
$$\left.+\frac{D(D-1)\dot{b}^2}{b^2}-\frac{2\mathrm{d}k_d}{a^2}-\frac{2Dk_D}{b^2}+2\Lambda\right], \tag{7.6.4}$$

此处 k_d 是 S^d 子空间的曲率常数, k_D 是 T^D 子空间的曲率常数.

令 $t=\mathrm{i}\tau$. 对于三维环 $S^3, d=3, D=0$, 我们可求得波函数为

$$\psi(a)\approx N_1\exp\left[\frac{1}{\Lambda}\left(1-\left(1-\frac{\Lambda a^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right],\quad a<\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \tag{7.6.5}$$

$$\psi(a)\approx N_1'\exp\left(\frac{1}{\Lambda}\right)\cos\left(\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\Lambda a^2}{3}-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right),\quad a>\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}. \tag{7.6.6}$$

对于三维球 $T^3, d=0, D=3$, 且 $k_D=0$(考虑到环空间上覆盖不重叠), 我们有波函数

$$\psi(b)\approx N_2 b^{\frac{1}{2}} Z_{\frac{1}{6}}\left[\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}b^3\right], \tag{7.6.7}$$

这里 $Z_{\frac{1}{6}}$ 为柱函数.

我们又知道 a, b 的经典解分别为

$$a=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t, \tag{7.6.8}$$

$$b=A_0\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}, \tag{7.6.9}$$

A_0 为常数.

又因为在普朗克时期, 因此

$$t\sim 10^{-44}(\mathrm{s}), \text{而} \Lambda\sim 10^{66}(\mathrm{cm}^{-2}).$$

把式 (7.6.8) 和 (7.6.9) 分别代入式 (7.6.5)~(7.6.7), 展开, 得到

$$\psi(a)\approx N_1\left(1+\frac{3}{2}\Lambda^{-1}\right),\quad a<\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \tag{7.6.10}$$

$$\psi(a)\approx \frac{N_1'}{\sqrt{2}}(1+\Lambda^{-1}),\quad a>\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \tag{7.6.11}$$

$$\psi(b)\approx N_2\left[c_0+c_1\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right], \tag{7.6.12}$$

此处 c_0, c_1 为常数. 在本文中为讨论简单起见, 我们不妨取 c_0, c_1 为同级常数.

(1) 当 $a < \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ 时.

若 $|c_0| \ll 1$, 且 $|N_2 c_0| \ll |N_1|$, 则波函数 $\psi(b)$ 只有很低的峰, 相比之下 $\psi(a)$ 显得有很高的峰, 且此时有

$$|\psi(b)|^2 \ll |\psi(a)|^2. \tag{7.6.13}$$

若 $|c_0| \gg 1$, 且 $|N_0 c_0| \gg |N_1|$, 则波函数 $\psi(b)$ 有很高的峰, 且此时有

$$|\psi(b)|^2 \gg |\psi(a)|^2. \tag{7.6.14}$$

若 $|N_2 c_0| = |N_1|$, 则此时有

$$|\psi(b)|^2 \approx |\psi(a)|^2. \tag{7.6.15}$$

(2) 当 $a > \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ 时.

若 $|c_0| \ll 1$, 且 $|N_2 c_0| \ll \left|\frac{N_1'}{\sqrt{2}}\right|$, 则波函数 $\psi(b)$ 只有很低的峰, 相比之下 $\psi(a)$ 显得有很高的峰, 且此时有

$$|\psi(b)|^2 \ll |\psi(a)|^2. \tag{7.6.16}$$

若 $|c_0| \gg 1$, 且 $|N_2 c_0| \gg \left|\frac{N_1'}{\sqrt{2}}\right|$, 则波函数 $\psi(b)$ 有很高的峰, 且此时有

$$|\psi(b)|^2 \gg |\psi(a)|^2. \tag{7.6.17}$$

若 $|N_2 c_0| = |N_1|$, 则此时有

$$|\psi(b)|^2 \approx |\psi(a)|^2. \tag{7.6.18}$$

根据波函数的几率解释, 由 (1) 和 (2) 得到在宇宙普朗克时期, 产生球拓扑与环拓扑几率都存在的结论, 从而在理论上说明了形成单连通宇宙与形成多连通宇宙可能性都存在. 在标准宇宙模型中通常假定时空是单连通的, 不过, 这个假定没有理论上或观测上的根据. 宇宙学原理并不要求时空是单连通的, 爱因斯坦方程也不要求时空是单连通的, 观测上也并不表明时空一定是单连通的.

7.7 时空泡沫结构和虫洞

惠勒曾经指出, 在普朗克尺度附近, 由于物质场的量子涨落, 将使得时空在小尺度上具有多连通的泡沫结构. 刘辽提出, 时空的泡沫结构在 QED 中产生新的顶角恰好可以抵消 QED 中三种最低阶的原始发散.

设母宇宙中原来的拉氏量为 $\mathscr{L}_M(\phi)$, 当出现虫洞和半虫洞以及子宇宙时, 应代之以有效拉氏量

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}(\phi) = \mathscr{L}_M(\phi) + \sum_i \mathscr{L}_i(\phi)(a_i^+ + a_i), \tag{7.7.1}$$

式中 a_i 和 a_i^+ 分别为第 i 个虫洞、半虫洞和子宇宙的湮灭算符和产生算符, $\mathscr{L}_i(\phi)$ 是虫洞与场 ϕ 相互作用的拉格朗日, 对所有可能出现的虫洞、半虫洞和子宇宙求和.

不难看出, 当半虫洞和子宇宙不存在时, 式 (7.7.1) 仍然成立. 这时它表示 M 中任意多的虫洞对拉格朗日的贡献. 也可以认为, 这就是由虫洞组成的时空泡沫结构对场的影响.

容易发现,

$$[(a^+ + a), a^+a] \neq 0, \tag{7.7.2}$$

这表示算符 $Q = a^+ + a$ 和粒子数算符 $N = a^+a$ 不可能有共同的本征态, 设

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \tag{7.7.3}$$

则有

$$Q|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle + \sqrt{n}|n-1\rangle. \tag{7.7.4}$$

对于大 n, 我们有

$$Q|n\rangle \approx 2\sqrt{n}|n\rangle, \tag{7.7.5}$$

这表明, 仅当虫洞足够多时, 算符 Q 才在其福克空间中近似具有本征态, 本征值为发散量 $2\sqrt{n}$. 于是得到

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}(\phi) = \mathscr{L}_M(\phi) + \sum \mathscr{L}_{i}(\phi) \cdot 2\sqrt{n}. \tag{7.7.6}$$

设虫洞种类仅一种, 或

$$\mathscr{L}_i(\phi) = \mathscr{L}_I(\phi) \quad \forall_i,$$

并认为时空泡沫中, 微虫洞的 4 体积为 L_{P}^4(L_{P} 即普朗克长度), 则单位 4 体积中微虫洞的数目约为

$$\frac{1(\text{cm}^4)}{L_{\text{P}}^4(\text{cm}^4)} \equiv \delta. \tag{7.7.7}$$

最后有

$$\sum_i \mathscr{L}_i(\phi)(a_i^+ + a_i) = \alpha \mathscr{L}_I(\phi), \tag{7.7.8}$$

式中 $\alpha \equiv 2\sqrt{n} \cdot \delta$ 为无量纲量.

式 (7.7.6) 可以改写为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}(\phi) = \mathscr{L}_M(\phi) + \alpha \mathscr{L}_I(\phi), \tag{7.7.9}$$

式中 $\mathscr{L}_I(\phi)$ 是 ϕ 场与一个虫洞的相互作用拉格朗日量, α 是一个无量纲的发散量.

下面我们确定 QED 中 $\mathscr{L}_I(\phi)$ 的具体形式. 设 M 为平直流形.

由于虫洞的出现只是一种时空流形的拓扑分岔, 在母流形中并未出现新的物质场. 所以它对母流形中场论的影响应只表现为出现各种新的自作用项 (或顶角), 已知 QED 中的费恩曼图由三种基本元素组成, 即如图 7-1 所示.

电子线——, 光子线-----和顶角

图 7-1

因而由虫洞 (泡沫结构) 诱生新的自作用顶角只能是如图 7-2 所示:

k ----- k' $\mathscr{L}_I(r)$ p —— p' $\mathscr{L}_I(e)$ 和 p', p ---- k $\mathscr{L}_I(v)$

图 7-2

否则, 我们所观测到的电动力学就不是 Maxwell-Lorentz 电动力学. 由洛伦兹协变性要求及量纲要求, 可唯一确定最低阶的 $\mathscr{L}_I$(QED) 应为下述新的顶角项的线性组合:

$$\mathscr{L}_I(\gamma) = \beta_\gamma\left(-\frac{1}{4}F_{\text{ab}}F_{ab}\right), \quad [\beta_\gamma] = M^0, \tag{7.7.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_I(\text{e}) =& \beta_\text{e}[-\bar{\Psi}(\gamma_a\partial_a + m')\Psi] \\
=& \beta_\text{e}[-\bar{\Psi}(\gamma_a\partial_a + m)\Psi] + \beta_\text{e}\delta_m\bar{\Psi}\Psi, \\
\delta_m \equiv& m - m', \quad [\delta_m] = M^1,
\end{aligned} \tag{7.7.11}$$

式中 m' 为任一量纲为 M^1 的实常数, m 为电子静质量.

$$\mathscr{L}_I(v) = \beta_v(\text{ie}\bar{\Psi}\gamma_a\Psi A_a), \quad [\beta_v] = M^0. \tag{7.7.12}$$

上述公式中的 $\beta_\gamma, \beta_\text{e}, \beta_v$ 和 m' 均系由虫洞或泡沫所诱生的不可观测的实耦合常数, 它们对式 (7.7.9) 右边第二项的贡献为出现下述新顶角:

$$\alpha\mathscr{L}_I(\gamma) \equiv 2C_0\left[-\frac{1}{4}F_{ab}F_{ab}\right], \quad 2C_0 = \alpha\beta_\gamma,$$

$$\alpha \mathscr{L}_I(\mathrm{e}) \equiv J_1[-\bar{\Psi}(\gamma_a \partial_a + m)\Psi] + J_0 \bar{\Psi}\Psi, \tag{7.7.13}$$

$$J_1 \equiv \alpha\beta_{\mathrm{e}}, \quad J_0 \equiv \alpha\beta_{\mathrm{e}}\delta_m,$$

$$\alpha \mathscr{L}_I(v) \equiv \mathrm{i}\mathrm{e}\Lambda \bar{\Psi}\gamma_a \Psi A_a, \quad \Lambda = \alpha\beta_v, \tag{7.7.14}$$

而

$$\alpha \mathscr{L}_I(\mathrm{QED}) = \alpha(\mathscr{L}_I(\gamma) + \mathscr{L}_I(\mathrm{e}) + \mathscr{L}_I(v)), \tag{7.7.15}$$

式中 C_0, J_0, J_1 和 Λ 乃 QED 的背景对空中的泡沫结构所诱生的新顶角中的 4 个不可观测的发散实耦合常数.

在动量表象中, 上述新顶角的贡献分别为

$$+C_0(2\pi)^4\delta(k-k')(k^2\delta_{ab} - k_a k_b), \tag{7.7.16}$$

$$-J_1(2\pi)^4\delta(p-p')(\mathrm{i}\hat{p}+m) - J_0(2\pi)^4\delta(p-p'), \tag{7.7.17}$$

$$+e\Lambda(2\pi)^4\gamma_a\delta(p-p'-k). \tag{7.7.18}$$

注意到 QED 中三种最低阶的原始发散项为

$$-C_0(2\pi)^4\delta(k-k')(k^2\delta_{ab} - k_a k_b), \tag{7.7.19}$$

$$+J_1(2\pi)^4\delta(p-p')(\mathrm{i}\hat{p}+m) + J_0(2\pi)^4\delta(p-p'), \tag{7.7.20}$$

$$-e\Lambda(2\pi)^4\gamma_a\delta(p-p'-k). \tag{7.7.21}$$

不难发现, 若令式 (7.7.16)~(7.7.18) 中的不可观测的发散量 C_0, J_1, J_0 和 Λ 分别是式 (7.7.19)~(7.7.21) 中对应的发散积分, 则 QED 中三种最低阶的原始发散项恰好被新顶角抵消.

7.8　一个闭合宇宙模型

本节讨论在 Brans-Dicke 理论框架中的一个宇宙解. 共形不变标量场真空涨落的有效作用量可以写为

$$\begin{aligned} I_v^{\mathrm{eff}} = & V\int \mathrm{d}\eta \left[3\alpha\left(\frac{\ddot{a}}{2}\right)^2 + 6\alpha\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right. \\ & \left. + \beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 + 6\beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{7.8.1}$$

式中 a 为 R-W 度规中的标度因子, $\alpha = -\beta$, 圆点表示对共形时间求导数. 度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)[\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\chi^2 - \sin^2\chi \mathrm{d}\Omega_2^2], \tag{7.8.2}$$

无宇宙项的 B-D 作用量为

$$I_{\mathrm{BD}}=\int(R_{\varphi}-\omega\varphi^{-1}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu})\sqrt{-g}\mathrm{d}^4\chi, \tag{7.8.3}$$

于是可以得到真空涨落的半经典 B-D 有效作用量的表示式

$$\begin{aligned}I^{\mathrm{eff}}=&I_V^{\mathrm{eff}}+I_{\mathrm{BD}}=V\int\mathrm{d}\eta[6a(\ddot{a}+a)\varphi-\omega\varphi^{-1}a^2\dot{\varphi}^2\\&+3\alpha(\ddot{a}/a)^2-\alpha(\dot{a}/a)^4],\end{aligned} \tag{7.8.4}$$

式中

$$V=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\chi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\sin^2\chi\sin\theta=2\pi^2. \tag{7.8.5}$$

由式 (7.8.5) 可写出半经典 Brans-Dicke 理论的有效拉氏量为

$$L=6a(\ddot{a}+a)\varphi-\omega\varphi^{-1}a^2\dot{\varphi}^2+3\alpha\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2-\alpha\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4. \tag{7.8.6}$$

由于 a,φ 仅是共形时间 η 的函数, 对 a 的拉氏方程为

$$\frac{\partial L}{\partial a}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial L}{\partial\dot{a}}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot{a}}=0, \tag{7.8.7}$$

对 φ 的拉氏方程为

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=0. \tag{7.8.8}$$

将式 (7.8.5) 代入式 (7.8.6) 和 (7.8.7), 可分别得 $a-$ 方程

$$\begin{aligned}&\alpha\varphi a^3\ddot{a}-4\alpha\varphi a^2\ddot{a}\dot{a}+8\alpha\varphi a\,\ddot{a}\dot{a}^2-3\alpha\varphi a^2\ddot{a}^2-2\alpha\varphi\dot{a}^4\\&-2a^5\varphi^2\ddot{a}+a^6\varphi\,\ddot{\varphi}+2a^5\varphi\dot{a}\dot{\varphi}-\frac{1}{3}\omega a^6\dot{\varphi}^2+2a^6\varphi^2=0\end{aligned} \tag{7.8.9}$$

和 $\varphi-$ 方程

$$\omega a\varphi\,\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}\omega a\dot{\varphi}^2+2\omega\varphi\dot{a}\dot{\varphi}+3\varphi^2\ddot{a}+3a\varphi^2=0.$$

它们分别是四阶和二阶非线性常微分方程, 求解是很困难的, 为此对拉氏量 L 进行如下变换, 令

$$\xi=a\tau,\quad \tau=\varphi^{\frac{1}{2}}, \tag{7.8.10}$$

则有

$$\begin{aligned}L=&6\xi^2+6\xi^2\frac{\ddot{\xi}}{\xi}-12\xi^2\left[\left(\frac{\dot{\xi}}{\xi}\right)\left(\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)-\left(\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\ddot{\tau}}{\tau}\right]\\&-4\omega\xi^2\left(\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)^2-3\alpha\left[\frac{\ddot{\xi}}{\xi}-2\frac{\dot{\xi}}{\xi}\frac{\dot{\tau}}{\tau}+2\left(\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)^2-\frac{\ddot{\tau}}{\tau}\right]\end{aligned}$$

$$-\alpha\left(\frac{\dot{\xi}}{\xi}-\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)^4, \tag{7.8.11}$$

再令

$$u=\ln|\xi|, v=\ln|\tau|, \tag{7.8.12}$$

则得

$$\begin{aligned}L=&6\mathrm{e}^{2u}+3(2\mathrm{e}^{2\mu}-\alpha)(\ddot{u}+\dot{u}^2-2\dot{u}\dot{v}-\ddot{v})\\&+3(2\rho^2\mathrm{e}^{2u}-\alpha)\dot{v}^2-\alpha(\dot{u}-\dot{v})^4,\end{aligned} \tag{7.8.13}$$

式中

$$\rho^2=\frac{3-2\omega}{3}. \tag{7.8.14}$$

由拉氏量 (7.8.13) 可得 $u-$ 方程

$$\begin{aligned}&12\mathrm{e}^{2u}+(12\mathrm{e}^{2u}+6\alpha)\ddot{u}+12\mathrm{e}^{2u}\dot{u}^2+6\alpha\ddot{v}\\&+12\mathrm{e}^{2u}\rho^2\dot{v}^2+12\alpha(\dot{u}-\dot{v})^2(\ddot{u}-\ddot{v})=0\end{aligned} \tag{7.8.15}$$

和 $v-$ 方程

$$\begin{aligned}&6(2\rho^2\mathrm{e}^{2u}-\alpha)\ddot{v}+6\alpha\ \ddot{u}+12\alpha(\dot{u}-\dot{v})^2(\ddot{u}-\ddot{v})\\&+24\rho^2\mathrm{e}^{2u}\dot{u}-\dot{v}=0.\end{aligned} \tag{7.8.16}$$

它们都是二阶非线性微分方程. 下面讨论 a 值小时的宇宙解.

a 取小值意味着 u 取大的负值, 即 $\mathrm{e}^{2u}\approx 0$, 于是方程组 (7.8.15) 和 (7.8.16) 分别简化为

$$[1+2(\dot{u}-\dot{v})^2]\ddot{u}+[1-2(\dot{u}-\dot{v})^2]\ddot{v}=0; \tag{7.8.17}$$

$$[1+2(\dot{u}-\dot{v})^2]\ddot{u}-[1-(\dot{u}-\dot{v})^2]\ddot{v}=0. \tag{7.8.18}$$

两式相加、相减后分别得

$$\ddot{u}=0\quad \text{或}\quad 1+2(\dot{u}-\dot{v})^2=0, \tag{7.8.19}$$

$$\ddot{v}=0\quad \text{或}\quad 1-2(\dot{u}-\dot{v})^2=0. \tag{7.8.20}$$

此方程组的合理通解为

$$u=A+B\eta,\quad v=C+D\eta. \tag{7.8.21}$$

于是

$$\xi=\mathrm{e}^{A+B\eta},\quad \tau=\mathrm{e}^{C+D\eta}.$$

由此可得

$$a = \frac{\xi}{\tau} = e^{(A-C)+(B-D)\eta} = e^{d+b\eta}, \tag{7.8.22}$$

式中

$$d = A - C, \quad b = B - D.$$

由于

$$a(\eta)d\eta = dt, \tag{7.8.23}$$

将式 (7.8.22) 代入式 (7.8.23) 积分得

$$a(t) = b(t+E), \tag{7.8.24}$$

$$\eta = \frac{1}{b}\{\ln[b(t+E)] - d\}, \tag{7.8.25}$$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp\left\{2C + \frac{2D}{b}[\ln b(t+E) - d]\right\}\\ &= \exp\left(2C - \frac{2Dd}{b} + \frac{2D}{b}\ln a\right) = Ha^{\frac{2D}{b}},\\ H &= \exp\left(2C - \frac{2Dd}{b}\right).\end{aligned} \tag{7.8.26}$$

这里所得到的半经典 B-D 解与半经典爱因斯坦解不同, 它描述一个自奇点开始膨胀的闭宇宙.

7.9 一个具有耦合标量场的模型

熟知, $k = 1$ 的 Robertson-Walker 度规为

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2, \tag{7.9.1}$$

式中 $a(t)$ 是宇宙的标度因子, c 为光速, 而

$$d\Omega_3^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{7.9.2}$$

由式 (7.9.1) 和 (7.9.2) 求得时空的曲率标量为

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{c^4 a} + \frac{\dot{a}}{c^4 a^2} + \frac{1}{a^2}\right), \tag{7.9.3}$$

这里

$$\dot{a} = \frac{da}{dt}, \quad \ddot{a} = \frac{d^2a}{dt^2}. \tag{7.9.4}$$

令

$$d\tau = \frac{dt}{i}, \tag{7.9.5}$$

则式 (7.9.3) 为

$$R = 6\left(-\frac{\ddot{a}}{c^4 a} - \frac{\dot{a}^2}{c^4 a^2} - \frac{1}{a^2}\right), \tag{7.9.6}$$

这里

$$\dot{a} = \frac{da}{d\tau}, \quad \ddot{a} = \frac{d^2 a}{d\tau^2}. \tag{7.9.7}$$

我们选取如下作用量:

$$\begin{aligned} I =& \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \\ &+ \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{6}R\phi^2\right), \end{aligned} \tag{7.9.8}$$

式中 c 是光速, G 是引力常数, R 是曲率标量, $\phi^2 = \phi_k\phi_k = \sum_{j=1}^{8N+1}\phi_j^2, \phi_j$ 为标量场, Λ 为宇宙常数.

令

$$d\eta = \frac{dt}{a}, \quad x_j = a\phi_j, \quad j = 1, 2, \cdots, 8N+1. \tag{7.9.9}$$

为简单起见, 令 $\Lambda = 0$. 此时欧氏作用量为

$$\bar{I} = \pi^2\alpha^2 c^2 \int d\eta\left(-\frac{a'^2}{c^4} - a^2 + \frac{1}{\alpha^2 c^4}\sum_{j=1}^{8N+1} x_j'^2 + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{j=1}^{8N+1} x_j^2\right), \tag{7.9.10}$$

式中 $\alpha^2 = \frac{3c^3}{4\pi G}, a' = \frac{da}{d\eta}, x_j' = \frac{dx_j}{d\eta}$.

由式 (7.9.10) 求得与 a, x_j 共轭的动量为

$$\begin{aligned} P_a =& -\frac{2\pi^2\alpha^2}{c^4}a', \\ P_{x_j} =& \frac{2\pi^2}{c^2}x_j', \quad j = 1, 2, \cdots, 8N+1. \end{aligned} \tag{7.9.11}$$

由式 (7.9.10) 和 (7.9.11) 两式得体系的哈密顿为

$$H = -\frac{c^2}{4\pi^2\alpha^2}P_a^2 + \pi^2\alpha^2c^2a^2 + \frac{c^2}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{8N+1} P_{x_j}^2 - \pi^2c^2\sum_{j=1}^{8N+1} x_j^2. \tag{7.9.12}$$

在量子引力理论中, 对应于薛定谔方程的是 Wheeler-De Witt 方程

$$\left[-G_{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{kl}} + h^{\frac{1}{2}}(-{}^3R(h) + 2\Lambda\right.$$

$$+ 8\pi T_{nn}\left(i\frac{\delta}{\delta\phi}, \phi\right)\Bigg]\psi(h_{ij}, \phi) = 0, \tag{7.9.13}$$

式中 ${}^3R(h)$ 为三维面的标量曲率, T_{nn} 为能量密度算符, G_{ijkl}(超空间的度规) 由所有 h_{ij} 构成

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}h^{\frac{1}{2}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{ik} - h_{ij}h_{kl}).$$

由式 (7.9.12), 通过正则量子化, 可得宇宙波函数 $\psi(a, x_1, x_2, \cdots, x_{8N+1})$ 所满足的 Wheeler-De Witt 方程

$$\left(\frac{\hbar^2}{4\pi^4\alpha^2}\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial_a}a^p\frac{\partial}{\partial a} - \alpha^2a^2 - \frac{\hbar^2}{4\pi^4}\sum_{j=1}^{8N+1}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^{8N+1}x_i^2\right)$$
$$\cdot\psi(a, x_1, x_2, \cdots, x_{8N+1}) = 0, \tag{7.9.14}$$

式中参数 p 代表量子引力中某些算符次序的模型, 它对以下讨论没有多大影响, 不失一般性可取 $p = 0$.

下面用分离变量法来求解方程 (7.9.14). 令

$$\psi(a, x_1, \cdots, x_{8N+1}) = u(a)V_1(x_1)\cdots V_{8N+1}(x_{8N+1}), \tag{7.9.15}$$

则式 (7.9.14) 化为

$$\frac{\hbar^2}{4\pi^2\alpha^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}a^2} + (\lambda - \alpha^2a^2)u = 0, \tag{7.9.16}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\hbar^2}{4\pi^4}\frac{\mathrm{d}^2V_1}{\mathrm{d}x_1^2} + (\lambda_1 - x_1^2)V_1 = 0,\\
&\frac{\hbar^2}{4\pi^4}\frac{\mathrm{d}^2V_2}{\mathrm{d}x_2^2} + (\lambda_2 - x_2^2)V_2 = 0,\\
&\cdots\\
&\frac{\hbar^2}{4\pi^4}\frac{\mathrm{d}^2V_{8N+1}}{\mathrm{d}x_{8N+1}^2} + (\lambda_{8N+1} - x_{8N+1}^2)V_{8N+1} = 0,
\end{aligned} \tag{7.9.17}$$

这里

$$\lambda = \sum_{j=1}^{8N+1}\lambda_j. \tag{7.9.18}$$

式 (7.9.17) 是标准的谐振子方程, 其解为

$$\lambda_j = \frac{\hbar}{2\pi^2}(2n_j + 1), \quad n_j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{7.9.19}$$

$$V_{j(n_j)}(x_j) = N'_{j(n_j)}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^h}{\hbar^2}x_j^2}H_{nj}\left[\sqrt{\frac{2\pi^2}{\hbar}}x_j\right], \quad j = 1, 2, \cdots, 8N+1, \tag{7.9.20}$$

式中 H_{nj} 是 Hermit 多项式. 令

$$\begin{aligned} n =& n_1 + n_2 + \cdots + n_{8N+1}, n_j = 0, 1, 2, \cdots, \\ j =& 1, 2, \cdots, 8N+1, \end{aligned} \tag{7.9.21}$$

于是式 (7.9.15) 可改为

$$\psi(a, x_1, \cdots, x_{8N+1}) = \sum_n u_n(a) V_{l(n_1)}(x_1) \cdots V_{8V+1(n_{8N+1})}(x_{8N+1}), \tag{7.9.22}$$

而

$$\lambda = \frac{\hbar}{2\pi^2}(2n + 8N + 1), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{7.9.23}$$

则 u_n 满足以下方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2} u_n + \left[\frac{2\pi^2\alpha^2}{\hbar}(2n + 8N + 1) - \frac{4\pi^4\alpha^4}{\hbar^2} a^2\right] u_n = 0. \tag{7.9.24}$$

令

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{P}} =& \sqrt{\frac{\hbar}{\alpha^2}} = \left(\frac{4\pi G\hbar}{3c^3}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ a^2 =& y, \quad u_n = R_n y^{-\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

则式 (7.9.24) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 R_n}{\mathrm{d}y^2} + \left[\frac{3}{16y^2} + \frac{\pi^2}{2l_{\mathrm{P}}^2}(2n + 8N + 1)\frac{1}{y} - \frac{\pi^4}{l_{\mathrm{P}}^2}\right] R_n = 0. \tag{7.9.25}$$

当 $y = a^2 \to \infty$ 时, 式 (7.9.25) 的渐近解为

$$R_n \approx \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2} y}, \tag{7.9.26}$$

则式 (7.9.25) 的解可写为

$$R_n = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2} y} f_n(y). \tag{7.9.27}$$

将式 (7.9.27) 代入式 (7.9.25) 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_n}{\mathrm{d}y^2} - \frac{2\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2}\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}_y} + \left[\frac{3}{16y^2} + \frac{\pi^2(2n + 8N + 1)}{2l_{\mathrm{P}}^2 y}\right] f_n = 0. \tag{7.9.28}$$

我们用幂级数方法求解式 (7.9.28), 设

$$f_n(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu y^{\nu+s}, \tag{7.9.29}$$

式中 $b_0 \neq 0$. 为了保证解在 $y = a^2 = 0$ 处有限, $s \geqslant \frac{1}{4}$, 将式 (7.9.29) 代入式 (7.9.28), 由 $y^{\nu+s-1}$ 项的系数为零, 得到 b_ν 应满足关系式

$$b_{\nu+1} = \frac{\frac{2\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2}(\nu+s) - \frac{\pi^2}{2l_{\mathrm{P}}^2}(2n+8N+1)}{(\nu+s+1)(\nu+s)+\frac{3}{16}} b_\nu, \tag{7.9.30}$$

当 $\nu \to \infty$ 时, 有

$$\frac{b_{\nu+1}}{b_\nu} \xrightarrow[\nu \to 0]{} \frac{2\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2} / \nu. \tag{7.9.31}$$

所有级数 (7.9.29) 在 $y \to \infty$ 时的行为与 $\mathrm{e}^{\frac{2\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2}y}$ 相同, 因而

$$u_n = y^{-\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2}y} f_n(y),$$

在 $y \to \infty$ 时, u_n 趋于无限大, 这与波函数的有限性相抵触. 由此得到结论: 级数 (7.9.29) 只能包含有限项. 令这级数在 $\nu = n_r$ 时中断, 则由系数 $b_{n_r+1} = 0$ 可得到

$$2(n_r + s) = n + \frac{8N+1}{2}. \tag{7.9.32}$$

另一方面, 级数 (7.9.29) 是从 $\nu = 0$ 开始的, 所以 b_{-1} 要等于零. 以 $\nu = -1$ 代入式 (7.9.30), 得

$$s(s-1) + \frac{3}{16} = 0.$$

因此有$s = \frac{1}{4}$ 或 $s = \frac{3}{4}$.

当 $s = \frac{1}{4}$ 时,

$$n_r = \frac{n}{2} + 2N. \tag{7.9.33}$$

为了使 n_r 为整数, 则取 $n = 0, 2, 4, \cdots$.

于是得到方程 (7.9.24) 的解

$$u_n = N_n' \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2}a^2} \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}+2N} b_\nu a^{2\nu}, \quad n = 0, 2, 4, \cdots, \tag{7.9.34}$$

式中 N_n' 为归一化常数.

下面我们考虑在 $a \to a + \mathrm{d}a$ 球壳的几率. 对于任何 n, 有

$$W_n = 6\pi^2 u_n a^2, \tag{7.9.35}$$

则

$$W_n \xrightarrow[a\to 0]{} 0. \tag{7.9.36}$$

这可解释为, 对于任意 n 的量子态, 在奇点 $a=0$ 附近宇宙存在的概率为零.

对于基态 $(n=0)$, 有

$$W_0 = 6\pi^2 N_0' \mathrm{e}^{-\frac{2\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2}a^2}\left(\sum_{\nu=0}^{2N} b_\nu a^{2\nu}\right)^2 a^2, \tag{7.9.37}$$

这个几率极大值的位置为

$$\frac{\mathrm{d}W_0}{\mathrm{d}a} = 0, \tag{7.9.38}$$

即

$$b_0 + \sum_{\nu=0}^{2N}[(2\nu+1)b_\nu - b_{\nu-1}]a^{2\nu} - b_{2N}a^{4N+2} = 0. \tag{7.9.39}$$

由式 (7.9.39), 不失一般性可假设 $b_0 > 0$, 从而由式 (7.9.30) 可推知

$$b_{2k-1} < 0, \quad b_{2k} > 0, \quad k = 1, 2, \cdots, N. \tag{7.9.40}$$

作变换, 令

$$\frac{\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2}a^2 = Z, \tag{7.9.41}$$

则式 (7.9.40) 可化为

$$1 + c_1 Z + c_2 Z^2 + \cdots + c_{2N+1}Z^{2N+1} = 0, \tag{7.9.42}$$

式中 $c_j(i=1,2,\cdots,2N+1)$ 为与 N 有关的实常系数, 且

$$c_{2k+1} < 0, c_{2k} > 0, k = 0, 1, 2, \cdots, N. \tag{7.9.43}$$

由代数学中有关定理可推知式 (7.9.42) 至少存在有一个正实根 Z_0(若不至有一个实根, 我们可取一个最小正实根), 从而由式 (7.9.41) 可推知

$$a = \frac{\sqrt{Z_0}}{\pi} l_{\mathrm{P}}. \tag{7.9.44}$$

这表明, 对有限的 N, 宇宙的最可几半径 (亦即最小半径) 为普朗克尺度 l_{P}.

由式 (7.9.22) 知

$$\psi(a, x_1, \cdots, x_{8N+1}) \sim \sum_n \left[N_n' \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{l_{\mathrm{P}}^2}a^2}\left(\sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}+2N} b_\nu a^{2\nu}\right)\right] \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{\hbar}\sum_{j=1}^{8N+1} x_j^2} \prod_{j=1}^{8N+1} N_{j(nj)}' H_{nj}\left(\sqrt{\frac{2\pi^2}{\hbar}}x_j\right). \tag{7.9.45}$$

由概率论中有关定理可知, 多个标量场的几率密度小于只有一个标量场的几率密度. 当 $s=\frac{3}{4}$ 时,

$$n_r=\frac{n-1}{2}+2N. \tag{7.9.46}$$

为了使 n_r 为整数, 则取 $n=1,3,5,\cdots$. 于是得到方程 (7.9.24) 的解

$$u_n=N_n'\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{l_\mathrm{P}^2}a^2}\sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}+2N}b_\nu a^{2\nu+1},\quad n=1,3,5,\cdots. \tag{7.9.47}$$

类似式 (7.9.35)~(7.9.45) 诸式讨论, 我们可推知 $s=\frac{3}{4}$ 时有 $s=\frac{1}{4}$ 时的相同结果.

7.10 含有旋量场的模型

我们知道 R-W 度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\frac{a^2(t)}{\left(1+\frac{\kappa}{4}r^2\right)^2}[\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2]. \tag{7.10.1}$$

考虑闭合宇宙, 取 $k=1$. 其拉氏量为

$$\mathscr{L}_g=\frac{1}{2}\left[\frac{\dot a^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{\Lambda}{3}\right], \tag{7.10.2}$$

这里 $\dot a=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$, Λ 为宇宙常数.

Dirac 场的拉氏量为

$$\mathscr{L}_m=\frac{\mathrm{i}}{2}[\bar\phi\gamma^\mu\nabla_\mu\phi-(\nabla_\mu\bar\phi)\gamma^\mu\phi]-m\bar\phi\phi, \tag{7.10.3}$$

式中 m 为 Dirac 粒子质量, γ^μ 为弯曲空间的 Dirac 矩阵, ϕ 为旋量场波函数, 且 $\phi=\phi(t),\bar\phi=\phi^+\tilde\gamma_0$, 而 $\tilde\gamma_0$ 为平空间的 Dirac 矩阵, ϕ^+ 为 ϕ 的共轭转置, $\nabla_\mu=\partial_\mu+\Gamma_\mu,\partial_\mu$ 为普通微分, $\Gamma_\mu=-\frac{1}{4}\gamma^\nu\gamma_{\mu j\nu}$.

平空间 Dirac 矩阵满足关系

$$\tilde\gamma_j\tilde\gamma_i+\tilde\gamma_i\tilde\gamma_j=2\eta_{ij}, \tag{7.10.4}$$

式中

$$\eta_{ij}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1),$$

我们有

$$\tilde{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{7.10.5}$$

$$\tilde{\gamma}_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{7.10.6}$$

这里 I 为 2×2 单位矩阵, σ_j 为 Pauli 矩阵.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

弯曲空间的 Dirac 矩阵满足关系

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{7.10.7}$$

我们有

$$\begin{aligned} &\gamma^0 = \tilde{\gamma}_0, \quad \gamma' = -\frac{1 + \frac{1}{4}r^2}{a(t)}\tilde{\gamma}_1, \\ &\gamma^2 = -\frac{1 + \frac{1}{4}r^2}{a(t)r}\tilde{\gamma}_2, \quad \gamma^3 = -\frac{1 + \frac{1}{4}r^2}{a(t)r\sin\theta}\tilde{\gamma}_3. \end{aligned} \tag{7.10.8}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_0 = \tilde{\gamma}_0, \quad \gamma_1 = \frac{a(t)}{1 + \frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_1, \\ &\gamma_2 = \frac{a(t)r}{1 + \frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_2, \quad \gamma_3 = \frac{a(t)r\sin\theta}{1 + \frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_3. \end{aligned} \tag{7.10.9}$$

经过繁复冗长计算, 我们有

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 = 0, \\ &\Gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}(t)}{1 + \frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1, \\ &\Gamma_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{a}(t)r}{1 + \frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_0\gamma_2 - \frac{1 - \frac{1}{4}r_2}{1 + \frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\right], \\ &\Gamma_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{a}(t)r\sin\theta}{1 + \frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_0\hat{\gamma}_2 - \frac{1 - \frac{1}{4}r^2}{1 + \frac{1}{4}r^2}\sin\theta\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_3 - \cos\theta\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_3\right]. \end{aligned} \tag{7.10.10}$$

从而我们得到

$$\mathscr{L}_m = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\phi^+\partial_t\phi - \partial_t\phi^+\cdot\phi + \frac{2}{ar}\left(1-\frac{r^2}{4}\right)\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi + \frac{1}{ar}\left(1+\frac{r^2}{4}\right)\cot\theta\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_2\phi\right] - m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi. \tag{7.10.11}$$

令 $\mathrm{d}t = \mathrm{i}\mathrm{d}\tau$, 则式 (7.9.2) 和 (7.9.11) 化为

$$\mathscr{L}_g = \frac{1}{2}\left[-\frac{\dot{a}2}{a^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}\right], \tag{7.10.12}$$

$$\mathscr{L}_m = \frac{1}{2}\left[\phi^+\dot{\phi} - \dot{\phi}^+\phi + \frac{2\mathrm{i}}{ar}\left(1-\frac{r^2}{4}\right)\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi + \frac{\mathrm{i}}{ar}\left(1+\frac{r^2}{4}\right)\cot\theta\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_2\phi\right] - m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi, \tag{7.10.13}$$

这里 “·” 表示对 τ 求导.

欧氏作用量为

$$\bar{I} = \int \mathrm{d}\tau \int\int\int \sqrt{-g}(\mathscr{L}_g + \mathscr{L}_m)\mathrm{d}V, \tag{7.10.14}$$

式中

$$\sqrt{-g} = \frac{a^3(\tau)r^2}{\left(1+\frac{r^2}{4}\right)^3}\sin\theta. \tag{7.10.15}$$

令

$$d\eta = \frac{\mathrm{d}\tau}{a}, \tag{7.10.16}$$

则有

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\int\left[-a'^2 - a^2 + \frac{\Lambda}{3}a^4 + (\phi^+\phi' - \phi^{+\prime}\phi)a^3 + \mathrm{i}k_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_r\phi a^3 - 2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi a^4\right]\mathrm{d}\eta, \tag{7.10.17}$$

式中 k_0 为常数, “′” 表示对 η 求导. 下面求基态波函数.

我们知道, 在量子引力理论中, 对应于薛定谔方程的是 Wheeler-De Witt 方程

$$\left[-G_{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{kl}} + h^{\frac{1}{2}}(-{}^3R(h) + 2\Lambda + 8\pi T_{nn}\left(\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\phi}, \phi\right))\right]\psi(h_{ij}, \phi) = 0, \tag{7.10.18}$$

式中 $^3R(h)$ 为三维面的标量曲率, T_{nn} 为能量密度算符, G_{ijkl}(超空间的度规) 由所有三维度规 h_{ij} 构成

$$G_{ijkl}=\frac{1}{2}h^{\frac{1}{2}}(h_{ik}h_{jl}+h_{jl}h_{jk}-h_{ij}h_{kl}). \tag{7.10.19}$$

对应于式 (7.10.18) 的 Wheeler-De Witt 方程为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}-a^2+\frac{\Lambda}{3}a^4-2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi a^4+ik_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi a^3\right]\psi=0. \tag{7.10.20}$$

我们用 WKB 方法来计算. 令

$$\begin{aligned}
A=&a^2+\left(2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}\right)a^4,\\
B=&-k_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi a^3,\\
A+B\mathrm{i}=&R(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta(a)},\\
R^2(a)=&\left[1+\left(2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}\right)a^2\right]^2a^4+k_0^2(\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi)^2a^6,\\
\tan\Theta(a)=&\frac{-k_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi a}{1+\left(2m\phi^++\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}\right)a^2},
\end{aligned} \tag{7.10.21}$$

我们得到波函数

$$\psi\sim N\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}\Theta(a)}}{\sqrt[4]{R}(a)}\exp\left[\pm\int_0^a\sqrt{R(a)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\Theta(a)}\mathrm{d}a\right]. \tag{7.10.22}$$

为了便于讨论, 我们给出式 (7.10.22) 当 $a\to 0$(足够小) 时和 $a\to\infty$(足够大) 时的渐近解.

当 $a\to 0$ 时, 分两种情况来讨论.

(1) 若 $\left(2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}\right)a^2\ll 1$, 此时式 (7.10.21) 可简化为

$$R(a)\sim a^2,\quad \Theta(a)\sim -k_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi a=c_1a, \tag{7.10.23}$$

此处

$$c_1=-k_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi.$$

这时由式 (7.10.22) 可得

$$\psi\sim N\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{c_1}{4}a}}{\sqrt{a}}\exp\left[\pm\int_0^a a\mathrm{e}^{-\frac{c_1}{2}a}\mathrm{d}a\right]\sim$$

$$N\frac{\mathrm{e}^{\pm\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi\cdot\frac{a}{4}}. \tag{7.10.24}$$

而当 $a \to 0$ 时, 通常的标量均解为 $\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{\pm\frac{a^2}{2}}$, 因此考虑旋量场后, 宇宙波函数将移动一个相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{c_1}{4}a}$(这里 a 为一次幂, 可以看出旋量场的贡献很强), 当旋量场不存在时, 这个修正自然消失. 当然附加的相因子并不影响"测量"结果.

(2) 若 $\left(2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi - \frac{\Lambda}{3}\right)a^2 \gg 1$, 此时式 (7.10.21) 可简化为

$$R(a) \sim c_1 a_3,$$
$$\tan\Theta(a) \sim \frac{1}{a}, \quad \Theta(a) \to \frac{\pi}{2}.$$

这里由式 (7.10.22) 可得

$$\psi \sim \frac{1}{\sqrt[4]{c_1 a^3}}\mathrm{e}^{\pm\frac{2}{5}\sqrt{c_1}a^{\frac{5}{2}}}. \tag{7.10.25}$$

与通常的标量场解相比, 可以看出旋量场的贡献很大.

当 $a \to \infty$ 时, 可得

$$R(a) \sim \left(2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi - \frac{\Lambda}{3}\right)a^4 = \alpha a^4,$$
$$\Theta(a) \sim -\frac{k_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi}{2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi - \frac{\Lambda}{3}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{c_1}{\alpha a}, \tag{7.10.26}$$

式中

$$\alpha = 2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi - \frac{\Lambda}{3}.$$

这时波函数为

$$\psi \sim N\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{c_1}{4\alpha a}}}{\sqrt[4]{\alpha a}}\exp\left[\pm\int_0^a \sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{c_1}{2\alpha a}}\mathrm{d}a\right] \sim$$
$$N\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha a}}\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\alpha}\frac{a^3}{3}}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{c_1}{\sqrt{\alpha}}}a^2. \tag{7.10.27}$$

由此可以看出旋量场对波函数的贡献有两部分: 一部分是旋量场的能量密度 $m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi$, 其对波函数的影响和通常标量场一样; 另一部分是类似于式 (7.10.24) 中相移因子的贡献, 此贡献是旋量场所特有的, 但这时 α 为二次幂, 旋量场的影响已经减小.

初始时, 旋量场能量密度很高. 若 $2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi > \frac{\Lambda}{3}$, 则

$$\psi \sim N\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}\frac{1}{a}\mathrm{e}^{\pm\frac{\sqrt{\alpha}}{3}a^3}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{c_1}{4}\frac{a^2}{\sqrt{\alpha}}}. \tag{7.10.28}$$

当能量密度下降到 $2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi < \dfrac{\Lambda}{3}$ 时,

$$\psi \sim N' \frac{1}{\sqrt[4]{-\alpha}} \frac{1}{a} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} \frac{\sqrt{-\alpha}}{3} a^3} \mathrm{e}^{\pm \frac{c_1}{4} \frac{a^2}{\sqrt{-\alpha}}}. \tag{7.10.29}$$

由于 $c_1 \sim \phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi \sim a^{-3}$, 故当 a 很大时,

$$\mathrm{e}^{\pm \frac{c_1}{\sqrt{-\alpha}} \frac{a^4}{4}} \sim \mathrm{e}^{\pm c_2 a^{-1}} \sim 1, \tag{7.10.30}$$

此处 c_2 近似为一常数. 当 a 很大时, 旋量场的行为和通常标量场行为完全一样.

因此可以看出旋量场在宇宙"创生"初期影响很大, 使宇宙波函数改变了一个相因子, 而随着宇宙的膨胀, 旋量场的影响越来越小, 当宇宙进入洛伦兹区域 $\left(2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi < \dfrac{\Lambda}{3}\right)$后, 旋量场的影响趋于消失, 这时旋量场的行为和通常的标量场行为一样, 仅仅能量密度在起作用.



第 8 章　诱导引力和宇宙模型

本章讨论含对称性自发破缺的引力理论及建立在这一理论基础上的量子宇宙模型. 对称性自发破缺概念在物理学的许多领域都是很有成效的. 在弱电统一理论中已经知道, 费米弱耦合常数 G_{F} 是由真空自发破缺决定的, 即 $G_{\mathrm{F}} \sim 1/v^2$, 其中 v 表示希格斯场的真空期望值. 爱因斯坦引力理论中也含有一个耦合常数 G_{N}, 他具有与 G_{F} 完全相同的量纲 M^{-2}. 这一类似性使 Zee 把对称性自发破缺引入到引力理论中, 提出了著名的诱导引力理论.

8.1　诱导引力理论

爱因斯坦引力理论和费米弱相互作用理论有一个共同的特征：与电动力学和强相互作用的现代理论相比, 他们都含有一个量纲为 M^{-2} 的耦合常数. 这些耦合常数都很小, 其中费米耦合常数 $G_{\mathrm{F}} \sim (300 m_{\mathrm{N}})^{-2}$, 牛顿耦合常数 $G_{\mathrm{N}} \sim (10^{19} m_{\mathrm{N}})^{-2}$. 人们早就提出 G_{F} 很小, 这是因为中介玻色子有质量, $G_{\mathrm{F}} \sim \mathrm{e}^2/M_w^2$. 电磁与弱相互作用统一的成功, 使这一思想精确化. 统一方案的核心是对称性自发破缺的概念, 它使某些标量场有真空期望值 v, 从而产生中介玻色子的质量

$$G_{\mathrm{F}} \sim \mathrm{e}^2/M_w^2 \sim 1/v^2. \tag{8.1.1}$$

对称性自发破缺的概念在许多物理学领域硕果累累, 因此值得尝试把它和引力结合起来. 显然，引力物理与弱作用物理大不相同, 因为引力是长程力, 其中介引力子是无质量的. 然而我们宁愿希望有一个类似于式 (8.1.1) 的关系式, 并把牛顿引力常数 G_{N} 很小的原因归结为某种粒子有质量. 由这一点出发, 把爱因斯坦引力作用量写为下面的形式:

$$I = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} \varepsilon \varphi^2 R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) + \mathscr{L}_\omega \right], \tag{8.1.2}$$

式中 φ 为标量, ε 为一无量纲耦合常数, 其量级取为 $\leqslant 1$, $\mathscr{L}_\omega$ 是其余部分的拉格朗日. 我们必须区分两种物理意义不同的情况: $\mathscr{L}$ 是否含有 φ, 即 φ 是否直接与物质场有相互作用. 这里我们假设 $\mathscr{L}_\omega$ 不含 φ. 设当 $\varphi = v$ 时 $V(\varphi)$ 取最小值. 令 $\varphi = v$, 则式 (8.1.2) 退化为爱因斯坦作用量, 其中

$$G_{\mathrm{N}} = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{1}{2} \varepsilon v^2 \right)^{-1}. \tag{8.1.3}$$

这样, 需要一个非常大的真空期望值 v, 量级为普朗克质量 $m_{\mathrm{P}} = 10^{19} m_{\mathrm{N}}$. 在下面讨论中令 $V(v) = 0$, 但不需要知道 $V(\varphi)$ 的具体形式. 在特殊情况下, 为得到明显结果, 取 $V_{\text{expl}} = \dfrac{1}{8}(\varphi^2 - v^2)^2$.

作代换 $\varphi = v + \zeta$, 发现此理论要求存在一标量粒子 ζ, 其质量由 $[V''(\varphi = v)]^{1/2}$ 给出. 实际上, 由于 φ 与引力的特殊耦合, 这质量略小于 $[V''(\varphi = v)/(1 + 6\varepsilon)]^{1/2}$, 稍后我们会讨论这一点.

如果采用 V_{expl}, 则 ζ 是有质量的, 其质量为 $\lambda^{1/2} v \sim (\lambda/8\pi\varepsilon) m_{\mathrm{P}} \sim 10^{19}\mathrm{GeV}$, 其中 $\lambda \leqslant 1$. 在一般情况下, 尽管 ζ 的质量不能由理论确定, 但是没有理由认为 ζ 相对地比较轻. ζ 与引力的相互作用跟任何其他粒子与引力的相互作用都不相同, 特别是它很稳定, 很快衰变为两个引力子, 宽度为 $\Gamma \sim \varepsilon^2 m_\zeta^3 / v^2$. 若采用 V_{expl}, 则 $\Gamma \sim \varepsilon^2 \lambda m_\zeta$. 在这里, 我们先认定无量纲耦合常数 (如 ε 和 λ) 具有量级 $\lesssim 1$. 于是若 $m_\zeta \ll m_{\mathrm{P}}$, 则 ζ 粒子可以是相对较窄的.

一个特别引人注目的猜测是, 产生牛顿引力常数的对称性自发破缺也可以解释由统一理论导出的弱、强和电磁相互作用. 我们已经知道, 弱、电磁和强相互作用在某一大质量尺度下结合成统一的杨–米尔斯规范理论. 特别诱人的方案是 Georgi Glashow 的 $SU(5)$ 规范理论. 只要知道耦合常数是如何依赖质量的, 知道低能时弱、电磁和强相互作用的值, 就可以确定统一发生时的标量尺度. 分析结果表明, 统一发生在 $10^{19}\mathrm{GeV}$. 在这一框架内, 接近于普朗克质量 m_{P} 的质量尺度似乎仅在数值上吻合; 但是我们相信, 这不是偶然的, 而是表明了式 (8.1.2) 中的标量场 φ 应该换成 $SU(5)$ 下类似于 24 变换的希格斯场 $\boldsymbol{\varphi}$, 式 (8.1.2) 中的 φ^2 和 $(\partial_\mu\varphi)^2$ 的表达式应该换成 $\boldsymbol{\varphi}^2$ 和 $(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi})^2$. 在统一的 $SU(5)$ 理论中, 相关的质量尺度为 $10^{19}\mathrm{GeV}$, 且假定存在具有这种质量的矢量玻色子, $|\boldsymbol{\varphi}|$ 的真空期望值也假定为 $\sim 10^{19}\mathrm{GeV}$. 这样, 一个统一的机制既可以解释引力的质量尺度, 也可以解释 $SU(5)$ 到 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 的破缺. 当然, 这一想法并没有统一所有四种相互作用, 但它确实提出了引力与其他三种相互作用之间令人感兴趣的联系.

我们可直接从式 (8.1.2) 中的作用量导出运动方程, 只需注意

$$\delta(g^{1/2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta g^{1/2} + g^{1/2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{1/2} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \tag{8.1.4}$$

中最后一项是全散度, 可在标准引力理论中省去. 前两项导致爱因斯坦引力场方程中的爱因斯坦张量 $\left(R^{\mu\nu} - \dfrac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)$, 这里, 式 (8.1.4) 中的第三项必须保留. 通过分步积分, 再利用各个恒等式, 可以得到修正的运动方程

$$\frac{1}{2}\varepsilon\varphi^2 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) = -\frac{1}{2}\left[T_\omega^{\mu\nu} + T_\varphi^{\mu\nu} + (\varepsilon\varphi^2)^{;\mu;\nu} - g^{\mu\nu}(\varepsilon\varphi^2)_{;\lambda}^{;\lambda}\right], \tag{8.1.5}$$

式中 $T_\omega^{\mu\nu}$ 是式 (8.1.2) 中由 $\mathscr{L}_\omega$ 得到的能量–动量张量

$$T_\varphi^{\mu\nu} = \partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi - g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\varphi\partial_\rho\varphi - V(\varphi)\right]. \tag{8.1.6}$$

场 φ 的运动方程为

$$\varphi^\mu_{;\mu} + \frac{\delta V}{\delta\varphi} - \varepsilon R\varphi = 0, \tag{8.1.7}$$

$\mathscr{L}_\omega$ 不含 φ. 若 $\mathscr{L}_\omega$ 含 φ, 则式 (8.1.7) 右端不为零, 代之以

$$\frac{\delta\mathscr{L}_\omega}{\delta\varphi} - \frac{\partial_\mu\delta\mathscr{L}_w}{\delta\partial_\mu\varphi}.$$

在现在世界的对称性破缺相中, $\varphi(x) = v, V(v) = 0, \frac{1}{2}\varepsilon v^2 = (16\pi G_{\mathrm{N}})^{-1}$. 于是式 (8.1.5) 变成期望的爱因斯坦场方程. 因此, 现在的实验不能区分这个理论和爱因斯坦引力理论. 在式 (8.1.7) 中的 $\varepsilon R\varphi$ 项是可忽略的.

我们要给这个理论加上一个要求, 即物质与引力场的能量变换应该由爱因斯坦理论精确描述. 这相当于等效原理的一个翻版. 我们现在证明这确实是对的, 即只要 $\mathscr{L}_\omega$ 不含 φ, 则

$$T^{\mu\nu}_{\omega;\nu} = 0. \tag{8.1.8}$$

在爱因斯坦理论中, 此方程由爱因斯坦张量所满足的缩并毕安基恒等式得到. 在现在的理论中, 这一恒等式给出的是守恒定律

$$(a^{-1}[T_\omega^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}])_{;\nu} = 0, \tag{8.1.9}$$

式中

$$a \equiv \frac{1}{2}\varepsilon\varphi^2,$$
$$t^{\mu\nu} \equiv T_\varphi^{\mu\nu} + 2a^{;\mu;\nu} - 2g^{\mu\nu}a^{;\lambda}_{;\lambda},$$

圆括号中的量可认为是“等效”的能量–动量张量. 我们要证明, 考虑到 φ 的运动方程, 式 (8.1.9) 实际上就是式 (8.1.8). 式 (8.1.9) 可改写为

$$-\frac{1}{2}T^{\mu\nu}_{\omega;\nu} = a_{;\nu}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}t^{\mu\nu}_{;\nu}. \tag{8.1.10}$$

利用恒等式

$$a^{;\sigma}R_{\sigma k} = a^{;\lambda}_{;\lambda;k} - a^{;\lambda}_{;k;\lambda}, \tag{8.1.11}$$

式 (8.1.10) 简化为

$$T^{\mu\nu}_{\omega;\nu} = a^{;\mu}R - T^{\mu\nu}_{\varphi;\nu}. \tag{8.1.12}$$

最后, 利用 φ 的运动方程 (8.1.7), 得到

$$T^{\mu\nu}_{\varphi;\nu} = a^{;\mu} R, \tag{8.1.13}$$

我们的证明就完成了. 因此, 时空度规决定质点的运动.

另一方面, 如果 $\mathscr{L}_\omega$ 含有 φ, 正如我们猜测的, φ 也涉及统一理论分化为弱、电磁和强相互作用, 那时 φ 的运动方程不再是式 (8.1.7), $T^{\mu\nu}_{\omega;\nu} = 0$ 不成立, 而应有

$$T^{\mu\nu}_{\omega;\nu} = \varphi_{,\mu} \left(\partial_\mu \frac{\delta \mathscr{L}_\omega}{\delta \partial_\mu \varphi} - \frac{\delta \mathscr{L}_\omega}{\delta \varphi} \right). \tag{8.1.14}$$

但是在 φ 不变的时空区域中, 如现在的情况, 确实有 $T^{\mu\nu}_{\omega;\nu} = 0$.

早在 1961 年, Brans 和 Dicke 就已经提出了一个含标量场的引力理论. 与这些较早的理论不同, 诱导引力理论包括了对称性自发破缺. 这是关键问题. Brans-Dicke 理论基于马赫原理的考虑, 其中的标量场 φ 没有自相互作用, 并把物质能量–动量张量的迹作为源. 换句话说, 式 (8.1.2) 中的势 $V(\varphi)$ 没有包括进来. 这导致 B-D 理论在观测上不自洽, 除非某一参量特别大. 相比之下, 诱导引力理论中场 φ 被对称性破缺势固定而有一定值. 只要曲率标量 R 在所考虑的时空区域中不是非常大.

现在回到 ζ 粒子在时空中的传播, 这与任何其他粒子不同. 考虑平直空间中的微扰 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, 且 $\varphi = v + \zeta$. 我们把运动方程 (8.1.5a) 和 (8.1.7a) 展开到一阶

$$\partial^2 \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = \frac{4}{v} (\eta_{\mu\nu} \partial^2 \zeta - \partial_\mu \partial_\nu \zeta), \tag{8.1.5b}$$

$$[\partial^2 + V''(\zeta)]\zeta = \frac{1}{2} \varepsilon v \partial^2 h, \tag{8.1.7b}$$

这里我们采用了谐和规范

$$\partial_\mu h^\mu_\nu = \frac{1}{2} \partial_\nu h^\mu_\mu.$$

注意引力波的源 [式 (8.1.5b) 右边] 是 ζ 的一阶项, 这与通常的源是物质场微扰的二阶项的情况不同. 取式 (8.1.5b) 的迹, 并代入式 (8.1.7b), 得到

$$\left(\partial^2 + \frac{V''(v)}{1 + 6\varepsilon} \right) \zeta = 0. \tag{8.1.7c}$$

这个质量变化可认为是波函数重整化的结果. 因此, 平直空间中传播的 ζ 粒子牵动了引力波激发, 其幅度为

$$h_{\mu\nu}(k) = -\frac{2}{v} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{2k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \zeta(k). \tag{8.1.15}$$

虽然现在无法用实验区分诱导引力理论和爱因斯坦引力理论, 但它使我们预言, 在另外的时间和地点可能会显示二者的不同. 在 R-W 宇宙中, 标量曲率为

$$R = 6[k/\mathscr{R}^2 + (1 - q)H^2], \tag{8.1.16}$$

式中 H 为哈勃常数, q 为减速因子, R 为标度因子. $k=+1,0,-1$, 分别对应于宇宙是闭的、平直的和开的. 当我们逆时间看此宇宙时, $\mathscr{R}$ 增加, 式 (8.1.7a) 中的 $\varepsilon\mathscr{R}\varphi$ 项变得越来越重要, 它改变 φ 的真空期望值. 这样, 引力"常数" G 随时间变化:

$$\frac{\delta G}{G}=-2\frac{\delta v}{v}=\frac{2\varepsilon R}{V''(v)}\sim\left(\frac{H}{m_\zeta}\right)^2. \tag{8.1.17}$$

这一变化完全可以忽略, 除非宇宙的"年龄" H^{-1} 变得可以与 ζ 的康普顿时间相比拟. 对 $\delta G/G$ 有贡献的另一效应是当逆时间时宇宙温度的升高. 大致上说, 有限温度 T 的效应是在势 $V(\varphi)$ 上加上 $\sim T^2\varphi^2$ 的项, 此项导致引力"常数"的改变为

$$\delta G/G\sim T^2/V''(v)\sim(T/m_\zeta)^2. \tag{8.1.18}$$

同样, 这一变化也可忽略, 除非温度变得与 m_ζ 差不多.

引力常数变化的理论早就有人提出来了. 但在这些理论中, $\delta G/G$ 太大, 与观测事实不符. 诱导引力理论不存在这个困难, 因为 φ 的期望值本质上被 $V(\varphi)$ 固定. 这一理论和爱因斯坦引力理论只在标曲率和温度值超高时才有明显不同. 因此, 在初始奇点附近两个理论给出不同结果. 当然, 在奇点附近又必须考虑量子理论了.

8.2 虫 洞 解

在小超空间近似下, R-W 度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2, \tag{8.2.1}$$

式中 $a(t)$ 为标度因子, $\mathrm{d}\Omega_3^2$ 为单位 3 球面上的度规. 引入共形时间 η, 使其满足

$$\mathrm{d}t=a\mathrm{d}\eta,$$

则式 (8.2.1) 可写为

$$\mathrm{d}s^2=a^2(\eta)(-\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\Omega_3^2). \tag{8.2.2}$$

希格斯势可写为

$$V(\varphi)=\frac{1}{8}\lambda(\varphi^2-v^2)^2, \tag{8.2.3}$$

$$\lambda\lesssim 1,$$

式中 λ 为无量纲的自耦合常数. 设除希格斯场以外不存在其他物质场, 则作用量 (8.1.2) 化为

$$I=2\pi^2\int\mathrm{d}\eta[3\varepsilon\varphi^2a^2-3\varepsilon\dot{a}^2\varphi^2-6\varepsilon a\dot{a}\varphi\dot{\varphi}$$

$$+\frac{1}{2}a^2\dot{\varphi}^2-\frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2-v^2)^2]. \tag{8.2.4}$$

拉氏量 $\mathscr{L}$ 为

$$\mathscr{L}=3\varepsilon a^2\varphi^2-3\varepsilon\dot{a}^2\varphi^2-6\varepsilon a\dot{a}\varphi\dot{\varphi}+\frac{1}{2}a^2\dot{\varphi}^2-\frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2-v^2)^2, \tag{8.2.5}$$

式中“·”表示对共形时间 η 求导.

为了消除拉氏量 $\mathscr{L}$ 中的交叉项 $\dot{a}\dot{\varphi}$, 引入新变量

$$\begin{cases} x=a\varphi, \\ y=\varphi, \end{cases}$$

拉氏量 (8.2.5) 可重新写为

$$\mathscr{L}=3\varepsilon x^2-3\varepsilon\dot{x}^2+\frac{6\varepsilon+1}{2}\frac{x^2}{y^2}\dot{y}^2-\frac{1}{8}\lambda\frac{x^4}{y^4}(y^2-v^2)^2, \tag{8.2.6}$$

与位形变量 x,y 相对应的正则动量为

$$P_x=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}}=-6\varepsilon\dot{x}, \tag{8.2.7}$$

$$P_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=(6\varepsilon+1)\frac{x^2}{y^2}\dot{y}. \tag{8.2.8}$$

哈密顿量形式为

$$H=\dot{x}P_x+\dot{y}P_y-\mathscr{L}=-\frac{1}{12\varepsilon}P_x^2+\frac{1}{2(6\varepsilon+1)}\frac{y^2}{x^2}P_y^2-3\varepsilon x^2 +\frac{1}{8}\lambda\frac{x^4}{y^4}(y^2-v^2)^2. \tag{8.2.9}$$

进行正则量子化, 即在式 (8.2.9) 中作代换 $P_x\sim-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}, P_y\sim-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}$, 得到 W-D 方程

$$\left\{\frac{1}{6\varepsilon}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{6\varepsilon+1}y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-6\varepsilon x^4+\frac{1}{4}\lambda\frac{x^6}{y^4}(y^2-v^2)^2\right\} \Psi(x,y)=0. \tag{8.2.10}$$

当希格斯标量场 φ 的取值接近真空期待值时, 即 $\varphi=y\to v$ 时, W-D 方程 (8.1.2) 可近似写为

$$\frac{1}{6\varepsilon}x^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{1}{6\varepsilon+1}y^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-6\varepsilon x^4\Psi=0, \tag{8.2.11}$$

分离变量

$$\Psi(x,y)=\Psi_x(x)\Psi_y(y),$$

式 (8.2.11) 变为

$$x^2\frac{d\Psi_x}{\mathrm{d}x^2}+(E-36\varepsilon^2x^4)\Psi_x=0, \tag{8.2.12}$$

$$\frac{1}{6\varepsilon+1}y^2\frac{d^2\Psi_y}{\mathrm{d}y^2}+\frac{E}{6\varepsilon}\Psi_y=0, \tag{8.2.13}$$

式中 E 为常数.

我们所关心的是波函数中与尺度因子 a 有关的部分, 即 $\Psi_x(x)$. 为此可以用 WKB 近似方法求解方程 (8.2.12). 令 $\Psi_x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(x)}$, 式 (8.2.12) 变为

$$-x^2\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)^2+E-36\varepsilon^2x^4=0. \tag{8.2.14}$$

当 $x<\left(\dfrac{E}{36\varepsilon^2}\right)^{1/4}$, 即 $a<\dfrac{1}{v}\cdot\left(\dfrac{E}{36\varepsilon^2}\right)^{1/4}$ 时,

$$\Psi_x=\exp\left[\mathrm{i}\int\frac{1}{x}\sqrt{E-36\varepsilon^2x^4}\mathrm{d}x\right]. \tag{8.2.15}$$

这是振荡形式的波函数, 对应经典允许区, 即洛伦兹区.

当 $x>\left(\dfrac{E}{36\varepsilon^2}\right)^{1/4}$, 即 $a>\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{E}{36\varepsilon^2}\right)^{1/4}$ 时,

$$\Psi_x=\exp\left[-\int\frac{1}{x}\sqrt{36\varepsilon^2x^4-E}\mathrm{d}x\right]. \tag{8.2.16}$$

即

$$\Psi_x=\exp\left[-\frac{\sqrt{E}}{2}\left(\sqrt{\frac{36\varepsilon^2x^4}{E}-1}-\arctan\sqrt{\frac{36\varepsilon^2x^4}{E}-1}\right)\right]. \tag{8.2.17}$$

这是指数形式的波函数, 对应经典禁区, 即欧几里得区. 在该区域内发生的是量子过程, 允许空间拓扑变化, 允许出现连接两个大的时空区域的虫洞或子宇宙从母宇宙中分离出来. 从式 (8.2.17) 可以看出, 当 $a\to\infty$, 即 $x\to\infty$ 时, 波函数 Ψ_x 指数衰减为零, 这是描述虫洞的波函数.

设欧氏作用量为 I_{E}, 则洛伦兹作用量 I_{L} 为

$$I_{\mathrm{L}}=\mathrm{i}I_{\mathrm{E}},$$

引入 $\tau=\mathrm{i}\eta$, 我们有

$$I_{\mathrm{E}}=-2\pi^2\int\mathrm{d}\tau\left[3\varepsilon\dot{a}^2\varphi^2+3\varepsilon\dot{a}^2\varphi^2+6\varepsilon a\dot{a}\varphi\dot{\varphi}-\frac{1}{2}a^2\dot{\varphi}^2-\frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2-v^2)^2\right], \tag{8.2.18}$$

式中 “·” 表示对 τ 求导数.

由式 (8.2.18) 取变分, 可以得到经典运动方程. 首先对 a 取变分, 得到 $a-$ 方程

$$6\varepsilon a\varphi^2 - (1+6\varepsilon)\alpha\dot{\varphi}^2 - \frac{\lambda}{2}a^3(\varphi^2 - v^2)^2 - 12\varepsilon\dot{a}\varphi\dot{\varphi} - 6\varepsilon\ddot{a}\varphi^2 - 6\varepsilon a\varphi\ddot{\varphi} = 0. \quad (8.2.19)$$

然后再对 φ 变分得到 $\varphi-$ 方程

$$6\varepsilon a^2\varphi - \frac{1}{2}\lambda\alpha^4(\varphi^2 - v^2)\varphi - 6\varepsilon a\ddot{a}\varphi + 2a\dot{a}\dot{\varphi} + a^2\ddot{\varphi} = 0. \quad (8.2.20)$$

经过适当变换后, 可把式 (6.2.19) 和 (6.2.20) 改写为

$$a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{a}\varphi\dot{\varphi} + a^2\varphi\ddot{\varphi} - \frac{1}{2(1+6\varepsilon)}\lambda a^4 v^2(\varphi^2 - v^2) = 0, \quad (8.2.21)$$

$$6\varepsilon a^2\varphi^2 - a^2\dot{\varphi}^2 - 6\varepsilon a\ddot{a}\varphi^2 - \frac{\lambda}{2}a^4(\varphi^2 - v^2)\left(\varphi^2 - \frac{v^2}{1+6\varepsilon}\right) = 0. \quad (8.2.22)$$

在希格斯场的真空附近, $\varphi \to v$, $\varphi^2 \to v^2 \to 0$, 经典的 $a-$ 方程和 $\varphi-$ 方程分别为

$$a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{a}\varphi\dot{\varphi} + a^2\varphi\ddot{\varphi} = 0, \quad (8.2.23)$$

$$6\varepsilon a^2\varphi^2 - a^2\dot{\varphi}^2 - 6\varepsilon a\ddot{a}\varphi^2 = 0. \quad (8.2.24)$$

由式 (8.2.23) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(a^2\varphi\dot{\varphi}) = 0$$

或守恒量

$$a^2\varphi\dot{\varphi} \equiv q, \quad (8.2.25)$$

式中 q 为一不随时间 τ 而改变的守恒荷.

由式 (8.2.24) 可得

$$-\ddot{a} + a - \frac{q^2}{6\varepsilon a^3\varphi^4} = 0. \quad (8.2.26)$$

定义函数为

$$f(a) = \dot{a}^2 - 1,$$

这样可以用 $f(a)$ 对 a 的一阶导数来取代 $a(\tau)$ 对 τ 的二阶导数, 把二阶常微分方程 (8.2.26) 简化为 $f(a)$ 对 a 的一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} = 2a - \frac{q^2}{3\varepsilon a^3 v^4}, \quad (8.2.27)$$

其解为

$$f(a)=a^2+\frac{q^2}{6\varepsilon a^2v^4}+A, \tag{8.2.28}$$

式中 A 为积分常数.

$f(a)$ 作为虫洞解的依据是, 在标度因子 a 取极大值 $a_{\max}$ 和极小值 $a_{\min}$ 两种情况下, $f(a)$ 均取值 -1, 并且 $f(a)$ 在 $a_{\max}$ 与 $a_{\min}$ 之间光滑地变化.

当 $f(a)=-1$ 时, 可得

$$a^4+(A+1)a^2+\frac{q^2}{6\varepsilon v^4}=0, \tag{8.2.29}$$

其解为

$$a^2=\frac{1}{2}\left[-(A+1)\pm\sqrt{(A+1)^2-\frac{4q^2}{6\varepsilon v^4}}\right]. \tag{8.2.30}$$

由于 $a\geqslant 0$, 故应要求 $A\leqslant-(1+\delta)$, 其中 $\delta\equiv\dfrac{2q}{\sqrt{6\varepsilon}v^2}$, 式 (8.2.30) 可改写为

$$a^2=\frac{1}{2}\left[|1+A|\pm\sqrt{(1+A)^2-\frac{4q^2}{6\varepsilon v^4}}\right]. \tag{8.2.31}$$

当 $|1+A|\gg\delta$ 时,

$$a_{\max}=\sqrt{|1+A|}, \tag{8.2.32}$$

$$a_{\min}=\left[\frac{1}{|1+A|},\frac{q^2}{6\varepsilon v^4}\right]^{1/2}. \tag{8.2.33}$$

由于希格斯场的真空期待值 v 很大, 所以 $a_{\min}$ 很小, 即 $a_{\max}\geqslant a_{\min}$, 这正是一个虫洞的几何, 它描述一个喉直径为 $a_{\min}$ 的虫洞把二个标度因子为 $a_{\max}$ 的母宇宙或标度因子为 $a_{\max}$ 的同一母宇宙的两部分连结起来.

由式 (8.2.33) 可知, 仅当守恒荷 q 不为零时才可能存在虫洞解, 而守恒荷的大小则决定于标度因子和希格斯场在真空附近的性态.

如果要求 $a_{\min}$ 不小于普朗克长度 l_{P}, 由式 (8.2.33) 应要求

$$\left(\frac{1}{|1+A|}\frac{q^2}{6\varepsilon v^4}\right)^{1/2}\geqslant l_{\mathrm{P}}$$

或

$$A\geqslant-\left(1+\frac{1}{l_{\mathrm{P}}^2}\frac{q^2}{6\varepsilon v^4}\right),$$

亦即

$$-\left(1+\frac{\delta^2}{l_{\mathrm{P}}^2}\right)\leqslant A\ll-(1+\delta).$$

自洽性要求

$$q\sqrt{\varepsilon} \gg \frac{1}{10},$$

这个条件是可以被满足的.

下面采用 Vilenkin 的边界条件, 解 W-D 方程, 从而求出隧道效应波函数.

现在, 小超空间的坐标为 a, φ, 它们的取值范围分别为

$$0 < a < \infty, \quad -\infty < \varphi < \infty.$$

$a = 0, \varphi$ 有限是非奇异边界. 其他的超空间边界是奇异边界. 根据式 (8.2.5), 求出与位形变量 a, φ 相对应的正则动量

$$P_a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{a}} = -6\varepsilon \dot{a}\varphi - 6\varepsilon a\varphi\dot{\varphi},$$

$$P_\varphi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -6\varepsilon a\dot{a}\varphi^2 + a^2\dot{\varphi}.$$

由 $H = \dot{a}P_a + \dot{\varphi}P_\varphi - \mathscr{L}$ 计算出哈密顿量, 正则量子化后, 得到宇宙波函数满足的 W-D 方程

$$\left\{\frac{1}{(6\varepsilon+1)a^2\varphi^2}\left[\frac{a^2}{12\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{2}\varphi^2\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a\varphi\frac{\partial^2}{\partial a\partial \varphi}\right] - 3\varepsilon a^2\varphi^2 + \frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2 - v^2)^2\right\}\Psi(a, \varphi) = 0. \tag{8.2.34}$$

要求在 $a = 0$ 处, 波函数有界, 但方程 (8.2.34) 等号左端 $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}$ 和 $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi \partial a}$ 两项前的系数在 $a = 0$ 处均发散, 只有当波函数 $\Psi(a, \varphi)$ 在 a 趋于零时不依赖于 φ, 即 $\left.\frac{\partial \Psi(a,\varphi)}{\partial \varphi}\right|_{a=0} = 0$ 情况下, 才可以略去式 (8.2.34) 中的上述两项, 而把方程写为

$$\frac{1}{12\varepsilon\varphi^2}\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(a,\varphi)}{\partial a^2} - (1+6\varepsilon)\times\left[3\varepsilon a^2\varphi^2 - \frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2 - v^2)^2\right]\bar{\Psi}(a,\varphi) = 0. \tag{8.2.35}$$

用 WKB 法对式 (8.2.35) 近似求解.

令 $\bar{\Psi}(a,\varphi) \sim \exp[\mathrm{i}S(a,\varphi)]$, 当 $a^2 > \frac{24\varepsilon\varphi^2}{\lambda(\varphi^2 - v^2)}$ 时, 存在振荡形式的解, 对应经典允许区.

$$\bar{\Psi}(a,\varphi) = A(\varphi)\exp\left\{\pm\mathrm{i}\frac{48\sqrt{1+6\varepsilon}\varepsilon^2\varphi^4}{\lambda(\varphi^2 - v^2)^2}\cdot\left[\frac{\lambda a^2(\varphi^2 - v^2)^2}{24\varepsilon\varphi^2} - 1\right]^{3/2}\right\}.$$

由于在超空间的奇异边界上只允许存在外行波, 所以上式应取 "−" 号.

$$\bar{\Psi}(a,\varphi)=A(\varphi)\exp\left\{-\mathrm{i}\frac{48\sqrt{1+6\varepsilon}\varepsilon^2\varphi^2}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\cdot\left[\frac{\lambda a^2(\varphi^2-v^2)^2}{24\varepsilon\varphi^2}-1\right]^{3/2}\right\}. \tag{8.2.36}$$

当 $a^2<\dfrac{24\varepsilon\varphi^2}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}$ 时, 存在指数形式的解, 对应经典禁区,

$$\bar{\Psi}(a,\varphi)=A(\varphi)\exp\left[\frac{48\varepsilon^2\varphi^4\sqrt{1+6\varepsilon}}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\cdot\left(1-\frac{\lambda a^2(\varphi^2-v^2)^2}{24\varepsilon\varphi^2}\right)^{3/2}\right]. \tag{8.2.37}$$

为了使 $a\to0$ 时, $\dfrac{\partial\bar{\Psi}(a,\varphi)}{\partial\varphi}\to0$, 必须适当选择 $A(\varphi)$. 令

$$A(\varphi)=\exp\left(-\frac{48\varepsilon^2\varphi^4\sqrt{1+6\varepsilon}}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\right). \tag{8.2.38}$$

最后, 可把诱导引力中的隧道波函数表示成

$$\bar{\Psi}(a,\varphi)=A(\varphi)\exp\left\{-\frac{48\varepsilon^2\sqrt{1+6\varepsilon}}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\varphi^4\cdot\left[1-\left(1-\frac{\lambda a^2(\varphi^2-v^2)^2}{24\varepsilon\varphi^2}\right)^{3/2}\right]\right\}$$

$$\left(\text{当 } a^2<\frac{24\varepsilon\varphi^2}{\lambda(\varphi^2-v^2)}\right), \tag{8.2.39}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(a,\varphi)=&\exp\left(-\frac{48\varepsilon^2\sqrt{1+6\varepsilon}\varphi^4}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\right)\exp\left\{-\mathrm{i}\frac{48\varepsilon^2\sqrt{1+6\varepsilon}}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\varphi^4\right.\\&\left.\times\left[\frac{\lambda a^2(\varphi^2-v^2)^2}{24\varepsilon\varphi^2}(\varphi^2-v^2)^2-1\right]^{3/2}\right\}\end{aligned}$$

$$\left(\text{当 } a^2>\frac{24\varepsilon\varphi^2}{\lambda(\varphi^2-v^2)}\right), \tag{8.2.40}$$

当 a 很小时, 式 (8.2.39) 可近似地写为

$$\bar{\Psi}(a,\varphi)\approx\exp(-2\varepsilon\sqrt{1+6\varepsilon}\varphi^2a^2). \tag{8.2.41}$$

所得到的解显然是非奇异的.

8.3 Hosoya 量子化

Hosoya 在爱因斯坦理论中对宇宙场进行三次量子化, 证明了宇宙存在多重产生的必然性; 宇宙从"无"到"有"产生的几率分布为普朗克分布. 朱建阳采用诱导

引力理论, 用类似方法对宇宙场进行三次量子化. 结果表明, 在没有其他物质场存在的情况下, 在希格斯真空处宇宙仍然可以从 “无” 到 “有” 经过量子隧道过程而创生, 创生的几率分布仍然遵守普朗克分布.

由 8.2 节可知, 诱导引力的作用量为

$$I = 2\pi^2 \int \mathrm{d}\eta \Big[3\varepsilon\varphi^2 a^2 - 3\varepsilon\dot{a}^2\varphi^2 - 6\varepsilon a\dot{a}\varphi\dot{\varphi} + \frac{1}{2}a^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2 - v^2)^2\Big], \tag{8.3.1}$$

拉氏量为

$$\mathscr{L} = 3\varepsilon a^2\varphi^2 - 3\varepsilon\dot{a}^2\varphi^2 - 6\varepsilon a\dot{a}\varphi\dot{\varphi} + \frac{1}{2}a^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2 - v^2)^2. \tag{8.3.2}$$

为了消除拉氏量 $\mathscr{L}$ 中的交叉项 $\dot{a}\dot{\varphi}$, 引入新变量

$$x = a\varphi, \quad y = \varphi, \tag{8.3.3}$$

则拉氏量可重新写为

$$\mathscr{L} = 3\varepsilon x^2 - 3\varepsilon\dot{x}^2 + \frac{6\varepsilon + 1}{2}\frac{x^2}{y^2}\dot{y}^2 - \frac{1}{8}\lambda\frac{x^4}{y^4}(y^2 - v^2)^2. \tag{8.3.4}$$

与位形变量 x, y 相对应的正则动量为

$$P_x = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}} = -6\varepsilon\dot{x},$$
$$P_y = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{y}} = (6\varepsilon + 1)\frac{x^2}{y^2}\dot{y}. \tag{8.3.5}$$

哈密顿量形式为

$$H = \dot{x}P_x + \dot{y}P_y - \mathscr{L} = -\frac{1}{12\varepsilon}P_x^2 + \frac{1}{2(6\varepsilon + 1)}\frac{y^2}{x^2}P_y^2 - 3\varepsilon x^2 + \frac{1}{8}\lambda\frac{x^4}{y^4}(y^2 - v^2)^2. \tag{8.3.6}$$

引入正则量子化

$$P_x \sim -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}, P_y \sim -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}, \tag{8.3.7}$$

但在由 c 数变为 q 数时, 会出现排列上的不确定性. 例如

$$(-6\varepsilon\dot{x})^2 = (-6\varepsilon\dot{x})(-6\varepsilon\dot{x}) = P_x^2$$
$$= \frac{1}{x^p}(-6\varepsilon\dot{x})x^p(-6\varepsilon\dot{x})$$

$$= \frac{1}{x^p} P_x x^p P_x \quad (p = 0, 1, 2, \cdots),$$

故一般有

$$P_x^2 = -\frac{1}{x^{p_1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{p_1} \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad p_1 = 0, 1, 2, \cdots,$$
$$P_y^2 = -\frac{1}{y^{p_2}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{p_2} \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad p_2 = 0, 1, 2, \cdots, \tag{8.3.8}$$

式中 p_1, p_2 均表示算符次序因子的模糊度. 所以在一般情况下, W-D 方程为

$$\left[x^2 \frac{1}{x^{p_1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{p_1} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{6\varepsilon}{6\varepsilon + 1} y^2 \frac{1}{y^{p_2}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{p_2} \frac{\partial}{\partial y} \right) - (6\varepsilon)^2 x^4 + \frac{3}{2} \lambda \varepsilon \frac{x^6}{y^4} (y^2 - v^2)^2 \right] \Psi(x, y) = 0. \tag{8.3.9}$$

作变量代换

$$\alpha = \ln x, \quad \beta = \ln y. \tag{8.3.10}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial \beta},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial \beta^2}, \tag{8.3.11}$$

则 W-D 方程变为

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (p_1 - 1) \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{6\varepsilon}{6\varepsilon + 1} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (p_2 - 1) \frac{\partial}{\partial \beta} \right] - (6\varepsilon)^2 \mathrm{e}^{4\alpha} + \frac{3}{2} \lambda \varepsilon \mathrm{e}^{6\alpha - 4\beta} (\mathrm{e}^{2\beta} - v^2)^2 \right\} \Psi(\alpha, \beta) = 0. \tag{8.3.12}$$

当希格斯场 φ 的取值接近真空期待值时, 即 $\varphi = y = \mathrm{e}^\beta \to v$ 时, W-D 方程可近似写为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - U(\alpha) \right] \Psi(\alpha, \beta) = 0, \tag{8.3.13}$$

其中

$$\rho^2 = \frac{6\varepsilon}{6\varepsilon + 1}, \quad U(\alpha) = (6\varepsilon)^2 \mathrm{e}^{4\alpha}.$$

这里已对算符次序因子的模糊度做了最简单的选择, 即令 $p_1 = p_2 = 1$. 方程 (8.3.13) 是一个双曲型二阶偏微分方程, 如将其中的变量 $\alpha = \ln x$ 和 $\beta = \ln y$ 分别看作是小超空间的时间变量和空间变量, 则显然不可能由这个方程构造一种其时间分量为

正定的守恒几率流. 为了克服宇宙波函数 $\Psi(\alpha,\beta)$ 的这种几率解释困难, 下面将作进一步的量子化处理.

按照正则量子化的标准程序, 我们重新将宇宙波函数 $\Psi(\alpha,\beta)$ 看作是小超空间中的宇宙场. 为了简单, 假定 Ψ 是一种中性标量场, 因而在诱导引力理论框架下的宇宙场方程形式上与式 (8.3.13) 相同, 即

$$\frac{\partial^2\psi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}-\rho^2\frac{\partial^2\Psi(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2}-U(\alpha)\Psi(\alpha,\beta)=0. \tag{8.3.14}$$

由场方程 (8.3.14), 构造如下形式的作用量:

$$I'=\int \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathscr{L}'=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right)^2-\rho^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right)^2+U(\alpha)\Psi^2\right], \tag{8.3.15}$$

其中拉氏量为

$$\mathscr{L}'=\mathscr{L}'\left(\Psi,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha},\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right)^2-\rho^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right)^2+U(\alpha)\Psi^2\right]. \tag{8.3.16}$$

则由哈密顿原理

$$\delta I'=0, \tag{8.3.17}$$

可导得

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial(\partial\Psi/\partial\alpha)}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial(\partial\Psi/\partial\beta)}-\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial\Psi}=0. \tag{8.3.18}$$

将拉氏量 (8.3.16) 代入式 (8.3.18), 显然可使场方程 (8.3.14) 重现. 这样, 就可以由这特定的拉氏量 $\mathscr{L}'$ 来确定对应于场 $\Psi(\alpha,\beta)$ 的正则动量. 因为 α 被当作是时间变量, 则由定义, $\Psi(\alpha,\beta)$ 的正则动量为

$$P_\Psi\equiv\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial(\partial\Psi/\partial\alpha)}=\frac{\partial\Psi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}. \tag{8.3.19}$$

将宇宙场的动力学变量 Ψ 和 $P_\Psi=\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha}$ 换成希尔伯特空间的厄密算符, 它们满足如下形式的对易关系 (等时对易子):

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial\Psi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha},\Psi(\alpha,\beta')\right]=-\mathrm{i}\delta(\beta-\beta'),\\&\left[\frac{\partial\Psi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha},\frac{\partial\Psi(\alpha,\beta')}{\partial\alpha}\right]=0,\\&[\Psi(\alpha,\beta),\Psi(\alpha,\beta')]=0.\end{aligned} \tag{8.3.20}$$

由此则可将作用量 (8.3.15) 所描述的系统正则量子化.

下面转向对场方程 (8.3.14) 作初步的讨论. 由于场方程 (8.3.14) 中的势项只与时间变量 α 有关, 故有如下形式的特解 (正频模解):

$$u_p(\alpha,\beta)=N\exp\left(\mathrm{i}p\frac{\beta}{\rho}\right)Z(\alpha), \tag{8.3.21}$$

式中 $Z(\alpha)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2Z(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2}+[p^2-(6\varepsilon\mathrm{e}^{2\alpha})^2]Z(\alpha)=0. \tag{8.3.22}$$

只须令

$$\xi=3\varepsilon\mathrm{e}^{2\alpha},$$

则方程 (8.3.22) 转化为

$$\xi^2\frac{\mathrm{d}^2Z(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}+\xi\frac{\mathrm{d}Z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}-(\xi^2+\nu^2)Z(\xi)=0. \tag{8.3.23}$$

此为虚宗量贝塞尔方程, 其中 $\nu=\pm\mathrm{i}\frac{|p|}{2}$. 方程 (8.3.23) 的两个线性无关解是第一类和第二类虚宗量贝塞尔函数, 即

$$I_\nu(\xi)=\mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}\xi),\quad K_\nu(\xi)=\frac{\pi\mathrm{i}^{\nu+1}}{2}H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}\xi), \tag{8.3.24}$$

式中 J_ν 为第一类贝塞尔函数. $H_\nu^{(1)}$ 为第一类汉克尔函数.

显然用变数 p 标记的特解 (8.3.21) 构成宇宙场方程 (8.3.14) 的正频模解集 $\{u_p(\alpha,\beta)\}$, 其中模函数必须满足如下形式的正交归一条件:

$$(u_p(\alpha,\beta),u_q(\alpha,\beta))=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}\beta\left[u_p(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha}u_q^*(\alpha,\beta)-u_q^*(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha}u_p(\alpha,\beta)\right]=\delta_{pq}. \tag{8.3.25}$$

因而可将宇宙场 $\Psi(\alpha,\beta)$ 按 $\{u_p(\alpha,\beta)\}$ 展开为

$$\Psi(\alpha,\beta)=\sum_p[c_pu_p(\alpha,\beta)+c_p^+u_p^*(\alpha,\beta)]. \tag{8.3.26}$$

显然这里定义了一种由湮没算符 c_p 和产生算符 c_p^+ 描述的宇宙 Fock 空间. 算符 c_p,c_p^+ 互为厄密共轭, 其对易关系可由 ψ,P_ψ 的等时对易子式 (8.3.20) 导出为

$$[c_p,c_{p'}^+]=\delta_{pp'},[c_p,c_{p'}]=[c_p^+,c_{p'}^+]=0. \tag{8.3.27}$$

若定义基态 $|0\rangle$("nothing" 态)

$$c_p|0\rangle=0,\quad\forall p\in\mathbf{R}, \tag{8.3.28}$$

则宇宙 Fock 空间的一般占有态可表示为

$$\{c_{p_1}^+ c_{p_2}^+ \cdots |0\rangle\}. \tag{8.3.29}$$

由于非静态度规 (8.2.1) 使得宇宙场方程 (8.3.14) 中的势项显含时间, 因而, 可定义与过去某一初态相对应的 in 场和与未来某一末态相对应的 out 场, 而 in 场和 out 场的"失配"将导致宇宙的创生, 其创生宇宙的分布规律可通过计算 in 场、out 场之间的 Bogolubov 变换而得到.

注意到当 $\alpha \to -\infty$ (即 $\xi \to 0$) 时, 势项 $V(\alpha)$ 渐近为零, 因而满足方程 (8.3.14) 的渐近平直的正频模函数应该为

$$u_p(\alpha,\beta) \to \exp\left(\mathrm{i}p\frac{\beta}{\rho} - \mathrm{i}|p|\alpha\right). \tag{8.3.30}$$

首先考虑当 $\nu = +\mathrm{i}\dfrac{|p|}{2}$ 时, 因为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|p|\alpha} = \mathrm{e}^{-2\nu\alpha} = (\mathrm{e}^{2\alpha})^{-\nu} \sim \xi^{-\nu} \quad \left(\nu = +\mathrm{i}\frac{|p|}{2}\right),$$

而

$$I_\nu^*(\xi) = [\mathrm{i}^{-\nu} J_\nu(\mathrm{i}\xi)]^* \sim \xi^{-\nu} \quad (\text{当 } \xi \to 0 \text{ 时}),$$

故 in 场正频模函数应取为

$$u_p^{\mathrm{in}}(\alpha,\beta) = N_1 \exp\left(\mathrm{i}p\frac{\beta}{\rho}\right) I_\nu^*(\xi) \quad \left(\nu = +\mathrm{i}\frac{|p|}{2}\right). \tag{8.3.31}$$

至于 out 场的正频模函数, 显然应该作如下的选择:

$$u_p^{\mathrm{out}}(\alpha,\beta) = N_2 \exp\left(\mathrm{i}p\frac{\beta}{\rho}\right) K_\nu^*(\xi) \quad \left(\nu = +\mathrm{i}\frac{|p|}{2}\right), \tag{8.3.32}$$

这是因为当 $\alpha \to +\infty$ 时, 式 (8.3.32) 的渐近形式为

$$u_p^{\mathrm{out}}(\alpha,\beta) \to \exp\left(\mathrm{i}p\frac{\beta}{\rho}\right) \exp(-\alpha - 3\varepsilon \mathrm{e}^{2\alpha}), \tag{8.3.33}$$

因而, 它不但是动量算符 $p_\alpha = -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}$ 具有负本征值的本征态, 而且, 由于

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\alpha}} = -6\varepsilon \mathrm{e}^{2\alpha}\dot{\alpha}, \tag{8.3.34}$$

使得这种模式在经典上对应于膨胀宇宙.

式 (8.3.31) 和 (8.3.32) 中的 N_1 和 N_2 是归一化常数. 利用关系式

$$
\begin{aligned}
&J_\nu^*(z) = J_{-\nu}(-z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi} J_{-\nu}(z), \\
&H_\nu^{(1)}(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{-\mathrm{i}\sin\nu\pi}, \\
&H_\nu^{(1)*}(z) = \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\nu\pi} J_{-\nu}(z) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi} J_\nu(z)}{-\mathrm{i}\sin\nu\pi}, \\
&J_\nu^{(2)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} J_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} J_\nu(z) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}
\end{aligned}
\tag{8.3.35}
$$

(ν, z 均为复数)

及归一化条件 (8.3.25) 则可求得

$$
N_1 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/2} \rho^{-1/2} \exp(-|p|\pi/2)[\sinh(|p|\pi/2)]^{-1/2},
$$

$$
N_2 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \rho^{-1/2}[\cosh(|p|\pi/2)]^{-1/2}. \tag{8.3.36}
$$

作类似的分析可以得到, 当取 $\nu = -\mathrm{i}\dfrac{|p|}{2}$ 时, 对应于 in 场和 out 场的正频模分别为

$$
\left.
\begin{aligned}
&u_p^{\mathrm{in}'}(\alpha,\beta) = N_1' \exp\left(\mathrm{i}p\frac{\beta}{\rho}\right) I_\nu(\xi), \\
&u_p^{\mathrm{out}'}(\alpha,\beta) = N_2' \exp\left(\mathrm{i}p\frac{\beta}{\rho}\right) K_\nu(\xi)
\end{aligned}
\right.
\quad \left(\nu = -\mathrm{i}\frac{|p|}{2}\right). \tag{8.3.37}
$$

显然, $u_p^{\mathrm{in}'}(\alpha,\beta)$ 和 $u_p^{\mathrm{out}'}(\alpha,\beta)$ 也应满足归一化条件 (8.3.25). 然而, 因为

$$
(u_p^{\mathrm{in}'}, u_q^{\mathrm{in}'}) = \frac{4}{\pi} N'^2_1 \delta_{pq} \rho \exp(-|p|\pi) \sinh(|p|\pi/2),
$$

$$
(u_p^{\mathrm{out}'}, u_q^{\mathrm{out}'}) = -4\pi N'^2_2 \rho \delta_{pq} \cosh(|p|\pi/2), \tag{8.3.38}
$$

由此可见, 虽然 $u_p^{\mathrm{in}'}(\alpha,\beta)$ 能归一, 但无论如何选择常数 N'_2 都不能使 $u_p^{\mathrm{out}'}(\alpha,\beta)$ 归一. 所以, 由于归一化条件的限制, 必须舍去 $\nu = -\mathrm{i}\dfrac{|p|}{2}$, 而只取 $\nu = +\mathrm{i}\dfrac{|p|}{2}$.

现在, 可将满足式 (8.3.14) 的宇宙场 $\Psi(\alpha,\beta)$ 分别按正频 in 模和 out 模展开为

$$
\Psi(\alpha,\beta) = \sum_p [c_p^{\mathrm{in}} u_p^{\mathrm{in}}(\alpha,\beta) + c_p^{\mathrm{in}+} u_p^{\mathrm{in}*}(\alpha,\beta)], \tag{8.3.39}
$$

$$
\Psi(\alpha,\beta) = \sum_p [c_p^{\mathrm{out}} u_p^{\mathrm{out}}(\alpha,\beta) + c_p^{\mathrm{out}+} u_p^{\mathrm{out}*}(\alpha,\beta)], \tag{8.3.40}
$$

式中 $c_p^{\text{in}}, c_p^{\text{in}+}$ 和 $c_p^{\text{out}}, c_p^{\text{out}+}$ 分别为对应于 in 场和 out 场的湮没算符和产生算符, 它们满足式 (8.3.27) 的对易关系. 而 in 真空 $|0,\text{in}\rangle$ 和 out 真空 $|0,\text{out}\rangle$ 则分别由下式定义:

$$c_p^{\text{in}}|0,\text{in}\rangle = 0, \quad \forall p \in R, \tag{8.3.41}$$

$$c_p^{\text{out}}|0,\text{out}\rangle = 0, \quad \forall p \in R. \tag{8.3.42}$$

in 场与 out 场之间的 Bogolubov 变换由下式定义:

$$u_p^{\text{out}}(\alpha,\beta) = \sum_q [c_1(p,q)u_q^{\text{in}}(\alpha,\beta) + c_2(p,q)u_q^{\text{in}*}(\alpha,\beta)]. \tag{8.3.43}$$

作内积 $(u_p^{\text{out}}(\alpha,\beta), u_q^{\text{in}}(\alpha,\beta))$ 和 $(u_p^{\text{out}}(\alpha,\beta), u_q^{\text{in}*}(\alpha,\beta))$ 可求得 Bogolubov 变换系数为

$$c_1(p,q) = -\mathrm{i}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2|p|x}}\right)^{1/2}\delta_{pq}, \tag{8.3.44}$$

$$c_2(p,q) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2|p|x}-1}\right)^{1/2}\delta_{p_1-q_0}, \tag{8.3.45}$$

显然式 (8.3.44) 和 (8.3.45) 满足

$$(u_p^{\text{out}}(\alpha,\beta), u_p^{\text{out}}(\alpha,\beta)) = \sum_q (|c_1(p,q)|^2 - |c_2(p,q)|^2) = 1. \tag{8.3.46}$$

自式 (8.3.39), (8.3.40) 和 (8.3.43), 还可得到 $\{c_p^{\text{out}}, c_p^{\text{out}+}\}$ 与 $\{c_p^{\text{in}}, c_{p_1}^{\text{in}+}\}$ 之间的变换关系为

$$c_p^{\text{out}} = \frac{1}{AA^*-BB^*}(c_p^{\text{in}}u_p^{\text{in}}A^* - c_p^{\text{in}+}u_p^{\text{in}*}B), \tag{8.3.47}$$

$$c_p^{\text{out}+} = \frac{1}{AA^*-BB^*}(c_p^{\text{in}+}u_p^{\text{in}*}A - c_p^{\text{in}}u_p^{\text{in}}B^*),$$

式中

$$A = \sum_q c_1(p,q)u_q^{\text{in}}(\alpha,\beta), \quad B = \sum_q c_2^*(p,q)u_q^{\text{in}}(\alpha,\beta).$$

于是, 对应于第 p 模式, 宇宙从“nothing”(即 in 真空) 中创生的平均数目为

$$N_p = \langle 0,\text{in}|c_p^{\text{out}+}c_p^{\text{out}}|0,\text{in}\rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{2x|p|}-1}. \tag{8.3.48}$$

如将式 (8.3.48) 改写成

$$N_p = \frac{1}{\exp(\varepsilon/k_BT)-1}, \tag{8.3.49}$$

式中 $\varepsilon = c|p|, T = c/2\pi k_B, k_B$ 为 Boltzmann 常量. 很显然, 这是一种普朗克分布, 表明创生宇宙遵从温度正比于 c 的普朗克分布规律.

下面探讨模式的标记 p 的意义. 希格斯场的真空处, 体系的哈密顿量用变量 $\alpha=\ln(a\varphi)$ 和 $\beta=\ln\varphi$ 可以表示为

$$H=-\frac{1}{12\varepsilon\mathrm{e}^{2\alpha}}P_\sigma^2+\frac{1}{2(6\varepsilon+1)\mathrm{e}^{2\alpha}}P_\beta^2-3\varepsilon\mathrm{e}^{2\alpha}, \tag{8.3.50}$$

式中 P_α,P_β 为与变量 α,β 相对应的正则动量

$$P_\alpha=-6\varepsilon\mathrm{e}^{2\alpha}\dot{\alpha},\quad P_\beta=(6\varepsilon+1)\mathrm{e}^{2\alpha}\dot{\beta}. \tag{8.3.51}$$

注意到动量算符 $P_\beta=-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial\beta}$ 的本征值为 $\sqrt{\dfrac{6\varepsilon+1}{6\varepsilon}}p$, 因而 p 与 φ 场的经典能量

$$E=\frac{p^2}{12\varepsilon\mathrm{e}^{2\alpha}}=\frac{p^2}{12\varepsilon a^2\varphi^2} \tag{8.3.52}$$

有关. 由此可见, 创生宇宙的分布规律 (8.3.48) 实际上是代表以 p 为标记的具有一定能量密度的那些宇宙的平均数目.

显然, 本节得到的创生宇宙, 即在无任何其他物质存在时, 在希格斯场的真空处宇宙仍然可以通过量子隧道效应从 “无” 到 “有” 地创生, 这在真空经典爱因斯坦引力理论中是得不到的. 这表明, 在引力的量子效应不能忽略的区域, 诱导引力理论和爱因斯坦引力理论有显著的区别.

8.4 σ 模型的宇宙波函数

本节讨论诱导引力理论中具有标量–旋量相互作用的 σ 模型的宇宙波函数.

诱导引力理论的拉格朗日具有形式

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\varepsilon\phi^2R-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi). \tag{8.4.1}$$

诱导引力常数 $G_{\mathrm{ind}}=(8\pi\varepsilon\phi^2)^{-1}$, 势在 ϕ_0 处有稳定极小值, 并且在此处有 $G_{\mathrm{ind}}(\phi_0)=G_N$.

R-W 度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\frac{a^2(t)}{\left(1+\dfrac{k}{4}r^2\right)^2}[\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2]. \tag{8.4.2}$$

我们考虑闭宇宙, $k=1$.

σ 模型的拉格朗日具有形式

$$\mathscr{L}_m=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial_\nu\tilde{\phi}+\frac{m^2}{2}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{4}\tilde{\phi}^4+\frac{\mathrm{i}}{2}[\bar{\psi}r^\mu\nabla_\mu\psi-(\nabla_\mu\bar{\psi})r^\mu\psi]-g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi, \tag{8.4.3}$$

式中 $\tilde{\phi}$ 为标量场, ψ 为旋量场, $\lambda \sim g^2 \ll 1$, m 为标量场的质量, 且 $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(t), \psi = \psi(t), \bar{\psi} = \psi^{\dagger}\tilde{r}_0, \tilde{r}_0$ 为平空间 Dirac 矩阵, $\psi^{\dagger}$ 为 ψ 的共轭转置, r^{μ} 为弯曲空间 Dirac 矩阵, $\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}, \partial_{\mu}$ 为普通微分, $\Gamma_{\mu} = -\dfrac{1}{4}r^{\nu}r_{\mu;\nu}$.

我们知道平直空间 Dirac 矩阵满足关系:

$$\tilde{r}_i\tilde{r}_j + \tilde{r}_j\tilde{r}_i = 2\eta_{ij}, \tag{8.4.4}$$

式中

$$\eta_{ij} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

式中 $\tilde{r}_0$ 和 $\tilde{r}_j$ 分别具有形式

$$\tilde{r}_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{8.4.5}$$

这里 I 为 2×2 单位矩阵, σ_j 为 Pauli 矩阵.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

而弯曲空间 Dirac 矩阵满足关系

$$r^{\mu}r^{\nu} + r^{\nu}r^{\mu} = 2g^{\mu\nu}. \tag{8.4.6}$$

我们有

$$\begin{gathered} r^0 = \tilde{r}_0, \quad r^1 = -\frac{1 + \dfrac{1}{4}r^2}{a(t)}\tilde{r}_1, \\ r^2 = -\frac{1 + \dfrac{1}{4}r^2}{a(t)r}\tilde{r}_2, \quad r^3 = -\frac{1 + \dfrac{1}{4}r^2}{a(t)r\sin\theta}\tilde{r}_3. \end{gathered} \tag{8.4.7}$$

$$\begin{gathered} r_0 = \tilde{r}_0, \quad r_1 = \frac{a(t)}{1 + \dfrac{1}{4}r^2}\tilde{r}_1, \\ r_2 = \frac{a(t)r}{1 + \dfrac{1}{4}r^2}\tilde{r}_2, \quad r_3 = \frac{a(t)r\sin\theta}{1 + \dfrac{1}{4}r^2}\tilde{r}_3. \end{gathered} \tag{8.4.8}$$

因此, 经过计算, 可以得到

$$\Gamma_0 = 0,$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}(t)}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{r}_0\tilde{r}_1,$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{a}(t)r}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{r}_0\tilde{r}_1 - \frac{1-\frac{1}{4}r^2}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{r}_1\tilde{r}_2\right],$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{a}(t)r\sin\theta}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{r}_0\tilde{r}_3 - \frac{1-\frac{1}{4}r^2}{1+\frac{1}{4}r^2}\sin\theta\tilde{r}_1\tilde{r}_3 - \cos\theta\tilde{r}_2\tilde{r}_3\right]. \tag{8.4.9}$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_m = &\frac{1}{2}(\partial_t\tilde{\phi})^2 + \frac{m^2}{2}\tilde{\phi}^2 - \frac{\lambda}{4}\tilde{\phi}^4\\ &+\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\psi^\dagger\partial_t\psi - \partial_t\psi^\dagger\psi + \frac{2}{ar}\left(1-\frac{r^2}{4}\right)\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\right.\\ &\left.+\frac{1}{ar}\left(1+\frac{r^2}{4}\right)\cot\theta\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_2\psi\right] - g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi.\end{aligned} \tag{8.4.10}$$

引入共形时间 η, 使 $\mathrm{d}t = \mathrm{i}a\mathrm{d}\eta$, 由式 (8.4.10) 可以得到欧氏作用量 $\bar{I}$

$$\begin{aligned}\bar{I} = \int \mathrm{d}\eta[&-6\varepsilon\phi a\phi' a' - 3\varepsilon a'^2\phi^2 - 3\varepsilon\phi^2a^2 + \varepsilon\Lambda\phi^2a^4\\ &+\frac{1}{2}a^2\phi'^2 - a^4V(\phi) + (\psi^\dagger\psi' - \psi^{\dagger\prime}\psi)a^3\\ &+\mathrm{i}k_0\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi a^3 + a^2\tilde{\phi}'^2 + m^2a^4\tilde{\phi}^2 - \frac{\lambda}{2}a^4\tilde{\phi}^4 - 2g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi a^4],\end{aligned} \tag{8.4.11}$$

这里已引入宇宙常数 Λ, 并舍去了常数及表面项, “′” 表示对 η 求导, k_0 为常数.

令 $\alpha = a\phi, \chi = \ln\phi$, 则有

$$\begin{aligned}\bar{I} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\eta\Big[&-\alpha'^2 + c_0^2\alpha^2\chi'^2 - \alpha^2 + \frac{\Lambda}{3}\alpha^4\mathrm{e}^{-2x}\\ &-\frac{1}{3\varepsilon}\alpha^4\mathrm{e}^{-4\chi}V(\chi) + \frac{1}{3\varepsilon}(\psi^\dagger\psi' - \psi^{\dagger\prime}\psi)\alpha^3\mathrm{e}^{-3\chi}\\ &+\frac{\mathrm{i}k_0}{3\varepsilon}\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\alpha^3\mathrm{e}^{-3\chi} + \frac{1}{3\varepsilon}\alpha^2\mathrm{e}^{-2\chi}\tilde{\phi}'^2\\ &+\frac{1}{3\varepsilon}m^2\alpha^4\mathrm{e}^{-4\chi}\tilde{\phi}^2 - \frac{\lambda}{6\varepsilon}\alpha^4\mathrm{e}^{-4\chi}\tilde{\phi}^4\\ &-\frac{2}{3\varepsilon}\alpha^4\mathrm{e}^{-4\chi}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\Big],\end{aligned} \tag{8.4.12}$$

式中

$$c_0 = \frac{1+6\varepsilon}{6\varepsilon}.$$

W-D 方程具有形式

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha^2}-\frac{1}{c_0^2\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}-\alpha^2+\frac{\Lambda}{3}\alpha^4\mathrm{e}^{-4\chi}-\frac{1}{3\varepsilon}\alpha^4\mathrm{e}^{-4\chi}V(x)-\frac{3\varepsilon}{\alpha^2\mathrm{e}^{-2\chi}}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\phi}^2}\right.$$
$$+\frac{1}{3\varepsilon}m^2\alpha^4\mathrm{e}^{-4\chi}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{6\varepsilon}\alpha^4\mathrm{e}^{-4\chi}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{3\varepsilon}\alpha^4\mathrm{e}^{-4\chi}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi$$
$$\left.+\frac{\mathrm{i}k_0}{3\varepsilon}\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\alpha^3\mathrm{e}^{-3\chi}\right]\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})=0. \tag{8.4.13}$$

严格求解方程 (8.4.13) 非常困难, 但可用 WKB 方法来近似求解, 为此需设 $\chi,\tilde{\phi}$ 初始时变化足够缓慢, 即 $\chi\gg 1,\tilde{\phi}\gg 1$, 令

$$A=\alpha^2-\frac{\mathrm{e}^{-4\chi}}{3}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^4,$$

$$B=-\frac{k_0}{3\varepsilon}\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\alpha^3\mathrm{e}^{-3\chi},$$
$$A+B\mathrm{i}=R_{(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta(\alpha)},$$

其中

$$R^2(\alpha)=\left[1-\frac{\mathrm{e}^{-4\chi}}{3}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2\right]^2\alpha^4$$
$$+\frac{k_0^2}{9\varepsilon}(\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\mathrm{e}^{-3\chi})^2\alpha^6,$$

$$\tan\Theta(\alpha)=\frac{-\dfrac{k_0}{3\varepsilon}\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\mathrm{e}^{-3\chi_\alpha}}{1-\dfrac{\mathrm{e}^{-4\chi}}{3}\left(\Lambda-\dfrac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\dfrac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\dfrac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2}, \tag{8.4.14}$$

从而

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})\sim N\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}\Theta(\alpha)}}{\sqrt[4]{R(\alpha)}}\exp\left[\pm\int_0^\alpha\sqrt{R(\alpha)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\Theta(\alpha)}\mathrm{d}\alpha\right]. \tag{8.4.15}$$

为便于讨论, 我们给出式 (8.4.15) 当 $\alpha\to 0$ (足够小) 时和 $\alpha\to\infty$ (足够大) 时的渐近解. 当 $\alpha\to 0$ 时:

(1) 若 $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4\chi}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2\ll 1$, 则式 (8.4.14) 可简化为

$$R(\alpha)\sim\alpha^2,\quad \Theta(\alpha)\sim\frac{k_0}{3\varepsilon}\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\mathrm{e}^{-3\chi}\cdot\alpha=c_1\cdot\alpha, \tag{8.4.16}$$

式中

$$c_1=\frac{k_0}{3\varepsilon}\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\mathrm{e}^{-3\chi}.$$

这里由式 (8.4.15) 可得

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi}) \sim N\frac{\mathrm{e}^{\pm\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{\frac{ik}{3\varepsilon}\psi^\dagger\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\mathrm{e}^{-3\chi}\cdot\frac{\alpha}{4}}. \tag{8.4.17}$$

而当 $\alpha\to 0$ 时, 通常的诱生引力理论解为 $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{\pm\frac{\alpha^2}{2}}$. 因此考虑旋量场后, 宇宙波函数将移动一个相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{c_1}{4}\alpha}$, 由于这里 a 为一次幂, 可以看出旋量场的贡献是很显著的, 当旋量场不存在时, 这个修正自然消失. 由于可观测量为 $|\Psi|^2$, 因此附加的因子并不影响“测量”结果.

(2) 若 $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4\chi}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2\gg 1$, 则式 (8.4.14) 可简化为

$$\tan\Theta(\alpha)\sim\frac{1}{\alpha},\quad R(\alpha)\sim c_1\alpha^3. \tag{8.4.18}$$

从而

$$\Theta(\alpha)\to\frac{\pi}{2}.$$

这时

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})\sim\frac{1}{\sqrt[4]{c_1\alpha^3}}\mathrm{e}^{\pm\frac{2}{5}\sqrt{c_1}\alpha^{\frac{5}{2}}}. \tag{8.4.19}$$

显见此时宇宙波函数与不存在旋量场时相比, 有较为显著的变化.

当 $\alpha\to\infty$ (即 α 足够大) 时:

(1) 若 $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4\chi}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2\gg 1$, 则式 (8.4.14) 可简化为

$$R(\alpha)\sim\frac{\mathrm{e}^{-4\chi}}{3}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^4\sim\beta\cdot\alpha^4. \tag{8.4.20}$$

$$\Theta(\alpha)\sim-\frac{c_1}{\beta\alpha}.$$

式中

$$\beta=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4\chi}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right).$$

这时波函数为

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})\sim N\frac{1}{\sqrt[4]{\beta}\alpha}\mathrm{e}^{\pm\frac{\sqrt{\beta}\alpha^3}{3}}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{c_1}{4\sqrt{\beta}}\alpha^2}. \tag{8.4.21}$$

由此可看出旋量场对波函数的贡献有两部分, 一部分是场相互作用部分 $\frac{2}{\varepsilon}g\psi^\dagger\tilde{\phi}\psi$,

其对波函数的影响和通常标量场一样, 一部分是场相互作用部分 $\frac{2}{\varepsilon}g\psi^\dagger\tilde{\phi}\psi$, 另一部分是类似于式 (8.4.17) 中相移因子的贡献, 此贡献是旋量场所特有的, 但由于这时 a 为二次幂, 旋量场的影响已减少.

若 $\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi > \Lambda - \frac{1}{\varepsilon}V(\chi) + \frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2 - \frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4$, 则

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi}) \sim N\frac{1}{\sqrt[4]{\beta}}\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\pm\frac{\sqrt{\beta}}{3}\alpha^3}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{c_1}{4}\frac{\alpha^2}{\sqrt{\beta}}}. \tag{8.4.22}$$

若 $\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi < \Lambda - \frac{1}{\varepsilon}V(\chi) + \frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2 - \frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4$, 则

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi}) \sim N'\frac{1}{\sqrt[4]{-\beta}}\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\pm\frac{\sqrt{-\beta}}{3}\alpha^3}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\sqrt{-\beta}}}. \tag{8.4.23}$$

由此我们可以看出, 旋量部分在宇宙“创生”初期影响很显著, 而随着宇宙的膨胀, 旋量的影响越来越小, 当宇宙进入洛伦兹区域 $\left(\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi < \Lambda - \frac{1}{\varepsilon}V(\chi) + \frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2 - \frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4\right)$ 后, 旋量场行为和通常标量场一样.

(2) 若 $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4\chi}\left(\Lambda - \frac{1}{\varepsilon}V(\chi) + \frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2 - \frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4 - \frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2 \ll 1$, 则式 (8.4.14) 可简化为

$$R(\alpha) \sim c_1\alpha^3, \quad \tan\Theta(\alpha) \sim c_1\alpha. \tag{8.4.24}$$

此时波函数为

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi}) \sim N\frac{1}{\sqrt[4]{c_1 a}}\mathrm{e}^{\pm\frac{2}{5}\sqrt{c_1}\alpha^{\frac{5}{2}}}. \tag{8.4.25}$$

最终 ϕ 将落入 $\phi_0, V(\phi)$ 取稳定最小值. 此时由于 ϕ 为常数, 所以诱导引力的宇宙波函数回到哈特–霍金理论的对应情况.

第9章 宇宙创生过程的量子特性

Ashtekar 等 (2006) 在圈量子宇宙学中引入了一个改进的哈密顿约束算符, 然后采用解析和数值方法研究了具有无质量标量场的平直各向同性宇宙模型的量子动力学, 发现标量场依然可视为自然时, 大爆炸被量子反弹取代, 量子演化仍然跨越深普朗克区. 在通常的圈量子宇宙学中采用的哈密顿约束, 即使在低物质密度区量子反弹也会发生. 采用改进后的哈密顿约束算符, 则发现量子反弹只会在物质密度为普朗克密度时才发生. 因此, 新的量子动力学保留了圈量子宇宙学中现有宇宙演化的主要特征, 又消除了它们的瑕疵.

近年来, 人们在圈量子宇宙学的背景中对空间平直、各向同性的宇宙模型进行了广泛的研究. 通过引入一个概念性框架和一些数值和解析运算构建量子理论中的"物理区"(physical sector). 这些方法使我们能够系统地探索引力区和物质区的量子几何效应, 从而不断拓展人们在圈量子宇宙学中的研究成果.

如果模型中的唯一物质源为一无质量标量场, 那么每一个经典解都含有一个奇点, 这与 Wheeler-De Witt 理论一致. 因此, 为了揭示圈量子宇宙学下几何量子本质所显示的效应, 人们对这一模型做了详细的研究. 分析表明: ① 标量场的作用为一内在的时钟, 因而它体现了"自然时"的思想; ② 物理的希尔伯特空间、Dirac 可观测量和半经典态能够严格地建立; ③ 通过对哈密顿约束的数值求解, 发现晚期半经典态的反向演化中, 大爆炸会被量子反弹取代. 同时, 宇宙的量子演化一定会跨越深普朗克区.

这些结论是非常诱人的, 它越来越使人们相信圈量子引力的量子几何效应为许多长期存在的问题提供了一把钥匙. 对理论中的物理区的掌控和数值方法的可行性也使人们能够更详细地分析量子反弹时的物理过程. 这些详细的研究丰富了人们对半经典区和深普朗克区的理解. 但同时也显示出该理论框架存在严重的局限性: 物质密度的临界值 (发生量子反弹时的物质密度)ρ_{crit} 随着标量场的动量 p_ϕ 的增加会变得任意小. 现在, 量值大的 p_ϕ 是允许的, 尤其是晚期的半经典方案. 由于量子效应不可能对低密度半经典近似做很大的修正, 所以这一局限性是该理论一个严重的缺陷. 然而, 由于为得到有效方程而采用的近似在深普朗克区不再成立, 人们很少认为这是由圈量子宇宙学中量子方程引起的结果, 而是把它视为由近似方法而引起的一种人为的瑕疵. 仔细分析表明, 问题在于量子方程本身. 因此, 尽管由圈量子宇宙学中约束算符预测的量子演化具有许多诱人的特征, 但是它有很大的

一个弊病. 于是一个很关键的问题是我们能否以一种微妙的方式改变哈密顿约束算符的定义, 使得我们既能克服这一问题, 又能使演化中所有诱人的特征都能得到保留.

Ashtekar 引入的新的哈密顿约束算符所采用的原理基本相同, 但是曲率算符是由更加直接地应用物理思想而构成的. 最终的约束算符的结构发生了很大的变化, 但是通过适当的调整, 它的形式实际上非常简单. 它的 "Wheeler-De Witt (WDW)" 极限自然而然地来自理论中 '协变因子排序'. 由新的量子约束的解建立物理的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\rm phy}$, 在此空间中引入一组完备的 Dirac 可观测量, 构建合适的态 (在晚期为半经典态, 即 "现在") 和研究反向演化. 在反向演化中, 大爆炸再一次被量子反弹所取代. 不管 p_ϕ 的取值和初始值条件如何, 大反弹精确地发生在物质密度进入普朗克区之时.

9.1 改进的约束算符

这一节分成三部分, 前两部分我们引入一些关键的新元素, 第三部分将它们结合起来构造出新的哈密顿约束.

9.1.1 基本表述

首先介绍一下必要的背景知识和表示法. 在处理平直且各向同性模型的系统哈密顿量时, 通常先引入一个基元 ν 并将所有的积分都限制在这个基元内. 固定一个基准的平直度规 ${}^o q_{ab}$, 用 V_o 表示这个几何中基元 ν 的体积. 联络 A_a^i 和密度加权标架 E_i^a 这两个引力相空间变量可以写成

$$A_a^i = cV_o^{-\frac{1}{3}}\,{}^o w_a^i, \quad E_i^a = pV_o^{-\frac{2}{3}}\sqrt{q_o}\,{}^o \mathrm{e}_i^a, \tag{9.1.1}$$

式中 $({}^o w_a^i, {}^o \mathrm{e}_i^a)$ 是一组正交共标架且与 ${}^o q_{ab}$ 相容, 可以用于单位基元 ν 的边. 于是对称的约化引力相空间只有二维, 点的坐标用 (c,p) 表示. 有了基元 ν, 坐标 (c,p) 对基准度规的选择就不敏感了, 即在 ${}^o q_{ab} \to \alpha^2\,{}^o q_{ab}$ 的重新标度下保持不变. 基本泊松括号为

$$\{c,p\} = \frac{8\pi G\gamma}{3}, \tag{9.1.2}$$

式中 γ 是 Barbero-Immirzi 因子, 哈密顿约束的引力部分可以写成

$$C_{\rm grav} = -\gamma^{-2}\int_\nu \mathrm{d}^3x\varepsilon_{ijk}e^{-1}E^{ai}E^{bj}F_{ab}^k = -\frac{6}{\gamma^2}c^2\sqrt{p}, \tag{9.1.3}$$

式中 $e := \sqrt{|\mathrm{det}E|}$.

自 Dirac 以来, 量子理论通常都要构造一种运动描述. 希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ 是沿实线玻尔紧致化的平方可积函数空间 $L^2\,(\mathbb{R}_{\text{Bohr}}, \mathrm{d}\mu_{\text{Bohr}})$. 为了具体地表述态, 我们选择算符 $\hat{p}$ 为对角形式的表象. $\hat{p}$ 的本征态用 μ 表示, 它们满足正交关系

$$\langle \mu_1 | \mu_2 \rangle = \delta_{\mu_1, \mu_2}. \tag{9.1.4}$$

由于右边是克罗尼克 δ 分布而不是狄拉克 δ 分布, 所以 $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ 中的典型态可以表示成一个可数和形式: $|\Psi\rangle = \sum\limits_n c^{(n)} |\mu_n\rangle$, 其中 $c^{(n)}$ 是复系数, 内积由下式给出:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \sum_n \bar{c}_1^{(n)} c_2^{(n)}. \tag{9.1.5}$$

基本算符 $\hat{p}$ 和 $\widehat{\exp\mathrm{i}\lambda(c/2)}$ 为

$$\hat{p}|\mu\rangle = \frac{8\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2}{6} \mu |\mu\rangle, \quad \widehat{\exp\frac{\mathrm{i}\lambda c}{2}} |\mu\rangle = |\mu + \lambda\rangle, \tag{9.1.6}$$

式中 λ 是任意实数. 由于引力联络 A_a^i 沿线段 $\lambda^o e_k^a$ 的 holonomies $h_k^{(\lambda)}$ 为

$$h_k^{(\lambda)} = \cos\frac{\lambda c}{2} \mathbb{I} + 2\sin\frac{\lambda c}{2} \tau_k. \tag{9.1.7}$$

式中 $\mathbb{I}$ 为 2×2 单位矩阵, 此算符的作用为

$$h_k^{(\lambda)} = \frac{1}{2}(|\mu + \lambda\rangle + |\mu - \lambda\rangle)\mathbb{I} + \frac{1}{\mathrm{i}}(|\mu + \lambda\rangle - |\mu - \lambda\rangle)\tau_k. \tag{9.1.8}$$

然而, 正如在完整的圈量子引力中没有与联络本身对应的算符一样, 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ 中也没有算符 $\hat{c}$.

为了描述量子动力学, 首先要在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ 引入一个能表示哈密顿约束 C_{grav} 且有好定义的算符. 由于没有对应于 c 本身的算符, 我们回到完整圈量子引力中约束的积分表示

$$C_{\text{grav}} = -\gamma^{-2} \int_v \mathrm{d}^3 x \varepsilon_{ijk} e^{-1} E^{ai} E^{bj} F_{ab}^i. \tag{9.1.9}$$

为了过渡到量子理论, 我们首先要将这个经典约束用基本变量 p 和 $h_k^{(\lambda)}$ 来表示, 因为他们有明显的量子意义. 和完整理论一样, 含标架的项可以写成

$$\varepsilon_{ijk} e^{-1} E^{aj} E^{bk} = \sum_k \frac{(\text{sgn}p)}{2\pi\gamma\lambda G V_o^{\frac{1}{3}}} \varepsilon^{abc} \omega_c^k \text{Tr}(h_k^{(\lambda)} \{h_k^{(\lambda)-1}, V\} \tau_i), \tag{9.1.10}$$

式中 $V = |p|^{3/2}$ 是由 p 定义度规的几何中基元 ν 的体积, holonomies $h_k^{(\lambda)}$ 可由沿线段 $\lambda^o e_k^a$ (沿基元 ν 的第 k 边长度为 λ 的部分) 计算得到. 注意到这个性质对于任意 λ 都是对的, 即使当 λ 是 p 的函数. 我们采用这种可能性, 最后确定合适的 λ.

对于场强 F^i_{ab}, 我们采用规范理论中的标准表述. 考虑基元的 i-j 平面上的正方形 $\square_{ij}$, 它的边长相对于基准度规 ${}^o q_{ab}$ 为 $\lambda V_o^{1/3}$, 从而曲率的"ab 分量"为

$$F^k_{ab} = -2 \lim_{Ar_\square \to 0} \mathrm{tr}\left(\frac{h^{(\lambda)}_{\square_{ij}} - 1}{\lambda^2 V_o^{2/3}}\right)\tau^k \omega^i_a \omega^j_b, \tag{9.1.11}$$

式中 $Ar_\square$ 是我们考虑的正方形的面积, 围绕正方形 $\square_{ij}$ 的 holonomies $h^{(\mu_o)}_{\square_{ij}}$ 就是沿正方形 4 条边的对应量的乘积

$$h^{(\lambda)}_{\square_{ij}} = h^{(\lambda)}_i h^{(\lambda)}_j (h^{(\lambda)}_i)^{-1} (h^{(\lambda)}_j)^{-1}. \tag{9.1.12}$$

由式 (9.1.10) 和 (9.1.11), C_{grav} 可以写成

$$C_{\mathrm{grav}} = \lim_{Ar_\square \to 0} C^{(\lambda)}_{\mathrm{grav}},$$

$$\begin{aligned} C^{(\lambda)}_{\mathrm{grav}} &= -\frac{4\mathrm{sgn}p}{8\pi\gamma^3\lambda^3 G}\sum_{ijk}\varepsilon^{ijk}\mathrm{tr}(h^{(\lambda)}_i h^{(\lambda)}_j (h^{(\lambda)}_i)^{-1}(h^{(\lambda)}_j)^{-1} h^{(\lambda)}_k \{h^{(\lambda)-1}_k, V\}), \\ &= \sin\lambda c\left[-\frac{4}{8\pi G\gamma^3}\frac{\mathrm{sgn}p}{\lambda^3}\sum_k \mathrm{tr}\tau_k h^{(\lambda)}_k\{h^{(\lambda)-1}_k, V\}\right]\sin\lambda c. \end{aligned} \tag{9.1.13}$$

为了以后的方便, 最后一步我们使用了对称排序. 现在, 约束已经用具有明显量子性质的基本变量表示了, 所以我们可以直接写出量子算符 $\hat{C}^{(\lambda)}_{\mathrm{grav}}$. 但是, 该算符不存在 $Ar_\square \to 0$ 的极限. 这不是偶然的, 因为如果这种极限存在, 就应该有一个好定义的与曲率 F^i_{ab} 对应的局域算符, 而我们知道即使在完整圈量子引力中, 当完整算符有好定义时, 也不存在表示联络和曲率的局域算符. 这种特性与圈量子引力中黎曼几何的量子性质有关. 圈量子宇宙认为这种极限的不存在提示我们可能存在一种量子几何, 它使得面积算符的本征值是分立的, 而且有一个不为零的最小本征值 Δ, 即面积间隔. 所以, 从物理上考虑, 量子几何告诉我们, 让 $Ar_\square$ 趋向零是不合适的, 应该考虑存在面积间隔.

以上我们都是沿用标准圈量子宇宙的推论, 不同之处在于我们将怎么应用这些思想. 现在我们认为: 由于面积量子化涉及物理几何, 我们应该将圈 $\square_{ij}$ 收缩, 直到它包围的面积用度规 q_{ab} 计算为 Δ. 由于基元的表面积是 $|p|$, 而且 $\square_{ij}$ 的边长是基元边长的 λ 倍, 我们可以为 λ 选择一个具体的函数 $\bar{\mu}(p)$

$$\bar{\mu}^2(p) = \Delta \equiv (2\sqrt{3}\pi\gamma)\ell^2_{\mathrm{P}}. \tag{9.1.14}$$

$\bar{\mu}$ 是相空间上的非平庸函数, 用现有的圈量子引力来处理时要求它为常数 μ_0. 如果我们以基矢 $|\mu\rangle$ 表示量子约束, 则约束算符是一个间距相等 (为 $4\mu_0$) 的差分算符. 在这个基矢下新的量子约束也相当于一个差分算符, 但差分算符的间距大小

取决于它作用的态 $|\mu\rangle$, 就是这一微妙的区别已经足以消除当前圈量子宇宙中的约束算符的主要弱点同时又保留我们希望有的物理性质. 从概念上讲, 这个新的表述对基本曲率算符有很重要的影响. 虽然在两种处理方法中, 曲率算符都是非局域的, 但已有理论中的非局域算符只取决于联络, 而新理论中的非局域算符却同时取决于联络和几何. 在经典极限下, 量子几何的影响可以忽略, 所以取经典极限时, 两种理论中的的曲率算符都退化为曲率 F_{ab} 的标准表示.

最后, 利用完整圈量子引力的启发可以有效地从物理上区别两种表述. 完整量子引力中均匀各向同性宇宙的某一邻域内, 应该能够确定宇称规范, 从而使我们能够讨论三度规 (而不是它们在微分同胚下的等效量). 考虑基于图的量子几何态, 同时, 为了简单起见, 我们关注固定的基元. 然后可以预测, 当标度因子 a 增长时, 基元中图的顶点数 N 将以 $N = K_0a^3$ 的方式增长, 其中 K_0 为一常数. 在完整圈量子引力的哈密顿约束中, 算符 F_{ab} 可用这些顶点估算. 一个自然的过程就是围绕每个顶点引入一个"单元立方体". 由于基元包含的立方体的个数 N 随 a 增长, 从而在固定基准度规下计算得到的表面积将以 $Ar^o_{\text{ele}} \sim (1/N)^{2/3} \sim 1/|p|$ 的方式减少. $\bar{\mu}$ 对 μ 的函数关系对于讨论小超空间宇宙学是很有用的. 固定边长为 μ_0, 也就是让它与量子态无关, 即忽略伴随宇宙膨胀发生的"新顶点的产生".

9.1.2 算符 $\widehat{\exp\mathrm{i}(\bar{\mu}c/2)}$

固定了 λ 为特殊函数 $\bar{\mu}(p)$ 后, 我们将式 (9.1.13) 中右边的 $\bar{\mu}$ 用 λ 代替, holonomies 和体积函数用对应的算符代替, 泊松括号用 $1/\mathrm{i}\hbar$ 乘以对易子代替, 便可以得到量子约束的表示式. 但是, 完成这一步必须首先定义 $\widehat{\cos(\bar{\mu}c/2)}$, $\widehat{\sin(\bar{\mu}c/2)}$, $\widehat{\exp\mathrm{i}(\bar{\mu}c/2)}$ 这三个算符. 这是一个很微妙的工作, 因为: ① 没有与 c 对应的也就没有与 $\bar{\mu}c$ 对应的算符; ② $\bar{\mu}$ 是 p 的函数, 所以 $\exp\mathrm{i}(\bar{\mu}c/2)$ 不能写成"基本变量" p 和 $\exp\mathrm{i}(kc/2)$ 的函数, 其中 k 是常数.

由几何方面考虑有助于完成这项工作. 从薛定谔希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ 中的态 $\tilde{\Psi}(\mu)$ 开始, 对于任意实数 k 我们有

$$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kc}{2}}}\,\tilde{\Psi}(\mu) = \tilde{\Psi}(\mu + k) \equiv \mathrm{e}^{k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}}\,\tilde{\Psi}(\mu). \tag{9.1.15}$$

可以看到, 算符 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kc}{2}}}$ 的作用是将态沿矢量场 $k\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}$ 拖曳. 现在, 由矢量场 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}$ 生成的微分同胚单参数族对希尔伯特空间 $\mathcal{H}^{\text{grav}}_{\text{kin}}$ 有好定义. 因此如果将 $\mathrm{e}^{k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}}$ 简单地理解为将态沿矢量场 $k\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}$ 拖曳一个单位仿射参数距离的算符, 那么方程 (9.1.15) 对希尔伯特空间 $\mathcal{H}^{\text{grav}}_{\text{kin}}$ 中的态 $\tilde{\Psi}(\mu)$ 仍然成立. 这自然让我们想到

$$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kc}{2}}}\,\tilde{\Psi}(\mu) = \mathrm{e}^{\bar{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}}\,\tilde{\Psi}(\mu). \tag{9.1.16}$$

方程右边告诉我们, 在有限微分同胚下, 通过沿矢量场 $\xi = \bar{\mu}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}$ 的积分曲线移动一个单位仿射参数距离可以形成 $\tilde{\Psi}(\mu)$ 的图像. 沿这个矢量场的仿射参数 v 为

$$v = K\mathrm{sgn}(\mu)|\mu|^{\frac{3}{2}}, \quad K = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3\sqrt{3}}}. \tag{9.1.17}$$

虽然算符 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\mu}c/2)}}$ 的几何意义很简单, 但是 v 是 μ 的一个相当复杂的函数, 因此在 μ 表象中这个算符的表示也很复杂

$$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\bar{\mu}c}{2}}}\,\tilde{\Psi}(\mu) = \tilde{\Psi}(\mathrm{sgn}(\tilde{\mu})|\tilde{\mu}|^{\frac{3}{2}}), \quad \tilde{\mu} = \mathrm{sgn}(\mu)|\mu|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{K}. \tag{9.1.18}$$

但是它是好定义的, 因为 $v(\mu)$ 是 μ 的可逆函数. 而且, 对于 $\mu \gg 1$, 算符的作用退化成以下形式:

$$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\bar{\mu}c}{2}}}\,\tilde{\Psi}(\mu) \approx \tilde{\Psi}(\mu + \bar{\mu}). \tag{9.1.19}$$

从“标准”圈量子引力分析中我们熟悉到, $\bar{\mu}$ 是由常数 μ_0 代替的 [方程 (9.1.15)]. 然而, 从严格表达式 (9.1.18) 可以清楚的看出, 对于很小的 μ, 这种“简单的替代”是不精确的.

算符 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\mu}c/2)}}$ 的作用非常复杂, 这恰好反应了一个事实: 由 $\hat{p}$ 的本征值决定的变量 μ 不能很好地用于矢量场 ξ. 现在我们将基 $|\mu\rangle$ 换成 $|v\rangle$. 并将这组基更直接地用于体积算符 $\hat{V}$(与基元 ν 相关):

$$\hat{V}|v\rangle = \left(\frac{8\pi\gamma}{6}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{|v|}{K}\ell_{\mathrm{P}}^{3}|v\rangle. \tag{9.1.20}$$

[由式 (9.1.17) 可知, μ 和 v 是无量纲的) 这些态矢也构成 $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}}$ 中的一组正交基: $\langle v_1|v_2\rangle = \delta_{v_1,v_2}$. 这两组基密切相关, 因为 $\hat{V}$ 和 $\hat{p}$ 互为对方的函数. 根据表象, 我们很容易使 $\Psi(v) = \tilde{\Psi}(\mu)$. 在 v 表象中, 算符 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\mu}c/2)}}$ 的表示很简单

$$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\bar{\mu}c}{2}}}\,\Psi(v) = \Psi(v+1). \tag{9.1.21}$$

因此, 接下来我们将采用 v 表象. 很多由新约束得到的表达式都比已有文献中的要更简单. 但必须注意, 那些文献中在 μ 表象中写出的表达式, 在这里是在 v 表象中写出的. 这个区别是采用新约束能消除以往理论中的弱点的关键.

注意到算符 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\mu}c/2)}}$ 是幺正的, 可以推广它的定义, 使得对于任意常数 k 有

$$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\bar{\mu}c}{2}}}\,\Psi(v) = \Psi(v+k). \tag{9.1.22}$$

对于任意常数 k, 我们都能得到 $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}}$ 上的一个由矢量场 ξ 生成的微分同胚单参数族的幺正表象. 在经典相空间中, 函数 $\bar{\mu}c/2$ 生成一个 (有限) 正则变换的单参数族.

这正好将 p 或 μ 的空间提升到了由矢量场 $\mu \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ 生成的微分同胚单参数族的相空间. 算符 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\bar{\mu}c}{2}}}$ 的作用将这种关系推进到了量子理论.

评论：算符 $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\bar{\mu}c}{2}}}$ 的作用的几何意义使得它的定义很自然, 我们可以发现这里采用的因子有序化和正常使用的因子有序化之间的关系. 可以证明, 这里所选择的因子有序化就是源自普通量子力学.

一维的薛定谔量子力学中, 态 $\tilde{\Psi}(x)$ 一般是 $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$ 上的函数. 考虑一个经典相空间中的函数 $f(x)p$, 它产生的正则变换再一次将态空间 (x 轴) 提升到矢量场 $\xi = f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 产生的微分同胚的相空间. 我们希望这个几何作用能继续用于量子理论. 可事实是不是这样呢? 在下面的处理方法中, 我们不必考虑这些几何作用, 只要用对称有序化构造一个自伴算符：$\widehat{(fp)} := (\hbar/2\mathrm{i})\left(f\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\right)$, 它的作用 $\widehat{(fp)}\tilde{\Psi} := (\hbar/2\mathrm{i})\left(f\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\Psi} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\tilde{\Psi}\right)$ 不同于 $\tilde{\Psi}$ 对 ξ 的李导数, 李导数只对应第一项. (第二项 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Psi}$ 乘以 ξ 的散度, 即勒贝格测度对 ξ 的李导数.) 幺正变换 $\hat{U}(\lambda) := \exp \mathrm{i}\widehat{(fp)}$ 的单参数族对波函数的作用与由 ξ 生成的微分同胚单参族对波函数的作用不同. 但这仅仅因为勒贝格测度 $\mathrm{d}x$ 在微分同胚下不具有不变性.

我们用权重 1/2 的密度 Ψ, 或者更准确地说, 以半形式表示量子态, 则标量积可以简单地写成 $(\Psi_1, \Psi_2) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \bar{\Psi}_1 \Psi_2$, 而不需要测度 (从而, $\bar{\tilde{\Psi}}_1 \tilde{\Psi}_2 \sim \bar{\Psi}_1 \Psi_2$). 用这种半形式时, $\widehat{(fp)}$ 的作用和李导数的作用一样：$\widehat{(fp)}\Psi = (\hbar/\mathrm{i})\mathcal{L}_\xi \Psi$. 所以, 幺正变换 $U(\lambda)$ 的作用由下式给出：

$$\hat{U}(\lambda)\Psi(v) = \Psi(v + \lambda\hbar),$$

式中 v 是矢量场 ξ 在 $\mathbb{R}$ 上的仿射参数. 因此, 如果我们继续采用薛定谔量子力学的标准因子有序化, 但态是半形式的, 则我们在几何方面的期望就可以实现了. μ 轴上的测度在任何微分同胚作用下都具有不变性. 因此, 附加的"散度项"是不必要的. 从这种意义上说, $\mathcal{H}^{\mathrm{grav}}_{\mathrm{kin}}$ 中的态与薛定谔表象中权重 1/2 的密度或者说半形式是类似的.

9.1.3 约束算符的表达式

由上述讨论, 我们可以把式 (9.1.13) 的经典表示写成量子约束算符

$$\begin{aligned}\hat{C}_{\mathrm{grav}} = &\sin(\bar{\mu}c)\left[\frac{24\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\mu)}{8\pi\gamma^3\bar{\mu}^3\ell_{\mathrm{P}}^2}\left(\sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)\hat{V}\cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right) - \cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)\hat{V}\sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)\right)\right]\sin(\bar{\mu}c)\\ =:&\sin(\bar{\mu}c)\hat{A}\sin(\bar{\mu}c).\end{aligned} \tag{9.1.23}$$

为了看得更清楚, 我们将式 (9.1.23) 中算符 $\sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)$ 和 $\mathrm{sgn}(\mu)/\bar{\mu}^3$ 上的尖号去掉了. 首先, 注意算符 $\hat{A}$, 在估算时要小心, 因为在这种表示下所有其他算符都是密集定义的, 只有 $\mathrm{sgn}(\mu)$ 在 $v \neq 0$ 的态 $\Phi(v)$ 上才有明确的定义. 直接计算得到

$$
\begin{aligned}
\frac{24\mathrm{i}}{8\pi\gamma^3\bar{\mu}^3\ell_{\mathrm{P}}^2} &= \left(\sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)\hat{V}\cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right) - \cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)\hat{V}\sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)\right)\Psi(v) \\
&= -\frac{27K}{4}\sqrt{\frac{8\pi}{6}}\frac{\ell_{\mathrm{P}}}{\gamma^{3/2}}|v|[|v-1|-|v+1|]\Psi(v).
\end{aligned} \tag{9.1.24}
$$

(圆括号内的表达式在 $|v\rangle$ 基的表示中已经是对角的了, 因此这部分算符和 $1/|\bar{\mu}|^3$ 前的因子之间不存在因子有序化问题.) 由于方程右边在 $v=0$ 处为 0, 它在 $\mathrm{sgn}(\mu)$ 的定义域内, 故 $\hat{A}$ 是好定义的, 其表达式为

$$
\hat{A}\Psi(v) = -\frac{27K}{4}\sqrt{\frac{8\pi}{6}}\frac{\ell_{\mathrm{P}}}{\gamma^{3/2}}|v|||v-1|-|v+1||\Psi(v). \tag{9.1.25}
$$

因此, $|v\rangle$ 是 $\hat{A}$ 的本征矢. 由于 $\hat{A}$ 的本征值是负实数, 所以它在 $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}}$ 上是一个负定自伴算符. 从式 (9.1.23) 中我们可以看到 $\hat{C}_{\mathrm{grav}}$ 也是 $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}}$ 上的一个负定自伴算符. 它的作用由下式给出:

$$
\hat{C}_{\mathrm{grav}}\Psi(v) = f_+(v)\Psi(v+4) + f_0(v)\Psi(v) + f_-(v)\Psi(v-4), \tag{9.1.26}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
f_+(v) &= \frac{27}{16}\sqrt{\frac{8\pi}{6}}\frac{K\ell_{\mathrm{P}}}{\gamma^{3/2}}|v+2|||v+1|-|v+3||, \\
f_-(v) &= f_+(v-4), \\
f_0(v) &= -f_+(v) - f_-(v).
\end{aligned} \tag{9.1.27}
$$

可见, 新的引力算符又是一个差分算符. 以往理论中的约束算符都涉及算符 $\hat{p}$ 的本征值间隔为常数 $4\mu_0$, 现在的约束则认为体积算符 $\hat{V}$ 的本征值间隔为常数. 在 $|\mu\rangle$ 基下, 这个间隔在 μ 越大时变得越小. 虽然 $\bar{\mu}$ 在 $v=0$ 处发散, 但是约束算符中的单个算符和整个约束算符本身都在态 $|v=0\rangle$ 上有好定义.

最后, 为了完整地写出整个约束算符, 我们还需要知道约束中的物质部分. 对于无质量标量场, 经典理论给出了

$$
C_{\mathrm{matt}} = 8\pi G|p|^{-\frac{3}{2}}p_{\phi}^2. \tag{9.1.28}
$$

根据经验, 人们知道对构建量子理论有意义的是函数 $|p|^{-\frac{3}{2}}$. 然而, 这种量子化中仍存在两个模棱两可的量, 它们用半整数 j 和实数 ℓ 标记, 其中 $0<\ell<1$. 我们设

$j=1/2$, 对于 ℓ 我们没有一个普适的选择标准, 而且 $\ell=1/2$ 和 $\ell=3/4$ 已经用过了, 结果的定性的性质并不依赖于这个选择. 为了简单, 我们用 $\ell=1/2$. 于是我们的出发点是经典相空间的等式

$$|p|^{-\frac{1}{2}}=\operatorname{sgn}(p)\left[\frac{4}{8\pi\ell_{\mathrm{P}}^2\gamma\bar{v}}\operatorname{Tr}\sum_k\tau^k h_k^{(\bar{\mu})}\{h_k^{(\bar{\mu})-1},V^{1/3}\}\right]. \tag{9.1.29}$$

在圈量子宇宙的文献中, 这一等式经常用到, 只是将 $\bar{\mu}$ 用常数 μ_0 代替.

为了导入量子理论, 我们仍然要注意, 因为方程右边出现了 $\operatorname{sgn}(p)$. 不过, 方括号内算符的图在 $\operatorname{sgn}(p)$ 的定义域内, 因此右边的整个算符都是密集定义的

$$\widehat{|p|^{-\frac{1}{2}}}\,\Psi(v)=\frac{3}{2}\left(\frac{6}{8\pi\gamma\ell_{\mathrm{P}}^2}\right)^{1/2}K^{1/3}|v|^{1/3}\big||v+1|^{1/3}-|v-1|^{1/3}\big|\,\Psi(v). \tag{9.1.30}$$

对于 $|v|\gg1$, 本征值为 $(6/8\pi\gamma\ell_{\mathrm{P}}^2)^{1/2}\operatorname{sgn}(\mu)|\mu|^{-1/2}(1+o(1/|\mu|^4))\sim\operatorname{sgn}(p)|p|^{-1/2}$, 从而又回到了经典行为. 但是算符对态矢 $|v=0\rangle$ 有好的行为. 实际上, 在圈量子宇宙中, 它是一个本征值为 0 的本征矢.

由于 $\widehat{1/\sqrt{|p|}}$ 是一个好定义的自伴算符, 取它的立方即 $\widehat{1/|p|^{3/2}}$. 这个算符在 v 表象中是对角的, 它的作用为

$$\widehat{|p|^{-\frac{3}{2}}}\,\Psi(v)=\left(\frac{6}{8\pi\gamma\ell_{\mathrm{P}}^2}\right)^{3/2}B(v)\,\Psi(v), \tag{9.1.31}$$

式中

$$B(v)=\left(\frac{3}{2}\right)^3K|v|\big||v+1|^{1/3}-|v-1|^{1/3}\big|^3. \tag{9.1.32}$$

现在我们可以将整个约束写成

$$\hat{C}\,\Psi(v)=(\hat{C}_{\mathrm{grav}}+\hat{C}_{\mathrm{matt}})\,\Psi(v)=0, \tag{9.1.33}$$

$$\begin{aligned}\partial_\phi^2\Psi(v,\phi)&=[B(v)]^{-1}(C^+(v)\,\Psi(v+4,\phi)+C^0(v)\,\Psi(v,\phi)+C^-(v)\,\Psi(v-4,\phi)),\\&=:-\Theta\Psi(v,\phi),\end{aligned} \tag{9.1.34}$$

式中系数 $C^{\pm}(v)$ 和 $C^0(V)$ 由下式给出:

$$\begin{aligned}C^+(v)&=\frac{3\pi KG}{8}|v+2|\big||v+1|-|v+3|\big|,\\C^-(v)&=C^+(v-4),\\C^0(v)&=-C^+(v)-C^-(v).\end{aligned} \tag{9.1.35}$$

这就是我们下面将要采用的哈密顿约束.

9.2 Wheeler-De Witt 理论

本节我们将讨论圈量子宇宙的 WDW 极限, 即差分方程 (9.1.34) 中具体的量子几何效应可以忽略. 尽管这一极限理论是非常清楚的, 我们这里对它进行详细的讨论主要是它能够为构造物理的希尔伯特空间、Dirac 可观测量和半经典态提供简单而又熟悉的背景, 还因为这种讨论有助于我们详细地对比 WDW 理论和圈量子宇宙理论.

本节分为两部分. 第一部分给出式 (9.1.34) 的 WDW 极限和它的通解. 第二部分构造理论的物理部分, 使用标量场作为自然时, 我们发现在 WDW 极限下大爆炸奇点不能被消除.

9.2.1 WDW 约束和它的通解

由于几何动力学描述对标架方向 (v 的正负) 不敏感, 波函数 $\Psi(v)$ 在 $v\to -v$ 变换下具有对称性. 与圈量子宇宙中对应的 WDW 量用下划线标记.

首先, 我们设

$$\chi(v):=(|v||\,|v-1|-|v+1|\,|)(\Psi(v+2)-\Psi(v-2)), \tag{9.2.1}$$

则哈密顿约束中的引力部分 (9.1.26) 可以写成

$$\hat{C}^{\bar{\mu}}_{\rm grav}\Psi(v)=\frac{27K\ell_{\rm P}}{16}\sqrt{\frac{8\pi}{6\gamma^3}}[\chi(v+2)-\chi(v-2)]. \tag{9.2.2}$$

为了得到 WDW 极限, 假设 $|v|\gg 1$ 而且 Ψ 是光滑的, 然后我们有

$$\hat{C}^{\bar{\mu}}_{\rm grav}\Psi(v)=54K\ell_{\rm P}\sqrt{\frac{8\pi}{6\gamma^3}}\frac{\rm d}{{\rm d}v}\left(|v|\frac{{\rm d}\Psi(v)}{{\rm d}v}\right)+o\left(v^{n-3}\frac{{\rm d}^n\Psi}{{\rm d}v}\right), \tag{9.2.3}$$

式中 $n\geqslant 3$. 我们考虑变化缓慢的波函数 Ψ, 则方程右边第二项与第一项相比可以忽略, 从而得到约束的引力部分的 WDW 极限

$$\hat{C}^{wdw}_{\rm grav}\Psi(v)=54K\ell_{\rm P}\sqrt{\frac{8\pi}{6\gamma^3}}\frac{\rm d}{{\rm d}v}\left(|v|\frac{{\rm d}\Psi(v)}{{\rm d}v}\right). \tag{9.2.4}$$

这种近似不是普适的, 因为忽略掉的项依赖于 Ψ. 我们将发现, 最后这些假设在半经典态以一种自洽的方式实现. 现在我们只要注意在 WDW 理论中 $\hat{C}^{wdw}_{\rm grav}$ 在动力学希尔伯特空间 $\mathcal{H}^{wdw}_{\rm grav}=L^2(\mathbb{R},{\rm d}v)$ 上是自伴和负定的.

最后, 总约束由下式给出:

$$\hat{C}=\hat{C}_{\rm grav}+8\pi G\left(\frac{6}{8\pi\gamma\ell_{\rm P}^2}\right)^{3/2}B(v)\hat{p}_\phi^2, \tag{9.2.5}$$

式中函数 $B(v)$ 在式 (9.1.32) 中定义. 这个函数在 $|v| \gg 1$ 时可以很好的近似为 $B(v) := K|v|^{-1}$. 因此, 总约束的 WDW 极限为

$$\partial_\phi^2 \underline{\Psi}(v,\phi) = 12\pi G v\partial_v(v\partial_v \underline{\Psi}(v,\phi))$$
$$=: -\underline{\Theta}\ \underline{\Psi}(v,\phi). \tag{9.2.6}$$

算符 $\underline{\Theta}$ 与“宇称”算符 Π 对易, Π 将标架方向变反了, $\Pi\underline{\Psi}(v) = \underline{\Psi}(-v)$. 因此, 它保留了波函数的空间, 即 Π 的本征值为 $+1$ 的本征空间.

如果像几何动力学中一样, 用类似 $\tilde{\underline{\Psi}}(a,\phi)$ 的函数表示量子态, 则算符 $\underline{\Theta}$ 的作用为: $\underline{\Theta}\ \tilde{\underline{\Psi}} = (4\pi G/3)(a\partial/\partial a)(a\partial/\partial a)(\tilde{\underline{\Psi}})$. 在几何动力学中, 经典约束有 $G^{AB}p_Ap_B = 0$ 的形式, 其中 G^{AB} 是由 (a,ϕ) 展开的二维构型空间的 De Witt 度规. 在量子理论中, 因子排序的自然选择是利用 G^{AB} 的 Laplace-Beltrami 算符, WDW 方程可以写为 $\partial_\phi^2\tilde{\underline{\Psi}} = (4\pi G/3)(a\partial/\partial a)(a\partial/\partial a)\tilde{\underline{\Psi}}$, 这正好是方程 (9.2.6). 由“改进”的哈密顿约束的 WDW 极限得到了 WDW 理论中的“自然”因子排序. 这对圈量子宇宙中的因子排序提供了间接的支持, 并让我们得到了式 (9.1.34).

由于 WDW 极限的形式关于 ϕ 和 v 是对称的, 我们可以用宇宙体积或标量场作为“自然时间”, 另一个作为真实的动力学自由度. 在闭合的宇宙模型中 $(k=1)$, 选择 ϕ 作为时间变量更合适. 更重要的是, 把 v 看成时间会使圈量子宇宙约束的形式 (9.1.34) 在处理技巧上更困难. 因此, 我们将把 ϕ 作为时间并用宇宙体积随自然时间 ϕ 的演化来描述动力学. 对自然时间的特殊选择并不是本质的问题. 我们不需要选择也可以构建出一个物理区. 选择 ϕ 作为时间有助于我们理解中间过程并用更熟悉的“演化”的语言而不是用“僵硬形式”来解释最终的结果.

WDW 方程 (9.2.6) 形式很简单, 如果设 $x = \ln v$, 则 WDW 约束具有由 x 和 y 构成的平直时空中无质量克莱因–高登方程的形式. 但为了对比 WDW 理论和圈量子宇宙理论, 我们将采用圈量子宇宙中的方法.

首先, 我们注意到算符 $\underline{\Theta}$ 在希尔伯特空间 $L_s^2(\mathbb{R}, K^{-1}\underline{B}(v)\mathrm{d}v)$(其中角标 s 表明是 Π 的对称本征空间) 上是正定的而且是自伴的. 它的本征值为 $\omega^2(>0)$ 的本征函数 $\underline{e}_k$ 在希尔伯特空间上都是二重简并的, 可用实数 k 标记

$$\underline{e}_k(v) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\ln|v|}, \tag{9.2.7}$$

式中 k 与 ω 的关系为 $\omega = \sqrt{12\pi G}|k|$. 在空间 $L_s^2(\mathbb{R}, K^{-1}\underline{B}(v)\mathrm{d}v)$ 上它们构成一组正交基: $(e_k, e'_k) = \delta(k,k')$. 对于 Schwartz 空间中的 $\tilde{\Psi}_\pm(k)$, 式 (9.2.6) 的一个初始值在 Schwartz 空间为快速衰减函数的通解可以写成

$$\underline{\Psi}(v,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,\tilde{\Psi}_+(k)\underline{e}_k(v)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\phi} + \tilde{\Psi}_-(k)\underline{e}_k(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\phi}. \tag{9.2.8}$$

按照克莱因–高登理论中的术语, 如果 $\tilde{\Psi}_{\pm}(k)$ 只存在于 k 的正半轴, 这个解应该说成是"进来的"("收缩的"), 而如果 $\tilde{\Psi}_{\pm}(k)$ 只存在于 k 的负半轴, 这个解就是"向外的"("膨胀的"). 如果 $\tilde{\Psi}_{-}(k)$ 为 0, 这个解是正频解, 如果 $\tilde{\Psi}_{+}(k)$ 为 0, 这个解是负频解.

通常, 正频解和负频解都满足一阶"演化"方程, 这个演化方程可以由式 (9.2.6) 的平方根求得

$$\mp\mathrm{i}\partial_{\phi}\underline{\Psi}(v,\phi)=\sqrt{\underline{\Theta}}\ \underline{\Psi}(v,\phi). \tag{9.2.9}$$

如果 $f(v)$ 是方程在"时间 $\phi=\phi_0$"处的初始值, 那么解可以写成

$$\underline{\Psi}_{\pm}(v,\phi)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sqrt{\underline{\Theta}}(\phi-\phi_0)}f(v). \tag{9.2.10}$$

9.2.2 WDW 理论的物理

WDW 方程的解 (9.2.8) 在 $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{wdw}}$ 中不是归一化的 (因为 0 处于 WDW 算符谱值的连续部分). 我们首要任务是赋予这些物理态一个希尔伯特空间结构. 这有几种可能的途径. 在经典理论中, 由于 p_ϕ 是运动常数, 所以它是 Dirac 可观测量. 而 v 不是一个运动常数, 在每一条动力学轨道上 $v(\phi)$ 是 ϕ 的单调函数, $v|_{\phi=\phi_0}$ 对于任意给定的 ϕ_0 是一个 Dirac 可观测量. 这些量构成一组完备集并能直接写出对应的量子算符. 但是, 因为我们只对在 $v\to -v$ 变换下具有对称性的态 $\Psi(v,\phi)$ 感兴趣, 所以我们只要用 $|v|_{\phi_0}$ 代替 $v|_{\phi_0}$ 就足够了. 因为 $\hat{p}_\phi$ 与式 (9.2.6) 中的 WDW 算符对易, 假设式 (9.2.6) 有一个 (对称) 解 $\underline{\Psi}(v,\phi)$, 则

$$\hat{p}_{\phi}\underline{\Psi}(v,\phi):=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \tag{9.2.11}$$

也是一个 (对称) 解. 因此, 从 $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{wdw}}$ 中我们仅仅保留了 $\hat{p}_\phi$ 的这个定义. 薛定谔演化式 (9.1.10) 使我们能定义另一个可观测量 $|\hat{v}|_{\phi_0}$: 假设式 (9.2.6) 有一个 (对称的) 解 $\underline{\Psi}(v,\phi)$, 我们可以首先将它分解成正频和负频部分 $\underline{\Psi}_{\pm}(v,\phi)$, 在 $\phi=\phi_0$ 处冻结它们. 将这个"初始值"乘以 $|v|$ 并按照式 (9.1.10) 演化

$$|\hat{v}|_{\phi_0}\underline{\Psi}(v,\phi):=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\underline{\Theta}}(\phi-\phi_0)}|v|\underline{\Psi}_{+}(v,\phi_0)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\underline{\Theta}}(\phi-\phi_0)}|v|\underline{\Psi}_{-}(v,\phi_0). \tag{9.2.12}$$

结果仍然是 WDW 方程 (9.2.6) 的一个 (对称的) 解. 此外, 这些算符都保留了正频和负频子空间. 因为它们包含一组完备的 Dirac 可观测量, 所以我们有超选择. 在量子理论中, 我们可以限制在一个超选择部分. 接下来, 我们主要关注正频部分, 并去掉后面的 $+$.

现在我们寻找一个满足式 (9.1.10) (即在 v 反演下具有不变性) 的正频解 $\underline{\Psi}(v,\phi)$ 空间上的一个内积, 使得 $\hat{p}$ 和 $|\hat{v}|_{\phi_0}$ 都为自伴算符. 这些解都完全由初始值 $\underline{\Psi}(v,\phi_0)$

决定, 而且 Dirac 可观测量对这些初始值有以下作用:

$$|\hat{v}|_{\phi_0}(v,\phi) = |v|\underline{\Psi}(v,\phi_0), \quad \hat{p}_\phi\underline{\Psi}(v,\phi_0) = \hbar\sqrt{\Theta}\ \underline{\Psi}(v,\phi_0). \tag{9.2.13}$$

我们发现唯一一个使这些算符自伴的内积为

$$\langle\underline{\Psi}_1 \mid \underline{\Psi}_2\rangle_{\text{phy}} = \int_{\phi=\phi_0} \mathrm{d}v\underline{B}(v)\bar{\underline{\Psi}}_1(v,\phi)\underline{\Psi}_2(v,\phi). \tag{9.2.14}$$

注意到这个内积是守恒的, 即它与“瞬时”时间 $\phi=\phi_0$ 无关. 因此物理的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\text{phy}}^{\text{wdw}}$ 成了正频波函数 $\underline{\Psi}(v,\phi)$ 的空间, 其中 $\underline{\Psi}(v,\phi)$ 在 v 反演下是对称的且有一个由式 (9.2.14) 定义的有限模方. 这个过程为我们提供了一个 $\mathcal{H}_{\text{phy}}^{\text{wdw}}$ 上的 Dirac 可观测量的完备集的表象

$$|\hat{v}|_{\phi_0}\underline{\Psi}(v,\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\Theta}(\phi-\phi_0)}|v|\underline{\Psi}(v,\phi_0), \quad \hat{p}_\phi\underline{\Psi}(v,\phi) = \hbar\sqrt{\Theta}\ \underline{\Psi}(v,\phi). \tag{9.2.15}$$

最后, 利用物理的希尔伯特空间和这一 Dirac 可观测量的完备集, 我们引入半经典态, 然后研究它们的演化. 我们选定一个“瞬时时间” $\phi=\phi_0$ 并构造一个半经典态, 并使这个态在 $p_\phi=p_\phi^*$ 和 $v|_{\phi_o}=v^*$ 处达到峰值. 因为我们希望这个峰处在一个代表大的经典宇宙的点上, 所以选择 $v^*\gg 1$ (采用自然单位制 $c=G=1$) 和 $p_\phi^*\gg\hbar$. 例如, 对于闭合宇宙模型 $(k=1)$, 为了保证宇宙能膨胀到比普朗克尺度大很多, 第二个条件是必要条件. 在“时间”为 $\phi=\phi_0$ 时, 考虑态

$$\underline{\Psi}(v,\phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,\tilde{\Psi}(k)\underline{e}_k(v)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\phi_0-\phi^*)}, \quad \tilde{\Psi}(k) = \mathrm{e}^{-\frac{(k-k^*)^2}{2\sigma^2}}, \tag{9.2.16}$$

式中 $k^*=-p_\phi^*/\sqrt{12\pi G\hbar^2}$, $\phi^*=-\ln|v^*|/\sqrt{1/12\pi G}+\phi_0$. 在 $\omega=-\sqrt{12\pi G}k$ 近似下 (这种近似是合理的, 因为 $\tilde{\Psi}(k)$ 在 k^* 处形成尖锐的峰, 且 $k^*\ll -1$), 我们很容易计算以上的积分, 得出 Dirac 可观测量的期望值和它们的涨落. 结果就像我们所期望的, 态在 v^*, p_ϕ^* 处有尖锐的峰. 以上的结论与非相对论量子力学中的相干态很相近. 主要的不同之处就在于感兴趣的变量不是 v 和它的共轭动量而是 v 和“时间”的共轭动量 p_ϕ, 即非相对论量子力学哈密顿量的对应物.

现在我们来讨论这个态的演化. 态是在 $\phi=\phi_0$ 时经过 $v=v^*$ 并且仍然在由 $p_\phi=p_\phi^*$ 定义的经典轨道上具有峰吗? 这个问题很容易得到答案, 因为式 (9.1.10) 告诉我们, 由初始数据 (9.2.16) 定义的 $\underline{\Psi}(v,\phi)$, 式 (9.2.6) 的正频解是通过用 ϕ 代替 ϕ_0 而得到的! 由于式 (9.2.16) 中衡量散射的参数 σ 不依赖于 ϕ, 因此 $\underline{\Psi}(v,\phi)$ 在轨道

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{12\pi G}}\ln\frac{|v|}{|v^*|}+\phi_0 \tag{9.2.17}$$

上仍然具有峰. 这个轨道正好是我们想要的经典解. 这是在宇宙膨胀到很大时任何人都希望的结果. 然而, 在普朗克区域仍然具有这个性质, 而且, 在向后的演化中, 半经典态仍沿着经典轨道落入大爆炸奇点. (如果我们用的是正的 k^*, 我们将得到一个收缩解, 然后宇宙向前演化最终将沿着经典轨道落入一个大挤压奇点.) 从这个意义上讲, WDW 理论并没有解决经典的奇点问题.

在后面两节我们将指出圈量子宇宙中的情况完全不同. 这是因为 WDW 方程只是分立方程在 v 很大时一个很好的近似. 此外, 像前面提到的, 这种近似并不是唯一的, 而是依赖于量子态: 从圈量子引力到 WDW 方程的过程当中, 我们必须忽略依赖于 ϕ 且形如 $o\left(v^{n-3}\dfrac{\mathrm{d}^n\phi}{\mathrm{d}v^n}\right)$ 的项 ($n \geqslant 3$). 对于以上考虑的经典态, 这意味着对于 $v \gg k^*$ 这种近似更具优越性, 但是当波函数的峰处在与 k^* 相当的 v 处时, 这种近似就不足了. 于是, 圈量子宇宙就与 WDW 方程完全不同了. 我们发现, 这个峰出现了一个反弹而不是沿着经典轨道落入大爆炸奇点. 因为从经典意义上说大的 k^* 值更具优越性, 所以反弹时的 v 值可以很大. 然而, 像我们 9.1 节中提到的, 反弹时的物质密度可与普朗克密度相比拟, 且不依赖于 k^* 值.

评论: 在以上的讨论中, 为了简单起见, 开始我们限制了本征函数 $\underline{e}_k(v)$ 在 $v \to -v$ 变换下具有对称性. 如果我们舍弃这个要求, 我们将发现存在一个四重简并 (而不是二重简并) 的 $\underline{\Theta}$ 的本征函数. 实际上, $\theta(v)$ 是一个阶跃函数 [当 $v < 0$ 时, $\theta(v) = 0$, 当 $v > 0$ 时, $\theta(v) = 1$], 然后, $\theta(v)_{\underline{e}_{|k|}}$, $\theta(v)_{\underline{e}_{-|k|}}$, $\theta(-v)_{\underline{e}_{-|k|}}$ 都是 v 的连续函数并且满足本征值为 $\omega^2 = 12\pi G k^2$ 的本征方程.

9.3　圈量子宇宙的解析和数值结果

我们首先把态函数记为 $\Psi(\mu, \phi)$, 其中 ϕ 是标量场而无量纲实数 μ 是 $\hat{p}$ 的本征值. 这时, 哈密顿约束由式 (9.1.34) 给出

$$\begin{aligned}\partial_\phi^2\, \Psi = [B(\mu)]^{-1}\, [&C^+(\mu)\, \Psi(\mu + 4\mu_0,\, \phi) + C^0(\mu)\, \Psi(\mu,\, \phi) \\ &+ C^-(\mu)\, \Psi(\mu - 4\mu_0,\, \phi)] =: -\Theta \Psi(\mu, \phi)\,,\end{aligned} \tag{9.3.1}$$

式中 $C^+(\mu) = (\pi G/9\mu_0^3)\ \mid\ |\mu + 3\mu_0|^{3/2} - |\mu + \mu_0|^{3/2}\ |$, $C^-(\mu) = C^+(\mu - 4\mu_0)$, $C^0(\mu) = -C^+(\mu) - C^-(\mu)$, 而 $(6/8\pi\gamma\ell_{\rm P}^2)^{3/2}\, B(\mu)$ 是算符 $|\hat{p}|^{-3/2}$ 的本征值. 相应实常数 μ_0 由“区域间隔”所决定: $(8\pi\gamma/6)\, \mu_0\, \ell_{\rm P}^2 = \Delta$.

在每种经典的结果中, ϕ 是一个整体单调的时间函数, 因此可以看成是一个代表固有的内部时钟的参量. 在量子理论里是没有时空度规的, 但是由于量子约束 (9.3.1) 规定了 $\Psi(\mu, \phi)$ 如何随 ϕ 演化, 为方便, 将 $\Psi(\mu, \phi)$ 中的 ϕ 看成是“自然时间” (emergent time), 同时把 μ 看作是相应的物理自由度. 一个完备的 Dirac 可观

测量集合可以由运动常数 $\hat{p}_\phi$ 和算符 $\hat{\mu}|_{\phi_0}$ 构成, 其中 $\hat{\mu}|_{\phi_0}$ 表示 μ 在 $\phi=\phi_0$ 时的瞬时值.

物理态都是方程 (9.3.1) 的解. 映射 $\hat{\Pi}$ 是通过 $\hat{\Pi}\,\Psi(\mu,\phi)=\Psi(-\mu,\phi)$ 来定义的, 对应于空间标架的方向反转 (量子几何保持不变), 故在方程 (9.3.1) 的解空间中, $\hat{\Pi}$ 就是一个大的规范变换. 这样的操作会导致物理态被划分成几部分, 而每部分都提供了一个不可约的幺正对称表述. 正如人们所希望的那样, 在物理上人们所应该考虑的是 $\hat{\Pi}$ 的对称且本征值为 $+1$ 的那部分.

为了赋予这个空间以希尔伯特的空间结构, 我们利用"群平均思想". 这个过程可以根据这样一个事实来简化, 即在方程右边的差分算符 Θ 是与 ϕ 无关的, 并且 Θ 是自伴和正定的 [在希尔伯特空间 $L^2(\bar{R}_{\rm Bohr},B(\mu){\rm d}\mu_{\rm Bohr})$ 中]. 由于 Θ 是一个差分算符, 物理希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 有一部分超选择确定的 $\mathcal{H}_\epsilon$; $\mathcal{H}=\oplus_\epsilon\mathcal{H}_\epsilon\ \ ,\epsilon\in[0,2\mu_0]$. 在 $\mathcal{H}_\epsilon$(在 $\hat{\Pi}$ 方向反转时是对称的) 的态 $\Psi(\mu,\phi)$ 包含 $\mu=\pm\epsilon+4n\mu_0$ 这些点. 我们考虑一个通常的 H_ϵ. 波函数 $\Psi(\mu,\phi)$ 是方程 (9.3.1) 的解, 并且是关于内部时间 ϕ 的正频部分. 换言之, 它们满足方程 (9.3.1) 的正频平方根

$$-{\rm i}\partial_\phi\,\Psi=\sqrt{\Theta}\,\Psi\ , \tag{9.3.2}$$

相应的内积为

$$\langle\Psi_1|\,\Psi_2\rangle_{\rm phy}=\sum_{\mu\in\{\pm\epsilon+4\mu_0\mathbb{Z}\}}B(\mu)\,\overline{\Psi_1}(\mu,\phi)\,\Psi_2(\mu,\phi)\ , \tag{9.3.3}$$

式中 $\mathbb{Z}$ 表示整数集合. Dirac 可观测量作用在这些态上的形式为

$$\hat{p}_\phi\Psi=-{\rm i}\hbar\partial_\phi\,\Psi\ , \tag{9.3.4a}$$

$$\hat{\mu}|_{\phi_0}\ \ \Psi(\mu,\phi)={\rm e}^{{\rm i}\sqrt{\Theta}(\phi-\phi_0)}\,\mu\,\Psi(\mu,\phi_0)\ . \tag{9.3.4b}$$

人们可以从完备的 Dirac 可观测量集合 (9.3.4) 出发, 得出 (9.3.3) 是唯一的内积公式, 并使他们是自伴的.

为了构建半经典态以及数值模拟, 把物理态表述成 $\hat{p}_\phi$ 和 Θ 本征态的线性组合. 我们首先注意到, 对于 $\mu\gg\mu_0$, 差分算符 Θ 趋向于 Wheeler-De Witt 微分算符 $\underline{\Theta}$,

$$(\underline{\Theta}\,f)(\mu)=(16\pi G/3)\,\mu^{3/2}\,(\sqrt{\mu}f')'\ . \tag{9.3.5}$$

[因此, 如果忽略量子几何的影响, 方程 (9.3.1) 会导致 Wheeler-De Witt 方程 $\partial_\phi^2\Psi=-\underline{\Theta}\,\Psi$.] 相应的本征函数为

$$\underline{e}_k(\mu)=(1/4\pi)\,|\mu|^{1/4}\,{\rm e}^{{\rm i}k\ln|\mu|}\ , \tag{9.3.6}$$

式中 $\underline{\Theta}$ 由一个实数 k 标示, 其本征值为 $\underline{\omega}^2 = (\pi G/3)(16k^2+1)$. 分离的算符 Θ 的完备本征函数集合 $e_k(\mu)$ 也由一个实数 k 所标示, $e_k(\mu)$ 在 $\mu \gg \mu_0$ 的情况下, 近似于 $\underline{e}_k(\mu)$. Θ 的本征值 $\omega^2(k)$ 随 $|k|$ 是单调递增的. 最后, $e_k(\mu)$ 满足标准的正交归一关系 $<e_k|e'_k> = \delta(k,k')$. 故一个物理态 $\Psi(\mu,\phi)$ 可以展开为

$$\Psi(\mu,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \tilde{\Psi}(k)\ e_k^{(s)}(\mu)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(k)\phi}\ , \tag{9.3.7}$$

式中 $\tilde{\Psi}(k)$ 是任意的 (但是规则的), $\omega(k)$ 是正定的且 $e_k^{(s)}(\mu) = (1/\sqrt{2})(e_k(\mu) + e_k(-\mu))$. 因此, 每个物理态都可以由一个函数 $\tilde{\Psi}(k)$ 来描述.

由于已经拥有了清楚的希尔伯特空间和一个完备的 Dirac 可观测量集合, 我们现在就能够构建后期的半经典态, 并能使其在数值上沿时间反向演化. 具体来说, 有三种自然的构建方式来实现这个想法, 并反映出那些标记半经典态的自由度. 这些表述与 Wheeler-De Witt 理论形成了鲜明的对比.

前面已经讲到, p_ϕ 是一个运动常量. 对于半经典解释, 我们将选择一个很大值 $p_\phi^* \gg \hbar$, 在自然单位下 $c=G=1$. 举例来说, 在闭合模型下, 这个条件是确保宇宙能够膨胀到一个宏观尺度的必要条件. 经典轨道 $p_\phi = p_\phi^*$ 起始于大爆炸后开始膨胀, 我们在该轨道上取定一点 (μ^*, ϕ_0), 并确保 $\mu^* \gg 1$. 我们想构建一个这样的态, 在初始“时刻” $\phi=\phi_0$ 且 (μ^*, p_ϕ^*) 是在其顶点处, 并关注其反向的演化. 让 $\tilde{\Psi}(k)$ 是一个高斯分布, 峰值在 k^* 处, 满足 $p_\phi^* = -(\sqrt{16\pi G\hbar^2/3})\,k^*$. 令

$$\Psi(\mu,\phi_0) = \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \tilde{\Psi}(k)\,\underline{e}_k(\mu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\underline{\omega}(k)(\phi_0-\phi^*)}\ , \tag{9.3.8}$$

式中 $\phi^* = -\sqrt{3/16\pi G}\ \ln|\mu^*| + \phi_0$.

很容易证明 $\Psi(\mu,\phi_0)$ 是期望的初始数据, 其顶点处在 $p_\phi = p_\phi^*$ 和 $\mu=\mu^*$. 如果演化是利用与 Wheeler-De Witt 类似的方程 $-\mathrm{i}\partial_\phi\Psi = \sqrt{\underline{\Theta}}\,\Psi$, 它将保持所选经典轨道的顶点位置, 并且简单地随着该经典轨道进入大爆炸奇点. 但是, 如果它是经式 (9.3.2) 而演化, 这个情形就有了质的变化. 该态会保持在经典轨道的顶点位置, 一直到物质密度达到一个大的临界值 (它是与 p_ϕ^* 相关的), 这时跳跃出现了, 连接了一个轨道的 “过去” 部分, 而该轨道是头朝向那个大破裂时期 (图 9-1).

为了确保这些结果是可靠的, 数值模拟在执行对等式 (9.3.1) 的积分时采用了四阶 Runge-Kutta 方法. 由于空间局限性, 我们对其中之一求和. 这里, 我们选择 $\epsilon=2\mu_0$ 并让初始数据为 $p_\phi^* = 10^4\sqrt{G\hbar^2}$, $\mu^* = 10^5\mu_0$, 同时高斯函数 $\tilde{\Psi}(k)$ 的扩散为 $\Delta p_\phi/p_\phi^* = 7.5\times 10^{-3}$, 其中 Δp_ϕ 是关于 p_ϕ 的不确定度. 数值格子边界选择为 $1.5\mu^*$ (其中 $|\Psi(\mu,\phi_0)| < 10^{-24}$). 在边界上, 等式 (9.3.2) 用 Wheeler-De Witt 等式来近似, 并且还利用了 “出射波” 条件. 演化结果在图 9-1 和图 9-2 中显示一个量子跳跃. 在远离普朗克区域, Dirac 可观测量的不确定度是一些常量.

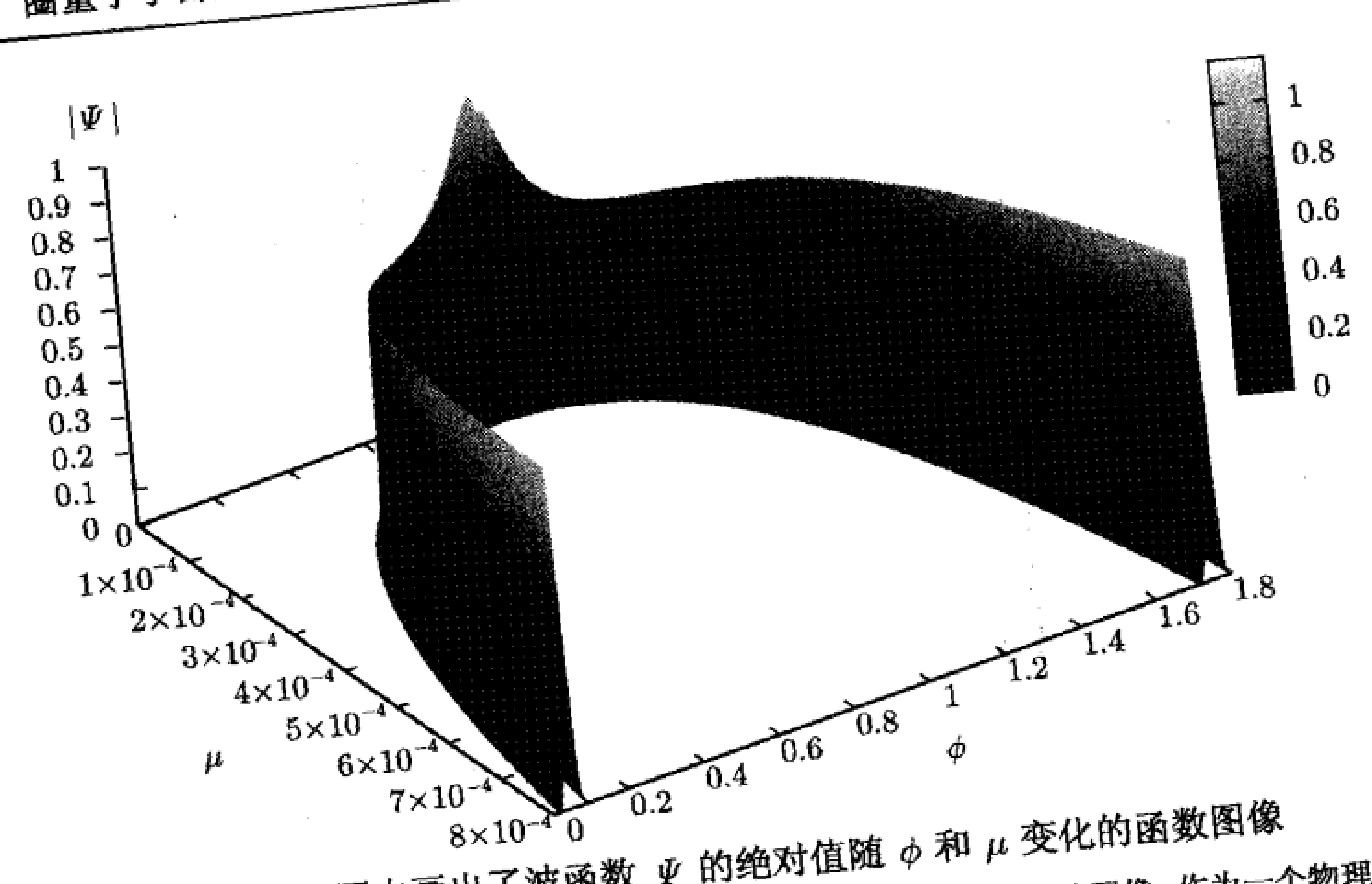


图 9-1 图中画出了波函数 Ψ 的绝对值随 ϕ 和 μ 变化的函数图像. 作为一个物理态, Ψ 在图中的值是显示 μ_0 的倍数, 为了更清楚的显示, 只画出了 $|\Psi|$ 大于 10^{-4} 的图像. $\mu \to -\mu$ 变换下是对称的

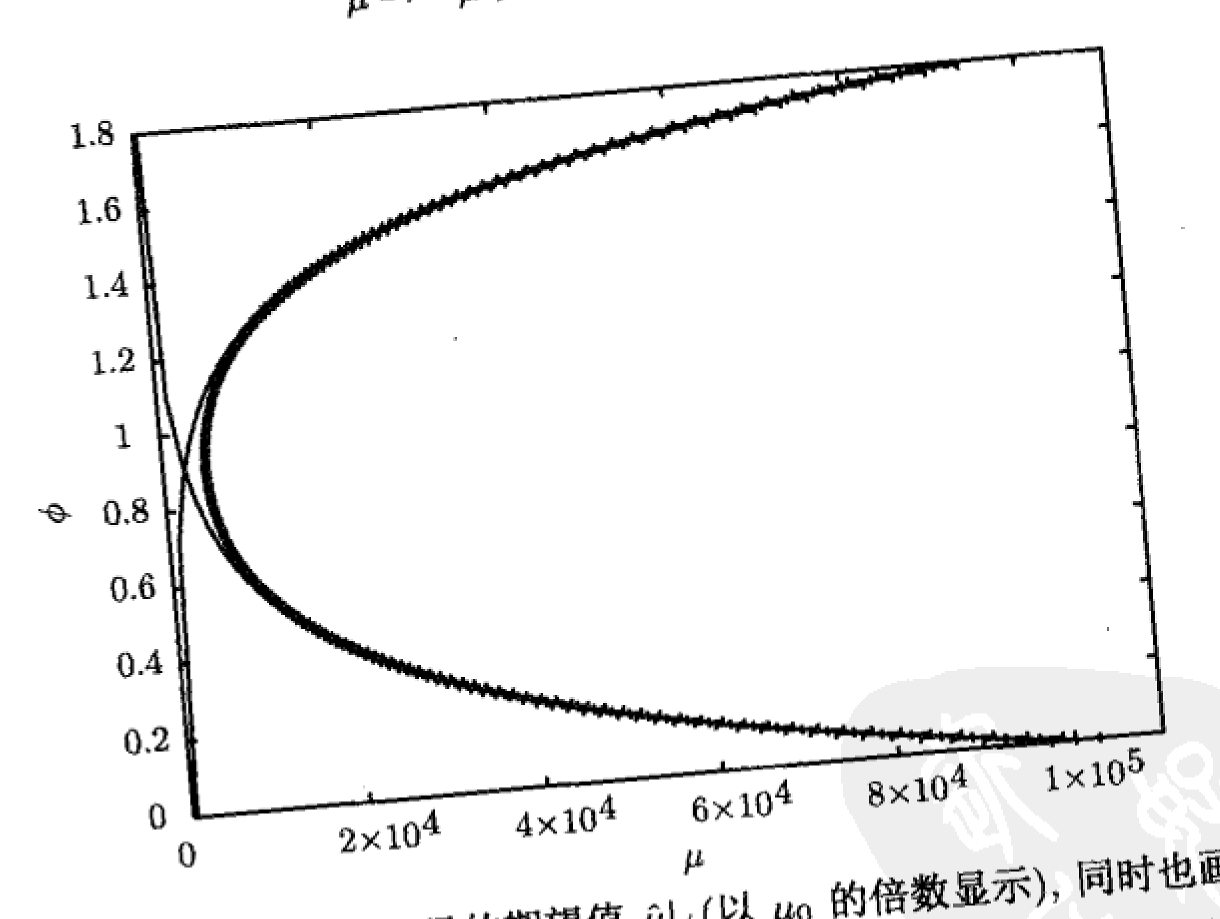


图 9-2 图中画出了 Dirac 可观测量的期望值 $\hat{\mu}|_\phi$(以 μ_0 的倍数显示), 同时也画出了他们的色散. 他们展示了一个量子跳跃, 该跳跃将收缩的和膨胀的经典轨道连接起来了, 在图中用暗淡线表示

我们可以得出一些结论:

(1) 这个解释最主要的局限是受到均匀和对称束缚. 该实现方法可以被拓展到包括反对称模型和标量场势在内的情况. 但是, 对于非均匀性的容括还刚刚开始.

我们希望圈量子宇宙的确定性演化将使其越过普朗克区域而有微扰的演化.

(2) Wheeler-De Witt 理论预言和圈量子宇宙的巨大差别可以直接通过一些有效方程来理解, 而这些有效方程是可以利用一些近似从等式 (9.3.1) 而得到. 人们可以发现量子几何 (在 Wheeler-De Witt 它被忽略了) 修正了 Friedmann 方程. 在普朗克区域, 这些修正部分是很重要的, 它们将同所必需的符号一起使引力变为排斥力.

(3) 早期的圈量子宇宙文章有个通常特征就是人们并没有引入新的物理量, 比如在奇点的边界条件. 人们只关注量子态在后期是半经典的. 这是一个观测的事实而不是一个新的理论需求或者一个哲学偏爱. 但是, 在已有的圈量子宇宙文章里, 也有很多值得关注的不同之处. 很多关于圈量子宇宙的唯象工作里, 也包括了量子几何 (仅对物质哈密顿量) 的影响, 在这里它们也是被包含在引力部分里. 我们构建了物理希尔伯特空间、Dirac 可观测量以及半经典态, 因此提出了普朗克区域的物理机制, 走出和超越了解决奇点问题的惯例. 尤其是, 我们的结果揭示出在普朗克区域的量子几何就如同一个量子桥, 它连接了大经典宇宙的一个收缩和一个膨胀的宇宙. 最后, 这个关于用标量场作为一个内部时间的想法在此之前已经出现过, 但是, 那些解释使用了常规的量子力学而不是从完备的圈量子引力得出的玻尔紧致化.



第 10 章　膜宇宙理论

10.1　宇宙常数和膜宇宙概述

含有宇宙项的真空爱因斯坦场方程可写为

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} , \tag{10.1.1}$$

此式右端的物理含义是真空具有能量密度

$$\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G . \tag{10.1.2}$$

真空为什么会具有能量密度？这一问题应该由量子场论来回答：它就是微观世界中的零点能. 在量子场论中, 组成物质的基本粒子就是相应量子场 (量子系统) 的激发态. 当所有量子场都处于基态时, 便对应于任何粒子都不存在的真空. 按照量子场论, 一种量子场处于基态时, 它的能量并不为零. 这一非零的基态能量叫做零点能. 自然, 广义相对论中的真空能量 (10.1.2) 就应该是量子场论中的零点能.

设量子场论适用的能量上限为 M, 则计算表明, 量子场的零点能量密度的量级为 (取 $h = 1$)

$$\rho \sim M^4 . \tag{10.1.3}$$

由式 (10.1.3) 和 (10.1.2) 可得

$$\Lambda \sim \rho G \sim M^4/M_{\rm P}^2 , \tag{10.1.4}$$

式中 $M_{\rm P}$ 为普朗克能量. 由第二篇第 2 章 2.6 节可知

$$\Lambda = \pm R^{-2} , \quad k = \pm 1 . \tag{10.1.5}$$

于是我们可以由量子场论中的零点能估算出宇宙半径 R

$$R \sim \Lambda^{-1/2} \sim M_{\rm P}/M^2 . \tag{10.1.6}$$

此式表明, 量子场论适用的能标越低, 则计算得到的宇宙常数越小, 宇宙半径越大. 另一方面, 高能物理实验未能观测到超对称粒子. 这一实验事实表明, 超对称破缺能标只能在 TeV 量级上. 如果调低这一能标, 则与高能物理的实验观测结果

相矛盾. 根据这一能标的量级, 由式 (10.1.4) 算得的宇宙常数 Λ 比观测值大 60 个数量级, 进而由式 (10.1.5) 算得的宇宙半径 R 在毫米量级, 与宇宙观测结果不符! 若调高超对称破缺的能标, 则所得宇宙常数更大, 宇宙半径更小!

从超对称破缺的能标到宇宙常数 Λ 的计算依据的是量子场论和高能物理实验结果, 是可靠的. 从宇宙常数 Λ 到宇宙半径 R 的计算依据的是广义相对论, 也是可靠的. 这就是物理学中著名的宇宙常数问题. 随着对额外维度和膜宇宙的研究, 人们找到了解决问题的线索. 在膜宇宙理论中, 空间是高维的, 而我们的观测宇宙是四维的, 只是这高维时空中的一个超曲面 (一张膜). 如果宇宙常数 Λ 的贡献大部分出现在观测宇宙以外的 (额外) 维度中, 则在观测宇宙中的有效宇宙常数便可以很小, 宇宙半径也就可以很大了, 于是上述矛盾不复存在.

额外维的概念是在 20 世纪由 Nodstrom 提出的, 随后 Kaluza 和 Klein 也提出了同样的观点. 多年来, 人们一直探讨将四种相互作用统一起来的理论. 基于超对称的理论, 尤其是超弦理论, 都用高维时空描述. 通过 Kaluza-Klein 约化, 可以重新得到四维物理 (Brax et al., 2003).

弦理论和 M 理论提出了另一种紧致化额外维度的方法. 按照这两种理论, 标准模型中的粒子 (即观测宇宙中的物质) 被限制在高维时空的一个超曲面 (膜) 上, 只有引力和类似伸缩子的奇异物质能在所有维度中传播, 于是我们的宇宙便成了膜宇宙. 在膜宇宙中, 对额外维尺度的限制很弱, 因为标准模型中的粒子只在三维空间中传播. 牛顿引力理论对额外维的出现很敏感, 引力只在大于十分之一毫米的尺度才能被探测到. 由于现代高能物理实验从未探测到额外维度的存在, 所以通常认为额外维度被限制在一个很小的空间尺度上, 致使现有的高能物理实验不能达到其相应的能标.

根据弦理论, 膜宇宙源于 Horava 和 Witten 提出的模型. $E_8 \times E_8$ 弦理论在低能条件下的强耦合由十一维超引力描述, 它的第十一维是在具有 Z_2 对称性的迹形 (orbifold) 上紧致化的. 时空的两个边界都是十维面, 且规范理论 (具有 E_8 规范群) 被限制在面上. 后来 Witten 认为十一维时空中有六维可以连续紧致化. 因此, 具有四维边界膜的时空成为五维时空.

Antoniadis 提出膜宇宙模型之后, Arkani-Hamed, Dimopoulos 和 Dvali(ADD) 给出了另一个重要的结论. Antoniadis 认为通过将标准模型中的粒子限制在膜上可以使额外维比预计的大. 他们考虑 $(4+d)$ 维的平直几何, 其中 d 维是紧致的, 半径为 R. 四维普朗克质量、$(4+d)$ 维普朗克质量和引力尺度之间满足以下关系:

$$M_{\rm P}^2 = M_{\rm fund}^{2+d} R^d \, . \tag{10.1.7}$$

这种引力只在小于 R 的尺度上与牛顿引力理论有区别. 由于引力只在 1mm 左右的尺度上被探测到, 因此 R 可以大到几分之一毫米. ADD 假设高维几何是平直的.

Randal 和 Sundrum(1999) 的工作取得了较大的进展, 他们考虑的不是平直几何, 而是弯曲空间的几何. 在他们的模型中, 高维时空是 AdS 时空, 其宇宙常数为负, 这是时空弯曲引起的. 从嵌在高维时空中的一个具有正张力的膜上可以得到牛顿引力定律. 这种模型对牛顿引力定律产生了一个很小的修正, 可能的尺度也受到约束, 它们必须小于 1mm.

他们还提出一种双膜模型, 在这个模型中出现了等级 (hierarchy) 问题, 即 10^{19}GeV 的普朗克尺度和 100GeV 的弱电尺度之间有巨大差异. 等级问题是由于 AdS 背景的高度弯曲. 在这种情景下, 标准模型中的粒子被限制在具有负张力的膜 $y = r_c$ 上, 而具有正张力的膜处在 $y = 0$ 处. 巨大的等级是由于两膜间的距离产生的. 在负张力膜上测得的普朗克质量 $M_{\rm P}$ 由下式给出:

$$M_{\rm P}^2 \approx {\rm e}^{2kr_c} M_5^3/k\ , \quad k = \sqrt{-\Lambda_5 k_5^2/6}\ , \tag{10.1.8}$$

式中 M_5 是五维普朗克质量, Λ_5 是五维时空宇宙常数 (为负). 可以看出, 如果 M_5 离弱电尺度 $M_W \approx$ TeV 不远, 当 $kr_c \approx 50$ 时才能在膜上有大的普朗克质量. 因此, 当额外维的半径 r_c 取合理的值时, 便能得到弱电尺度和普朗克尺度之间的一个大等级.

膜宇宙模型的另一个问题是宇宙常数问题. 人们希望通过额外维来解释宇宙常数的变小甚至消失. 微调 (fine-tunning) 理论认为膜上的能量密度并不会导致宇宙的大曲率, 反之, 它将使额外维高度弯曲, 最后仍保留一个宇宙常数为零的平直闵可夫斯基膜. 然而, 简单地用高维时空标量场来认识这种机制不能解决宇宙常数问题, 因为高维时空会出现裸奇点. 这个奇点可以被第二个膜掩盖, 而第二个膜的张力已经微调到和原来的膜一致. 下面我们将讨论这一问题.

我们还将讨论膜宇宙理论的另一个重要结论, 即在高能条件下对弗里德曼方程的修正. 我们将看到, 对于 Randall-Sundrum 模型, 弗里德曼方程的形式为

$$H^2 = \frac{k_5^4}{36}\rho^2 + \frac{8\pi G_{\rm N}}{3}\rho + \Lambda\ , \tag{10.1.9}$$

它将膜的膨胀速率 H、(膜) 物质密度 ρ 和 (有效) 宇宙常数联系起来. 通过选择合适的膜张力和五维宇宙常数可以使有效宇宙常数为 0.

在高能条件下,

$$\rho \gg \frac{96\pi G_{\rm N}}{k_5^4}\ , \tag{10.1.10}$$

式中 k_5^2 是五维引力常数, 哈勃速率为

$$H \propto \rho\ . \tag{10.1.11}$$

而一般的宇宙模型中, $H \propto \sqrt{\rho}$, 但在低能条件下,

$$\rho \ll \frac{96\pi G_N}{k_5^4} , \tag{10.1.12}$$

仍然可以得到 $H \propto \sqrt{\rho}$.

当然, 哈勃速率的修正只在核合成前有意义, 它对早期宇宙现象, 如暴胀, 可能有极大的影响.

10.2 Randall-Sundrum 膜宇宙模型

对于普朗克尺度和弱电尺度之间的大等级问题, Randall 和 Sundrum 认为是由于在高度弯曲的五维时空几何中存在两个膜的原因, 这时标准模型中的粒子被限制在具有负张力的膜上, 而这个膜是具有负宇宙常数的反 de Sitter(AdS) 时空, 这就是著名的 Randall-Sundrum Ⅰ (RS Ⅰ) 模型. 受弦理论中平行宇宙理论的启发, ADD 提出了一个六维的膜宇宙模型. 该模型假定引力可在整个高维时空存在, 而标准模型粒子 (即物质) 则被局限于一张 3+1 维子流形 (即膜) 上. 如果该假设成立, 则显然无法通过粒子物理的实验来检验额外维度的存在. 当用引力实验来检验时, 该模型允许额外维度的尺度大到毫米的量级. 而目前最为精确的引力实验也并不排除毫米尺度的额外维度存在的可能性.

之后, Randall 和 Sundrum 提出了一个全新的膜宇宙模型. 本节首先对 RS Ⅰ模型作一简单的介绍, 然后重点讨论 RS Ⅱ模型. RS Ⅰ模型构造在一个五维的 AdS 时空之上. 该模型仍假定标准模型的粒子 (即观测宇宙中的物质) 被禁闭在 AdS 时空中的一张膜上. 而额外维度 (即第五维) 具有 Z_2 对称性. 在该模型中, 除了禁闭物质的一张膜之外, 还存在着另一张膜. 这两张膜分别处于额外维度的两个 orbifold fixed 点上. 该模型非常关键的一点是假定时空度规是不可约的, 即五维度规的四维分量是依赖于额外维度的, 是额外维度坐标的函数. 将额外维度的坐标记为 $\phi(-\pi \leqslant \phi \leqslant \pi)$. 两张膜分别处于 $\phi = 0, \pi$ 处. 而膜上的度规就是相应的五维度规的四维分量

$$g^1_{\mu\nu}(x^\mu) = G_{\mu\nu}(x_\mu, \phi = \pi) , \tag{10.2.1a}$$

$$g^2_{\mu\nu}(x^\mu) = G_{\mu\nu}(x_\mu, \phi = 0) , \tag{10.2.1b}$$

式中 $G_{MN}(M, N = \mu, \phi)$ 是五维度规. x^μ 为通常的四维坐标, RS Ⅰ模型的作用量为

$$S = S_{\text{gravity}} + S_1 + S_2 , \tag{10.2.2a}$$

$$S_{\text{gravity}} = \int \mathrm{d}^4x \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}\phi \sqrt{-G}\{-\Lambda + 2M^3 R\} , \tag{10.2.2b}$$

$$S_1 = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g_1}\{L_1 - V_1\} , \tag{10.2.2c}$$

$$S_2 = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g_2}\{L_2 - V_2\} , \tag{10.2.2d}$$

式中 S_{gravity} 为引力作用量, S_1, S_2 分别为两张膜上的作用量. Λ 是五维宇宙常数. M 为五维普朗克质量. V_1, V_2 两个常数分别为两张膜上的真空能量. L_1, L_2 分别为两张膜上的拉格朗日函数. 由此作用量出发, Randall 和 Sundrum 导出了五维爱因斯坦方程

$$\sqrt{-G}\left(R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R\right) = -\frac{1}{4M^3}[\Lambda\sqrt{-G}G_{MN} + V_1\sqrt{-g_1}g^1_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\delta(\phi-\pi)$$
$$+V_2\sqrt{-g_2}g^2_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\delta(\phi)] . \tag{10.2.3}$$

在假定解具有沿 x^μ 方向的 Poincare 不变性的情况下, Randall 和 Sundrum 求得了如下形式的解:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{-2kr_c|\phi|}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + r_c^2\mathrm{d}\phi^2 , \tag{10.2.4}$$

式中 r_c 为紧致半径, k(一个和普朗克尺度同阶的量) 满足

$$V_1 = -V_2 = 24M^3k , \tag{10.2.5}$$

$$\Lambda = -24M^3k^2 . \tag{10.2.6}$$

如果只分析爱因斯坦场方程的正张力膜解, 而将负张力膜放到无穷远处, 此即 RS II模型. 当 AdS 的曲率尺度小于 1mm, 则限制在正张力膜上的观测者将重新得到牛顿定律.

下面我们详细讨论这种 RS II模型. 根据这种模型, 引力场存在于连续的 Kaluza-Klein 模, 而如果额外维是周期性的, 将出现分立谱. 这使膜上两个静止质量之间的力得到修正. 膜上两个质点之间的势能为

$$V(r) = \frac{G_N m_1 m_2}{r}\left(1 + \frac{l^2}{r^2} + O(r^{-3})\right) , \tag{10.2.7}$$

式中 l 与五维时空宇宙常数 Λ_5 之间的关系由 $l^2 = -6/(k_5^2\Lambda_5)$ 给出, 由此可以量度五维时空的曲率. 由于在大于 1mm 的尺度上引力实验与牛顿引力理论很好地相符, 所以 l 必须小于 1mm.

RS II模型的静态解可以通过爱因斯坦 - 希尔伯特作用量和膜作用量构成的总作用量获得, 这两种作用量分别为

$$S_{\rm EH} = -\int {\rm d}x^5 \sqrt{-g^{(5)}} \left(\frac{R}{2k_5^2} + \Lambda_5 \right) , \tag{10.2.8}$$

$$S_{\rm brane} = \int {\rm d}x^4 \sqrt{-g^{(4)}} (-\sigma) . \tag{10.2.9}$$

Λ_5(五维时空宇宙常数) 和 σ(膜张力) 都是常数. k_5 是五维引力耦合常数, 膜的位置处在 $y = 0$ 处, 并且假设它具有 Z_2 对称性, 即 y 和 $-y$ 没有区别. 设时空线元为

$$ {\rm d}s^2 = {\rm e}^{-2K(y)} \eta_{\mu\nu} {\rm d}x^\mu {\rm d}x^\nu + {\rm d}y^2 . \tag{10.2.10}$$

由前式给出的作用量可以得到爱因斯坦场方程, 它给出两个独立的方程

$$6K'^2 = -k_5^2 \Lambda_5 ,$$
$$3K'' = k_5^2 \sigma \delta(y) .$$

第一个方程很容易解出, 得到

$$K = K(y) = \sqrt{-\frac{k_5^2}{6} \Lambda_5 y} \equiv ky , \tag{10.2.11}$$

它告诉我们 Λ_5 必须是负的. 将第二个方程从 $-\epsilon$ 到 $+\epsilon$ 积分, 取极限 $\epsilon \to 0$, 并利用 Z_2 对称性, 我们得到

$$6K'|_0 = k_5^2 \sigma . \tag{10.2.12}$$

结合方程 (10.2.11) 可以得到

$$\Lambda_5 = -\frac{k_5^2}{6} \sigma^2 \sigma . \tag{10.2.13}$$

因此, 为了得到静态解, 膜张力和五维时空宇宙常数之间必须有微调. 下面我们比较详细地讨论 RS Ⅱ模型的宇宙学.

有两种方法可以得到宇宙学方程, 下面将分别描述. 第一种非常简单而且只用到了五维时空方程, 第二种方法利用了四维量和五维量之间的几何关系. 我们先讨论较简单的一种.

10.2.1 由五维爱因斯坦场方程得到的弗里德曼方程

下面我们设 $k_5 \equiv 1$, 描述五维时空的度规为

$$ {\rm d}s^2 = a^2 b^2 ({\rm d}t^2 - {\rm d}y^2) - a^2 \delta_{ij} {\rm d}x^i {\rm d}x^j . \tag{10.2.14}$$

这种度规符合 $y = 0$ 处膜上时空的均匀各向同性性质. a 和 b 只是 t 和 y 的函数, 另外, 我们假定了平直空间部分, 可以直接引入空间曲率. 由五维时空的爱因斯坦

场方程得到

$$a^2b^2G_0^0 \equiv 3\left(2\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}-\frac{a''}{a}+\frac{a'b'}{ab}+kb^2\right)=a^2b^2[\rho_{\rm B}+\rho\bar{\delta}(y-y_b)], \tag{10.2.15}$$

$$a^2b^2G_5^5 \equiv 3\left(\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}-2\frac{a'^2}{a^2}-\frac{a'b'}{ab}+kb^2\right)=-a^2b^2T_5^5, \tag{10.2.16}$$

$$a^2b^2G_5^0 \equiv 3\left(-\frac{\dot{a}'}{a}+2\frac{\dot{a}a'}{a^2}+\frac{\dot{a}b'}{ab}+\frac{a'\dot{b}}{ab}\right)=-a^2b^2T_5^0, \tag{10.2.17}$$

$$\begin{aligned} a^2b^2G_j^i \equiv& \left(3\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\ddot{b}}{b}-\frac{\dot{b}^2}{b^2}-3\frac{a''}{a}-\frac{b''}{b}+\frac{b'^2}{b^2}+kb^2\right)\delta_j^i \\ =& -a^2b^2[p_B+p\bar{\delta}(y-y_b)]\delta_j^i. \end{aligned} \tag{10.2.18}$$

其中五维时空的能量–动量张量 T_b^a 具有一般形式. 对于 RS II 模型, 我们取 $\rho_{\rm B}=-p_{\rm B}=\Lambda_5$ 和 $T_5^0=0$. 后面我们将利用这些方程得到五维时空含标量场时的弗里德曼方程. 方程中的点表示对时间 t 求导, 撇号表示对 y 求导. 将方程的 00 分量对 y 从 $-\epsilon$ 到 ϵ 积分, 并利用 $a(y)=a(-y), b(y)=b(-y), a'(y)=-a(-y)$ 和 $b'(y)=-b(-y)$(即 Z_2 对称性), 当 $\epsilon\to 0$ 时得到

$$\frac{a'}{a}|_{y=0}=\frac{1}{6}ab\rho\,. \tag{10.2.19}$$

同样, 积分 ij 分量, 并利用最后一个方程, 得到

$$\frac{b'}{b}|_{y=0}=-\frac{1}{2}ab(\rho+p)\,. \tag{10.2.20}$$

这两个方程称为连接条件. 当 $y=0$ 时, 爱因斯坦场方程的 05 分量给出

$$\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}(\rho+p)=0\,. \tag{10.2.21}$$

其中我们利用了连接条件 (10.2.19) 和 (10.2.20). 此式表明膜上物质守恒.

同样地, 55 分量给出

$$\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+kb^2=-\frac{a^2b^2}{3}\left[\frac{1}{12}\rho(\rho+3p)+q_{\rm B}\right]\,. \tag{10.2.22}$$

代入宇宙时 $\mathrm{d}\tau=ab\mathrm{d}t$, 将 a 写成 $a=\exp(\alpha(t))$ 并利用能量守恒, 得到

$$\frac{\mathrm{d}(H^2\mathrm{e}^{4\alpha})}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{2}{3}\Lambda_5\mathrm{e}^{4\alpha}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\mathrm{e}^{4\alpha}\frac{\rho^2}{36}\right)\,, \tag{10.2.23}$$

式中 $aH=\mathrm{d}a/\mathrm{d}\tau$. 式 (10.2.23) 积分得到

$$H^2=\frac{\rho^2}{36}+\frac{\Lambda_5}{6}+\frac{\mu}{a^4}\,. \tag{10.2.24}$$

最后一步我们将总的能量密度和压强分成物质部分和膜张力部分, 即 $\rho = \rho_{\mathrm{M}} + \sigma$ 和 $p = p_{\mathrm{M}} - \sigma$, 然后我们得到弗里德曼方程

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\mathrm{M}}\left(1 + \frac{\rho_{\mathrm{M}}}{2\sigma}\right) + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\mu}{a^4}\,, \tag{10.2.25}$$

式中

$$\frac{8\pi G}{3} = \frac{\sigma}{18}\,, \tag{10.2.26}$$

$$\frac{\Lambda_4}{3} = \frac{\sigma^2}{36} + \frac{\Lambda_5}{6}\,. \tag{10.2.27}$$

对比最后一个方程和静态 Randall-Sundrum 解中的微调 (10.2.13) 可知 $\Lambda_4 = 0$. 如果膜张力和五维宇宙常数有一小的失调, 就会生成一个有效四维宇宙常数. 另一个重要的问题是四维牛顿常数与膜张力直接相关, μ 是积分常数, 方程中含 μ 的项称为暗辐射项. μ 可以通过五维时空方程求出 (后面将讨论). Birkhoff 定理的广义表述告诉我们, 如果五维时空是 AdS, 这个常数 μ 为 0, 如果五维时空是 AdS-Schwarzschild 时空, μ 不为 0, 且这时的 μ 值可以用来量度五维时空黑洞的质量. 下面我们假设 $\mu = 0$, $\Lambda_4 = 0$.

对比一般的四维弗里德曼方程形式, 这里的弗里德曼方程多了正比于 ρ^2 的项, 这说明如果物质能量密度远大于膜张力, 即 $\rho_{\mathrm{M}} \gg \sigma$, 则膨胀速率正比于 ρ_{M}, 而不是 $\sqrt{\rho_{\mathrm{M}}}$, 膨胀速率变大了. 只有膨胀速率远大于物质能量密度时, 才回到一般的结论, 即 $H \propto \sqrt{\rho_{\mathrm{M}}}$. 这是膜宇宙理论最重要的一个不同之处. 这种改变是普遍的, 而不只限制于 Randall-Sundrum 膜宇宙模型. 从弗里德曼方程和能量守恒方程得到 Raychandhuri 方程

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau} = -4\pi G(\rho_{\mathrm{M}} + p_{\mathrm{M}})\left(1 + \frac{\rho_{\mathrm{M}}}{\sigma}\right)\,. \tag{10.2.28}$$

后面我们将利用这些方程讨论由膜上标量场导致的暴胀问题. 注意到核合成时, 必须忽略弗里德曼方程中的膜宇宙修正, 否则, 膨胀速率将发生改变, 从而导致轻元素丰度的改变, 使得 $\sigma \geqslant (1\mathrm{MeV})^4$. 该理论相对牛顿定律的偏差导致了更强的约束: $k_5^{-3} > 10^5\mathrm{TeV}$ 和 $\sigma \geqslant (100\mathrm{GeV})^4$. 类似地, 对于暗辐射也存在宇宙学约束. 计算表明, 暗辐射能量密度最多也只能是光子能量密度的 10%.

10.2.2　导出爱因斯坦场方程的另一个方法

得到膜上的爱因斯坦场方程还有一种更好的方法. 考虑单位法矢嵌在五维时空中一个任意的 3+1 维超曲面 M 上, 它的诱导度规和外部曲率定义为

$$h^a_b = \delta^a_b - n^a n_b\,, \tag{10.2.29}$$

$$K_{ab} = h^c_a h^d_b \nabla_c n^d\,. \tag{10.2.30}$$

为了得到爱因斯坦场方程, 我们需要三个方程, 其中两个将由 h_{ab} 构成的四维量和由 g_{ab} 构成的五维量联系起来 (Wald,1984). 第一个方程是高斯方程

$$R^{(4)}_{abcd} = h^j_a h^k_b h^l_c h^m_d R_{jklm} - 2K_{a[c}K_{d]b} \,. \tag{10.2.31}$$

这个等式将四维曲率张量 $R^{(4)}_{abcd}$ 和五维曲率张量以及 K_{ab} 联系起来. 接下来是 Cadazzi 方程, 它将 K_{ab}, n_a 和五维 Ricci 张量联系起来:

$$\nabla^{(4)}_b K^b_a - \nabla^{(4)}_a K = n^c h^b_a R_{bc} \,. \tag{10.2.32}$$

我们可以将五维曲率张量分解成 Weyl 张量 C_{abcd} 和 Ricci 张量

$$R_{abcd} = \frac{2}{3}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) - \frac{1}{6}Rg_{a[}g_{b]d} + C_{abcd} \,. \tag{10.2.33}$$

将最后一个方程用高斯方程代替, 并构建一个四维爱因斯坦张量, 我们得到

$$\begin{aligned} G^{(4)}_{ab} = & \frac{2}{3}\left[G_{cd}h^c_a h^d_b + (G_{cd}n^c n^d - \frac{1}{4}G)h_{ab}\right] + KK_{ab} - K^c_a K_{bc} \\ & -\frac{1}{2}(K^2 - K^{cd}K_{cd})h_{ab} - E_{ab} \,, \end{aligned} \tag{10.2.34}$$

式中

$$E_{ab} = C_{abcd}n^c n^d \,. \tag{10.2.35}$$

必须强调, 这个方程对任意超曲面都成立, 如果考虑能量–动量张量为 T_{ab} 的超曲面, K_{ab} 和 T_{ab} 之间存在以下的关系:

$$[K_{ab}] = -k^2_5\left(T_{ab} - \frac{1}{3}h_{ab}T\right) \,, \tag{10.2.36}$$

式中 T 是 T_{ab} 的迹, $[\cdots]$ 表示跃迁

$$[f](y) = \lim_{\epsilon\to 0}(f(y+\epsilon) - f(y-\epsilon)) \,. \tag{10.2.37}$$

这些方程称为连接条件, 他们等效于宇宙学背景中的连接条件 (10.2.19) 和 (10.2.20). 将 T_{ab} 分离,$T_{ab} = \tau_{ab} - \sigma h_{ab}$, 并在式 (10.2.34) 中代入连接条件, 得到膜上的爱因斯坦场方程

$$G^{(4)}_{ab} = 8\pi G\tau_{ab} - \Lambda_4 h_{ab} + k^4_5 \pi_{ab} - E_{ab} \,. \tag{10.2.38}$$

张量 π_{ab} 定义为

$$\pi_{ab} = \frac{1}{12}\tau\tau_{ab} - \frac{1}{4}\tau_{ac}\tau^c_b + \frac{1}{8}h_{ab}\tau_{cd}\tau^{cd} - \frac{1}{24}\tau^2 h_{ab} \,. \tag{10.2.39}$$

而

$$8\pi G = \frac{k_5^4 \sigma}{6} , \tag{10.2.40}$$

$$\Lambda_4 = \frac{k_5^2}{2} \left(\Lambda_5 + \frac{k_5^2}{6} \sigma^2 \right) . \tag{10.2.41}$$

在 Randall-Sundrum 模型中, 由于膜张力和五维时空宇宙常数之间的微调, 我们有 $\Lambda_4 = 0$, 又因为 AdS 时空的 Weyl 张量为 0, 所以 $E_{ab} = 0$. 利用能量守恒和 Bianchi 恒等式, 在膜上有

$$k_5^4 \nabla^a \pi_{ab} = \nabla^a E_{ab} . \tag{10.2.42}$$

这种方法的优点是既没假设宇宙均匀各向同性也没假设五维时空是 AdS 时空, 当五维时空是 AdS 时空且膜是 FRW 时空时, 上面的方程退化到之前的弗里德曼方程和 Raychaudhuri 方程.

10.2.3　膜上的慢滚动暴胀

在高能条件下, ρ^2 项起主要作用, 这时弗里德曼方程有很大的修改, 膜上的早期宇宙学将与标准 4D 宇宙学不同. 这似乎自然地使人们寻找早期宇宙现象 (如暴胀) 的膜效应. 标量场的能量密度和压强为

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + V(\phi) , \tag{10.2.43}$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - V(\phi) , \tag{10.2.44}$$

式中 $V(\phi)$ 是标量场的势能. 标量场的演化由 (修正的) 弗里德曼方程, Klein-Gordon 方程和 Raychaudhuri 方程描述.

假设场是慢滚动的, 场的演化由下面的方程描述 (从现在起, 方程中的点号表示对宇宙时求导):

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{\partial V}{\partial \phi} , \tag{10.2.45}$$

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \left(1 + \frac{V(\phi)}{2\sigma} \right) . \tag{10.2.46}$$

由这些方程不难发现, 慢滚动参数为

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \left[\frac{4\sigma(\sigma + V)}{(2\sigma + V)^2} \right] , \tag{10.2.47}$$

$$\eta \equiv -\frac{\dot{V''}}{3H^2} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V''}{V} \right) \left[\frac{2\sigma}{2\sigma + V} \right] . \tag{10.2.48}$$

上式方括号内的表达式是对广义相对论的修正. 这表明对于给定势和初始条件的标量场, 慢滚动参数比广义相对论预言的减小了. 换言之, 膜宇宙效应减缓了慢滚动暴胀. 当 $\sigma \ll V$ 时, 慢滚动参数被严重削弱. 这表明采用更陡的势可以推进慢滚动暴胀. 下面我们讨论宇宙微扰的含义.

根据爱因斯坦场方程 (10.2.38), 度规的微扰不仅源于物质微扰还源于隐含在 E_{ab} 微扰中的五维时空几何微扰, 可以将其看成外部微扰源. 这在广义相对论中是没有的. 从方程 (10.2.42) 可以看出, 如果将 E_{ab} 看作另一种流体 (称为 Weyl 流体) 的能量 – 动量张量, 那么它的演化将与膜上的物质能量密度有关. 忽略 Weyl 流体压强的各向异性, 它在低能条件下和超视界尺度上像辐射一样衰减, 即 $\delta E_{ab} \propto a^{-4}$. 然而, 五维时空引力场使得膜上的压强各向异性, 从而导致不能只通过膜上的投影方程获得膜的时间演化, 必须解出所有满足连接条件的五维方程.

人们至今还无法理解宇宙不同区域 E_{ab} 的完整演化过程. 下面我们讨论对于 de Sitter 膜已得出的部分结论. 研究表明, E_{ab} 并不改变标量微扰谱. 但人们还不清楚从宇宙微波背景辐射各向异性的事实来看, 辐射为主时期和物质为主时期的瞬时宇宙演化是否留下了五维时空引力场的痕迹. 考虑到这个问题, 对于标量微扰我们将忽略由投影 Weyl 张量描述的引力反作用. 考虑标量微扰后, 膜上的时空线元为

$$\mathrm{d}s^2 = -(1+2A)\mathrm{d}t^2 + 2\partial_i B \mathrm{d}t\mathrm{d}x^i + [(1-2\psi)\delta_{ij} + D_{ij}E]\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \ , \tag{10.2.49}$$

式中 A, B, E 和 ψ 是 t 和 x^i 的函数. 讨论标量微扰的一个很重要的方法是利用规范不变量

$$\zeta = \psi + H\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} \ . \tag{10.2.50}$$

在广义相对论中, ζ 的演化方程可以由能量守恒方程得到. 在大尺度上有

$$\dot{\zeta} = -\frac{H}{\rho + p}\delta p_{\mathrm{nad}} \ , \tag{10.2.51}$$

式中 $\delta p_{\mathrm{nad}} = \delta p_{\mathrm{tot}} - c_s^2\delta\rho$ 是非绝热压强微扰. 能量守恒方程对于 Randall-Sundrum 模型也成立. 因此式 (10.2.51) 对我们考虑的膜宇宙模型仍成立. 单一标量场 δp_{nad} 引起的暴胀会消失, 所以暴胀时期 ζ 在超视界尺度上是常数. 它的幅是平直超曲面上标量场涨落的函数

$$\zeta = \frac{H\delta\phi}{\dot{\phi}} \ . \tag{10.2.52}$$

由于膜宇宙模型中 Klein-Gordon 方程没有改变, (慢滚动) 标量场中的量子涨落满足 $\langle(\delta\phi)^2\rangle(H/2\pi)^2$. 标量微扰幅为 $A_S^2 = 4\langle\zeta^2\rangle/25$. 利用慢滚动方程和式 (10.2.52)

可以得到 (Maartens et al.,2000)

$$A_S^2 \approx \left(\frac{512\pi}{75M_{\rm P}^6}\right)\frac{V^3}{V'^2}\left[\frac{2\sigma+V}{2\sigma}\right]^3\bigg|_{k=aH} . \tag{10.2.53}$$

方括号内的仍是修正项. 可以看出, 对于给定的势, 标量微扰幅比广义相对论预言的增大了.

很多研究者认为, 微扰在暴胀时期并不重要, 至少标量微扰是这样的. 但是对于张量微扰, 这一结论不一定正确. 因为引力波可以在五维时空中传播. 对于张量微扰, 可以得到单一变量的波动方程, 该方程可以分解成四维部分和五维部分, 波动方程的解的形式为 $h_{ij}=A(y)h(x^\mu)e_{ij}$, 其中 e_{ij} 是 (常) 极化张量. 张量微扰的零模幅为

$$A_T^2=\frac{4}{25\pi M_{\rm P}^4}H^2F^2(H/\mu)|_{k=aH} , \tag{10.2.54}$$

式中

$$F(x)=\left[\sqrt{1+x^2}-x^2\mathrm{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-1/2} , \tag{10.2.55}$$

我们定义了

$$\frac{H}{\mu}=\left(\frac{3}{4\pi\sigma}\right)^{1/2}HM_{\rm P} . \tag{10.2.56}$$

可以看出生成了 $m>3H/2$ 的模, 但它在暴胀时期是衰减的. 因此, 可能只有无质量模能够维持到暴胀结束的时候.

由式 (10.2.54) 和 (10.2.53) 可以看出, 标量微扰和张量微扰的幅在高能时都加强了, 但标量微扰加强得更多, 因此, 如果暴胀发生在高能量时期, 张量微扰的相关贡献就被削弱了.

最后, 我们还要指出, 在预言双场膜暴胀的问题上, 广义相对论和本文讨论的膜宇宙模型存在区别. 两者的相关性分为绝热双场暴胀和等曲率双场暴胀. 在 Randall-Sundrum 模型中, 这种暴胀发生在高能时期, 这种关系变弱了. 这意味着, 如果暴胀发生在能量远大于膜张力时, 那么等曲率微扰和绝热微扰是不相关的.

宇宙微扰的最大问题在于只有在背景宇宙中才可能计算投影 Weyl 张量. 分析膜宇宙微扰时, 必须考虑含 E_{0i} 项可能不为 0. 这意味着密度方程与 $\delta=\delta\rho/\rho$ 不同, 而是由下式给出:

$$\ddot\delta+(2-3\omega_m)H\dot\delta-6\omega_m(H^2+\dot H)\delta=(1+\omega_m)\delta R_{00}-\omega_m\frac{k^2}{a^2}\delta , \tag{10.2.57}$$

式中 $w_m = p/\rho$, k 是波数. 当 δR_{00} 包含 δE_{00} 时, 这个方程无法解出.

以上讨论的 R-S 模型是最简单的膜宇宙模型. 我们没有讨论修正后的弗里德曼方程导出的其他重要结论, 如原初黑洞的演化.

10.3 含有五维时空标量场的模型

我们将前面得出的结论推广到含标量场的五维时空. 为了讨论膜动力学, 我们可以研究投影爱因斯坦场方程和 Klein-Gordon 方程.

10.3.1 BPS 背景

我们讨论一个特例, 五维时空的拉氏量为

$$S = \frac{1}{2k_5^2}\int \mathrm{d}^5x\sqrt{-g_5\left(R - \frac{3}{4}((\partial\phi)^2 + V(\phi))\right)}\,, \tag{10.3.1}$$

式中 $V(\phi)$ 是五维时空的势, 边界作用取决于膜势 $U_B(\phi)$

$$S_B = -\frac{3}{2k_5^2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g_4 U_B(\phi_0)}\,, \tag{10.3.2}$$

$U_B(\phi)$ 在膜上计算. BPS 背景是一种特殊情形, 五维时空势能和膜势能之间存在特殊的关系. 研究 $N = 2$ 且具有矢量多重谱的超引力时, 会出现这种关系, 五维时空势为

$$V = \left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2 - W^2\,, \tag{10.3.3}$$

式中 $W(\phi)$ 是超势, 膜势由超势给出

$$U_B = W\,. \tag{10.3.4}$$

最后两个关系式还用于生成五维时空解而不必用到超对称性. 取 $W = \text{const}$, 便回到 R-S 情形. 加上超引力的约束, 超势变为指数形式

$$W = 4k\mathrm{e}^{\alpha\phi}\,, \tag{10.3.5}$$

$\alpha = -1/\sqrt{12}, 1/\sqrt{3}$. 五维时空运动方程包括爱因斯坦场方程和 Klein-Gordon 方程. 在 BPS 中, 设度规为

$$\mathrm{d}s^2 = a(y)^2\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}y^2\,. \tag{10.3.6}$$

这些二阶微分方程可以化为一阶微分方程组

$$\frac{a'}{a} = -\frac{W}{4}\,, \quad \phi' = \frac{\partial W}{\partial \phi}\,. \tag{10.3.7}$$

当 W 为常数时, 又回到 R-S 模型.

由边界条件可以得到 BPS 系统的一个有趣的性质. Israel 连接条件退化为

$$\frac{a'}{a}|_B = -\frac{W}{4}|_B\,, \tag{10.3.8}$$

对于标量场有

$$\phi'|_B = \frac{\partial W}{\partial \phi}|_B\,, \tag{10.3.9}$$

这是 BPS 最重要的性质: 边界条件和五维时空方程一致. 换言之, 一旦解出五维时空方程就可以将 BPS 膜放在背景的任意处, 边界条件对此没有任何限制.

下面我们以指数形式的超势为例, 标度因子解为

$$a = (1 - 4k\alpha^2 x_5)^{1/4\alpha^2}\,, \tag{10.3.10}$$

标量场为

$$\phi = -\frac{1}{\alpha}\ln(1 - 4k\alpha^2 x_5)\,. \tag{10.3.11}$$

当 $\alpha \to 0$ 时, 五维时空标量场消失, 表达式又回到 R-S 情形. 这里出现了一个新的特征, 即五维时空存在奇点

$$\alpha(x_5)|_{x_*} = 0\,. \tag{10.3.12}$$

为了便于分析奇点的性质, 我们采用共形坐标系

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x_5}{a(x_5)}\,. \tag{10.3.13}$$

在这个坐标系中光沿直线 $u = \pm t$ 传播. 若 $\alpha^2 < 1/4$, 奇点在 $u_* = \infty$ 处, 这个奇点是类光的, 它将吸收入射的引力波. 换言之, 波包的传播不只是在奇点附近才有定义. 综上所述, 含五维时空标量场的膜宇宙模型的一个重要缺陷就是存在裸奇点.

10.3.2 de Sitter 膜和反 de Sitter 膜

与 BPS 情况

$$U_B = TW \tag{10.3.14}$$

相比较, 通过张力的微调失谐对 BPS 稍有修正, 这相当于增加或减少张力. 式 (10.3.14) 中 T 是实数. 注意到修正只影响边界条件, 五维几何和标量场仍是 BPS 运动方程的解. 此时, 膜不再是静态的. 在失谐情况下, 得到一个升高了的膜或旋转了的膜. 接下来我们推广这个结论, 然后再详细解释. 定义 $u(x^\mu)$ 为共形坐标系中膜的位置, 我们得到

$$(\partial u)^2 = \frac{1-T^2}{T^2} \,. \tag{10.3.15}$$

膜速度矢量和一般的形式一样. 对于 $T>1$, 膜速度是类时的, 且膜做匀速运动. 对于 $T<1$, 膜速度矢量是类空的, 且膜是旋转的. 回到静态膜情形, 我们看到五维时空几何和标量场依赖于 x^μ. 下面我们会发现膜在静态五维时空中运动, 或者说非静态五维时空的边界处是静态膜.

通过研究 $T>1$ 的膜几何, 我们对前面的讨论作一个小结. 可以通过弗里德曼方程得到诱导五维时空因子

$$H^2 = \frac{T^2-1}{16} W^2 \,, \tag{10.3.16}$$

式中 W 在膜上计算, 可以发现宇宙解只在 $T>1$ 时有效. 在 R-S 模型中, 由 $W=4k$ 得到

$$H^2 = (T^2-1)k^2 \,. \tag{10.3.17}$$

当 $T>1$ 时, 膜几何是由正的宇宙常数驱动的, 它只驱动 de Sitter 膜. 当 $T<1$ 时, 宇宙常数是负的, 它驱动反 de Sitter 膜.

10.3.3 五维时空标量场和投影方法

首先我们沿用与坐标系无关的方法, 这样可以得到膜上的物质守恒方程、Klein-Gordon 方程和弗里德曼方程. 然后我们关注更加几何化的形式, 投影 Weyl 张量有重要作用. 下面我们取 $k_5 \equiv 1$.

考虑一个静态膜, 将它放在 $x_5=0$ 处, 并设 $b(0,t)=1$, 这是为了保证膜和五维时空的膨胀速率一致

$$4H = \partial_r\sqrt{-g}|_0 \,, \quad 3H_B = \partial_r\sqrt{-g_4}|_0 \,. \tag{10.3.18}$$

我们定义宇宙时为 $\mathrm{d}\tau = ab|_0\mathrm{d}t$. 撇号表示求法向导数 $\partial_n = \frac{1}{ab}|_0\partial_{x_5}$. 另外, 考虑到将出现在膜上的物质, 我们有

$$\tau_\nu^{\mu\mathrm{matter}} = (-\rho_m, p_m, p_m, p_m) \,. \tag{10.3.19}$$

五维时空的能量 – 动量张量为

$$T_{ab} = \frac{3}{4}(\partial_a\phi\partial_b\phi) - \frac{3}{8}g_{ab}((\partial\phi)^2 + V) . \tag{10.3.20}$$

膜上总的物质密度和压强为

$$\rho = \rho_m + \frac{3}{2}U_B , \quad p = p_m - \frac{3}{2}U_B . \tag{10.3.21}$$

膜上物质的出现没有改变标量场的边界条件.

由爱因斯坦场方程的 05 分量得到物质守恒方程

$$\dot{\rho}_m = -3H(\rho_m + p_m) . \tag{10.3.22}$$

由爱因斯坦场方程的 55 分量, 我们得到

$$H^2 = \frac{\rho^2}{36} - \frac{2}{3}Q - \frac{1}{9}E + \frac{\mu}{a^4} , \tag{10.3.23}$$

式中以 k_5^2 为单位. 最后一项代表暗辐射项, 原因与 R-S 模型中的一样. Q 和 E 满足微分方程

$$\dot{Q} + 4HQ = HT_5^5 , \quad \dot{E} + 4HE = -\rho T_5^0 .$$

积分这些方程得到

$$H^2 = \frac{\rho^2}{36} + \frac{U_B\rho_m}{12} - \frac{1}{16a^4}\int \mathrm{d}\tau\frac{\mathrm{d}a^4}{\mathrm{d}\tau}(\dot{\phi}^2 - 2U) - \frac{1}{12a^4}\int \mathrm{d}\tau a^4\rho_m\frac{\mathrm{d}U_B}{\mathrm{d}\tau} . \tag{10.3.24}$$

为得到暗辐射项, 我们用到了

$$U = \frac{1}{2}\left(U_B^2 - \left(\frac{\partial U_B}{\partial\phi}\right)^2 + V\right) , \tag{10.3.25}$$

这是含五维时空标量场时膜上的弗里德曼方程. 注意到这里出现了由膜和标量场动力学历史引起的延缓效应. 下面我们会发现, 这些延缓效应源于投影 Weyl 张量, 是由膜和五维时空之间交换能量所导致的. 我们注意到, 牛顿常数依赖于膜上五维时空标量场的值 $[\phi_0 = \phi(t, y=0)]$

$$\frac{8\pi G_{\mathrm{N}}(\phi_0)}{3} = \frac{k_5^2U_B(\phi_0)}{12} . \tag{10.3.26}$$

在宇宙尺度上, 标量场随时间的变化导致牛顿常数随时间变化, 这使得实验上有很大约束, 也严格限制了标量场对时间的依赖.

为了对弗里德曼方程的物理含义有一个直观的认识, 我们假设标量场在标度因子的变化尺度上演化得很慢, 忽略牛顿常数的演化, 此时弗里德曼方程简化为

$$H^2 = \frac{8\pi G_{\mathrm{N}}(\phi)}{3}\rho_m + \frac{U}{8} - \frac{\dot{\phi}^2}{16} . \tag{10.3.27}$$

这里有几点需要说明. 首先, 我们忽略了 ρ^2 项的贡献, 因为我们考虑低于膜张力的能量尺度. 标量场动力学的主要影响是使得弗里德曼方程包含了势能 U 和动能 $\dot{\phi}^2$. 虽然势能为正, 但动能是负的. 在 10.5 节讨论四维低能有效作用量时, 我们将再次分析这个问题. 动能的负号是由于在爱因斯坦标架中牛顿常数不变. 换成膜标架时, 有效四维理论中也会出现类似的负号.

含时标量场由 Klein-Gordon 方程确定, 其动力学形式为

$$\ddot{\phi} + 4H\dot{\phi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \omega_m\right)\rho_m \frac{\partial U_B}{\partial \phi} = -\frac{\partial U}{\partial \phi} + \Delta \Phi_2 , \tag{10.3.28}$$

式中 $p_m = \rho_m \omega_m$,

$$\Delta \Phi_2 = \phi''\Big|_0 - \frac{\partial U_B}{\partial \phi}\frac{\partial^2 U_B}{\partial \phi^2}\Big|_0 . \tag{10.3.29}$$

它不能为 0, 下面讨论宇宙解时假设这一项为负.

标量场的演化由两个影响驱动. 首先标量场通过 U 的梯度与能量–动量张量的迹耦合, 其次, 场由势 U 的梯度驱动, 这个梯度可以不为 0.

回到非平庸的弗里德曼方程, 利用 Gauss-Codazzi 方程可以得到膜上的爱因斯坦场方程

$$\bar{G}_{ab} = -\frac{3}{8}Uh_{ab} + \frac{U_B}{4}\tau_{ab} + \pi_{ab} + \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{5}{16}(\partial\phi)^2 h_{ab} - E_{ab} . \tag{10.3.30}$$

现在可以在均匀各向同性宇宙情形下确定投影 Weyl 张量了. 实际上, 只有 E_{00} 分量是独立的. 利用毕安奇恒等式 $\bar{\mathrm{D}}^a\bar{G}_{ab} = 0$, $\bar{\mathrm{D}}^a$ 为膜协变导数, 可以得到

$$\dot{E}_{00} + 4HE_{00} = \partial_\tau\left(\frac{3}{16}\phi^2 + \frac{3}{8}U\right) + \frac{3}{2}H\dot{\phi}^2 + \frac{\dot{U}_B}{4}\rho_m , \tag{10.3.31}$$

进而得到

$$E_{00} = \frac{1}{a^4}\int \mathrm{d}\tau a^4 \left(\partial_\tau\left(\frac{3}{16}\phi^2 + \frac{3}{8}U\right) + \frac{3}{2}H\dot{\phi}^2 + \frac{\dot{U}_B}{4}\rho_m\right), \tag{10.3.32}$$

利用

$$\bar{G}_{00} = 3H^2 , \tag{10.3.33}$$

可以得到弗里德曼方程. 不难看出, 延缓效应是由于投影 Wely 张量引起的.

10.3.4 微调和宇宙加速膨胀

膜动力学不是封闭的, 它是一个开放系统并不断与五维时空交换能量, 主要体现在暗辐射项和亏损参量上. 由于我们只讨论膜上的物理量, 采用投影方法时不需要详细了解膜动力学. 下面我们假设不存在暗辐射项, 并忽略亏损参量. 另外, 我们讨论五维时空标量场在不驱动暴胀的情况下对后期宇宙 (即核合成后) 的影响.

我们利用微调来解决宇宙常数问题. 对应于 $\alpha = 1$ 的 BPS 超势, 对于任意的膜张力值都有 $U = 0$, 由此可以解释膜宇宙学常数的消失. 物理上我们把膜宇宙常数的消失解释为膜张力使五维时空弯曲, 从而形成一个完整的平直膜. 然而这种五维时空几何描述会导致五维时空奇点, 这个奇点必须由第二个膜掩盖, 这时第二个膜经过微调后与第一个膜的张力一致. 这再次表明, 微调是公认的解决宇宙常数问题的方法.

我们将微调推广到 $\alpha \neq 1$ 的情况, 即 $U_B = TW, T > 1$ 且 W 是指数形式的超势, 得到膜上的诱导度规属于 FRW 型, 标度因子为

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3+1/6\alpha^2} , \tag{10.3.34}$$

从而得到宇宙减速因子

$$q_0 = \frac{6\alpha^2}{1+2\alpha^2} - 1 , \tag{10.3.35}$$

对于超引力的值 $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{12}}$, 得到 $q_0 = -\frac{4}{7}$, 这与超新星观测结果吻合. 这个模型堪称膜宇宙理论的典范, 后面我们还要讨论这个理论的缺陷.

10.3.5 膜宇宙的演化

考虑存在五维时空标量场时的宇宙, 假设在辐射为主时期和物质为主时期五维时空标量场的势能 U 可以忽略.

在远大于膜张力的高能条件下, 可以得到一个由弗里德曼方程中 ρ^2 项决定的特殊的宇宙. 假设在辐射为主时期标度因子的行为满足

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/4} , \tag{10.3.36}$$

而标量场满足

$$\phi = \phi_i + \beta \ln \left(\frac{t}{t_0}\right) . \tag{10.3.37}$$

可以看出, 在辐射为主时期不存在修正. 假如

$$\phi = \phi_i , \tag{10.3.38}$$

这是当辐射能量 - 动量张量的迹为 0 时 Klein-Gordon 方程的一个解 (还有一个衰减解, 我们忽略了). 在物质为主时期, 标量场由于与能量 - 动量张量的迹耦合而演化, 这会导致两个结果: 第一, 标量场的动能会对弗里德曼方程有贡献; 第二, 有效牛顿常数不再是常数. 由于核合成, 牛顿常数的宇宙演化受到严格限制, 也限制了 ϕ 的演化. 为了定量地讨论, 我们回到具有失谐参数 T 的指数超势. 标量场和标度因子与时间的关系为

$$\phi=\phi_1-\frac{8}{15}\alpha\ln\left(\frac{t}{t_e}\right)\ ,\quad a=a_c\left(\frac{t}{t_e}\right)^{\frac{2}{3}-\frac{8}{45}\alpha^2}\ ,$$

式中 t_e 和 a_e 是物质和辐射平衡时的时间和标度因子, 注意标度因子的指数与标准模型中的 $\dfrac{2}{3}$ 有微小的差异. 与牛顿常数相关的红移值为

$$\frac{G_{\rm N}(z)}{G_{\rm N}(z_e)}=\left(\frac{z+1}{z_e+1}\right)^{4\alpha^2/5}\ . \tag{10.3.39}$$

当引力模型取 $\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{12}}$ 和 $z\sim10^3$ 时, 可以算出自核合成以来, 红移减少了约 37%, 这个结果与实验观测基本符合.

最后, 我们分析标量场的膜势能 U 导致宇宙加速膨胀的可能性. 当忽略膜上的物质时, 可以构建一些膜 quintessence 模型. 这会导致微调问题

$$M^4\sim\rho_c\ , \tag{10.3.40}$$

式中 $M^4=(T-1)\dfrac{3W}{2k_5^2}$ 是膜上失谐张力的大小. 如果像大部分 quintessence 模型那样利用微调来解决, 那么 $\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{12}}$ 的指数模型与五维 quintessence 模型在宇宙学上是一致的.

10.3.6 小结

含五维时空标量场的膜宇宙模型不同于 R-S 模型的地方是引力常数随时间变化. 它与标量 - 张量理论有很多相同之处, 但有一个重要的区别是投影 Weyl 张量和它的演化. 五维时空标量场不仅起 quintessence 的作用, 还在宇宙暴胀时期起重要作用. 人们将会发现, 五维时空标量场在宇宙微波背景辐射各向异性和时空大尺度结构中留下痕迹.

10.4 静态五维时空中运动的膜

到现在为止, 我们主要讨论了膜的演化而不是膜本身. 实际上, 选择方程 (10.2.14) 引入的坐标系对于讨论膜本身是很方便的, 但研究膜动力学和它的几何

时, 这个坐标系不是最好的选择. 我们已经在 10.2 节中提到推广的 Birkhoff 定理, 它表明, 在真空五维时空情况下, 五维时空在某种坐标系中必须是静态的, 宇宙演化膜就在那个时空中运动, 而膜上的观测者看到膜像一个膨胀的宇宙. 当五维时空含标量场时没有这样的定理, 从而使得研究这种系统更复杂.

10.4.1 在 AdS-Schwarzschild 时空中膜的运动

10.3 节我们讨论了与 BPS 构形 (包括 R-S 模型) 相关的静态背景, 这里我们集中讨论其他背景. 在这些背景中, 可以积分五维时空运动方程. 假设度规为

$$\mathrm{d}s^2 = -A^2(r)\mathrm{d}t^2 + B^2(r)\mathrm{d}r^2 + R^2(r)\mathrm{d}\Sigma^2 , \tag{10.4.1}$$

式中 $\mathrm{d}\Sigma^2$ 是三维对称空间的度规, 空间曲率为 $q = 0, \pm 1$. 通常 A, B 和 R 取决于标量场势的类型. 五维时空宇宙常数为负的情形与此不同, 因为根据 Birkhoff 定理, 爱因斯坦场方程的通解由 $A^2 = f, B^2 = \dfrac{1}{f}$ 和 $R = r$ 给出, 且

$$f(r) = q + \frac{r^2}{l^2} - \frac{\mu}{r^2} , \tag{10.4.2}$$

式中 $l = 1/k = \sqrt{-6/(\Lambda_5 k_5^2)}$ 是 AdS 尺度, μ 是黑洞质量. 这个解称为 AdS-Schwarzschild 解.

现在研究在这种背景下张力为 T/l 的膜的运动, 运动方程由连接条件决定. 位于 r 处且具有 Z_2 对称性的膜的运动方程为

$$(\dot{r}^2 + f(r))^{1/2} = \frac{T}{l} r . \tag{10.4.3}$$

$\dot{r}$ 是用膜上的固有时求得的膜速度. 由此得到弗里德曼方程

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 = \frac{T^2 - 1}{l^2} - \frac{q}{r^2} + \frac{\mu}{r^4} . \tag{10.4.4}$$

这样, 膜张力导致一个有效宇宙常数 $(T^2 - 1)/l^2$, 曲率的形式和我们所熟悉的标准宇宙学中的一样, 最后一项暗辐射项的出现是由于时空中有黑洞. 在宇宙膨胀后期, 暗辐射项可以忽略, 重新回到宇宙常数不为 0 的 FRW 宇宙. $T = 1$ 对应于 Randall-Sundrum 情况.

10.4.2 运动的膜

下面我们描述包括前面提到过的 AdS-Schwarzschild 时空在内的一般时空形式.

考虑一个嵌在静态背景中的膜. 它通过坐标 $X^A(x^\mu)$ 参数化, 其中 $A = 0, \cdots, 4$, x^μ 为膜世界坐标. 局部标架

$$e^A_\mu = \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu} \tag{10.4.5}$$

与膜相切. 诱导度规为

$$h_{\mu\nu} = g_{AB}e^A_\mu e^B_\nu \ , \tag{10.4.6}$$

外部曲率为

$$K_{\mu\nu} = e^A_\mu e^B_\nu D_A n_B \ , \tag{10.4.7}$$

式中 n^A 是膜的单位法矢, 由下式定义:

$$g_{AB}n^A n^B = 1 \ , \quad n_A e^A_\mu = 0 \ . \tag{10.4.8}$$

对于嵌在由度规 (10.4.1) 描述的时空中的均匀膜, 我们有 $T = T(\tau), r = r(\tau)$, 其中 τ 是膜上的固有时. 诱导度规为

$$\mathrm{d}s_B^2 = -\mathrm{d}\tau^2 + R^2(\tau)\mathrm{d}\Sigma^2. \tag{10.4.9}$$

局部标架变为

$$e^A_\tau = (\dot{T}, \dot{r}, 0, 0, 0) \ , \quad e^A_i(0, 0, \delta^A_i) \ , \tag{10.4.10}$$

而法矢为

$$n_A = (AB\dot{r}, -B\sqrt{1+\dot{r}^2}, 0, 0, 0) \ . \tag{10.4.11}$$

外部曲率张量的分量为

$$K_{ij} = -\frac{\sqrt{1+B^2\dot{r}^2}}{B}RR'\delta_{ij} \ , \tag{10.4.12}$$

$$K_{\tau\tau} = \frac{1}{AB}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(A\sqrt{1+B^2\dot{r}^2}) \ . \tag{10.4.13}$$

连接条件由下式给出:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{k_5^2}{2}\left(\tau_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\tau h_{\mu\nu}\right) \ . \tag{10.4.14}$$

这意味着膜动力学由运动方程

$$\frac{\sqrt{1+B^2\dot{r}^2}}{B}\frac{R'}{R} = \frac{k_5^2}{6}\rho \ , \tag{10.4.15}$$

$$\frac{1}{AB}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(A\sqrt{1+B^2\dot{r}^2}) = -\frac{k_5^2}{6}(2\rho + 3p) \tag{10.4.16}$$

给出, 我们假设膜上物质是流体. 这两个方程决定了静态背景中任意膜的动力学性质.

为了得到方程组的解, 我们假设标量场边界条件为

$$n^A\partial_A\phi=\frac{k_5^2}{2}\frac{\mathrm{d}\xi}{\phi}(\rho-3p)\ ,\tag{10.4.17}$$

其中与膜的耦合项由拉氏量定义

$$S_{\text{brane}}=\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}[\psi_m,\widetilde{h}_{\mu\nu}]\ ,\tag{10.4.18}$$

ψ_m 代表物质场, 而

$$\widetilde{h}_{\mu\nu}=\mathrm{e}^{2\xi(\phi)}h_{\mu\nu}\ .\tag{10.4.19}$$

由此可以得到

$$\phi'=\frac{k_5^2}{2}\frac{B}{\sqrt{1+B^2\dot{r}^2}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\phi}(-\rho+3p)\ .\tag{10.4.20}$$

结合连接条件便得到守恒方程

$$\dot{\rho}+3H(\rho+p)=(\rho-3p)\dot{\xi}\ .\tag{10.4.21}$$

这只不过是由 $\widetilde{h}_{\mu\nu}$ 定义的 Jordan 标架中的物质守恒方程.

现在我们对静态五维时空中的膜运动做一般的分析. 为此, 将五维时空度规改写为

$$\mathrm{d}s^2=-f^2(r)h(r)\mathrm{d}t^2+\frac{\mathrm{d}r^2}{h(r)}+r^2\mathrm{d}\Sigma^2\ .\tag{10.4.22}$$

重新定义 $\phi\to\dfrac{\sqrt{3}}{2k_5}\phi$ 和 $V\to\dfrac{3}{8k_5^2}V$, 由爱因斯坦场方程得到

$$\frac{3}{r^2}\left(h+\frac{rh'}{2}-q\right)=-k_5^2\left(\frac{h\phi'^2}{2}+V\right)\ ,\tag{10.4.23}$$

$$\frac{3}{r^2}\left(h+\frac{rh'}{2}-q+\frac{hrf'}{f}\right)=k_5^2\left(\frac{h'\phi^2}{2}-V\right)\ .\tag{10.4.24}$$

Klein-Gordon 方程为

$$h\phi''+\left(\frac{3h}{r}+\frac{hf'}{f}+h'\right)\phi'=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}\ .\tag{10.4.25}$$

式 (10.4.24) 减去式 (10.4.23) 并求解相减后得到的微分方程, 得到

$$f=\exp\left(\frac{k_5^2}{3}\int \mathrm{d}rr\phi'^2\right)\ .\tag{10.4.26}$$

此式在求投影 Weyl 张量的空间迹时很有用. 利用 $A=\sqrt{h}f, R=r, B=1/\sqrt{h}$, 可得

$$\frac{\mu}{r^4}=-\frac{E^i_i}{3}=\frac{r}{4f^2}\left(\frac{hf^2}{r^2}\right)'+\frac{q}{2r^2}\,. \tag{10.4.27}$$

对于一般的背景, 此式类似于暗辐射项. 利用式 (10.4.27), 运动方程可以写成如下形式:

$$\mu'=-\frac{k_5^2}{3}\left(\mu-\frac{kr^2}{2}\right)r\phi'^2\,, \tag{10.4.28}$$

$$\mathcal{H}'+4\frac{\mu}{r^5}=-\frac{2k_5^2}{3}\left(\mathcal{H}-\frac{q}{r^2}\right)r\phi'^2\,, \tag{10.4.29}$$

$$k_5^2V=6\mathcal{H}+\frac{3}{4}r\mathcal{H}'-3\frac{\mu}{r^4}\,, \tag{10.4.30}$$

式中

$$\mathcal{H}=\frac{q-h}{r^2}\,. \tag{10.4.31}$$

这使我们很容易得到前面的解. 选择 ϕ 为常数, 则 $f=1$, μ 为常数, 且

$$\mathcal{H}=-\frac{1}{l^2}+\frac{\mu}{r^4}\,. \tag{10.4.32}$$

此即 AdS-Schwarzschild 解.

当 $q=0$ 时, 运动方程简化为

$$\frac{k_5^2}{3}r\phi'=-\frac{\mathrm{d}\ln\mu}{\mathrm{d}\phi}\,, \tag{10.4.33}$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathcal{H}}{\mu^2}\right)=\frac{1}{\mu}\mathrm{d}(r^{-4})\,, \tag{10.4.34}$$

$$\frac{k_5^2}{6}V=-\frac{3}{4k_5^2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{\mathcal{H}}{\mu}\right)+\mathcal{H}\,. \tag{10.4.35}$$

从这一形式很容易看出, 五维时空动力学方程完全是可积的. 首先, 所有的解都依赖于一个任意的函数 $\mu(\phi)$, 注意到

$$f=\frac{\mu_0}{\mu}\,, \tag{10.4.36}$$

式中 μ_0 是任意常数. 对方程 (10.4.33) 积分, 可以得到径向坐标 r

$$r=r_0\mathrm{e}^{-\frac{k_5^2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\ln\mu}\mathrm{d}\phi}\,. \tag{10.4.37}$$

最后, 度规中剩下的未知函数具有如下形式:

$$h = -\frac{4k_5^2}{3}r^2\mu^2\int \mathrm{d}\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{e}^{4\frac{k_5^2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\ln\mu}\mathrm{d}\phi} . \tag{10.4.38}$$

势 V 满足式 (10.4.35), 这说明了为什么 Birkhoff 定理在出现五维时空标量场时是无效的. 另外, 很吸引人的一点是暗能量项的推广完整地诠释了五维时空的动力学.

将弗里德曼方程写为如下形式:

$$H^2 = \mathcal{H} + \frac{k_5^4}{36}\mu^2\rho^2, \tag{10.4.39}$$

式中 H 是膜上用宇宙时表示的哈勃参数. 通过研究临界点 $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\phi}$ 附近的动力学可以得到标准宇宙学. 参数化

$$\mu = \frac{6A}{k_5^2} + B\phi^2 \tag{10.4.40}$$

可以得到弗里德曼方程

$$H^2 = \frac{k_5^4}{36}(\rho^2 - \theta)\mu^2 + \frac{\mu}{a^4} + 0(a^{-4}) . \tag{10.4.41}$$

θ 是任意的积分常数. 注意到当距离很大时, 和 Randall-Sundrum 情形的微小差异

$$\phi = r^{-B/A} \tag{10.4.42}$$

趋于 0. 因此, 在低能量和距离很大时重新回到标准宇宙学.

10.5 双膜系统的宇宙学

前面我们假设在五维时空中只有一个膜. 根据弦理论, 至少还存在另一个膜. 实际上, M 理论认为这些膜是五维时空的边界. 即使从纯唯象角度来看, 也有理由认为存在第二个膜: 存在时空奇点 (或 AdS 视界). 在 10.3 节中, 我们已经看到, 引入五维时空标量场意味着在远离正张力膜处会出现裸奇点. 现在第二个膜应该掩盖这个奇点, 因此, 物理时空在两个膜之间展开. 等级问题也促使人们想到第二个膜的存在. Randall 和 Sundrum 提出五维时空内存在两个膜 (一个张力为正, 另一个张力为负), 它们嵌于五维 AdS. 在这种模型中, 标准模型中的粒子被限制在负张力膜上, 五维时空的弯曲会导致引力很弱. 然而, 为了与引力实验相符, 两膜之间的距离必须是固定的. 这能够做到, 五维时空含标量场时就是这种情形. 如一些文献中所提到的, 双膜模型和 R-S 模型中的引力都由标量 - 张量理论描述. 五维时空标量场将修正标量场的 Brans-Dicke 参量, 并使得五维时空包含低能有效作用量中的第二个标量场, 因此当五维时空存在双膜并含有标量场时, 在低能条件下得到的是双标量 - 张量理论.

10.5.1 低能有效作用量

我们利用模空间近似获得低能有效作用量. 由 10.3 节和 10.4 节的讨论可知, 对于给定的势, 很难得到五维时空的爱因斯坦场方程的一般解. 模空间近似可以给出双膜系统在低能极限下 (能量远小于膜张力) 的有效作用量. 在 10.3 节讨论的静态 BPS 解中, 膜的位置可以任意选择, 换句话说, 它们形成一个模场. 我们期望在膜上放置物质后能使模场与时间有关, 或者说, 如果物质不是均匀分布, 模场便与时空有关. 因此, 第一个近似是用含时空的函数代替膜位置. 另外, 为了允许引力的模为 0, 我们用 $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ 代替平直时空度规 $\eta_{\mu\nu}$. 假设场的演化很慢, 也就是在构造低能有效作用量时我们忽略类似 $(\partial\phi)^3$ 的项.

只有当能量远小于膜张力时, 模空间近似才是很好的近似. 因此, 我们忽略模空间近似中的二次项. 在式 (10.3.6) 中用 $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ 代替 $\eta_{\mu\nu}$, 把所有项相加并对 y 积分, 由五维作用量得到

$$S_{\text{MSA}} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g_4}\left[f(\phi,\sigma)\mathcal{R}^4 + \frac{3}{4}a^2(\phi)\frac{U_B(\phi)}{k_5^2}(\partial\phi)^2 - \frac{3}{4}a^2(\sigma)\frac{U_B(\sigma)}{k_5^2}(\partial\sigma)^2\right], \tag{10.5.1}$$

式中

$$f(\phi,\sigma) = \frac{1}{k_5^2}\int_\phi^\sigma \mathrm{d}y a^2(y), \tag{10.5.2}$$

$a(y)$ 由式 (10.3.10) 给出, 模 ϕ 和 σ 分别表示两个膜的位置. 注意到场 ϕ 的动能项的符号是错误的, 这是我们选用的标架造成的. 下面将通过一个简单的共形变换变换到爱因斯坦标架, 使得两个场动能的符号都得到改正.

下面我们集中讨论具有指数超势的 BPS 系统, 并按照以下的方式重新定义场:

$$\widetilde{\phi}^2 = (1-4k\alpha^2\phi)^{2\beta}, \qquad \widetilde{\sigma}^2 = (1-4k\alpha^2\sigma)^{2\beta}, \tag{10.5.3}$$

取 $\beta = \dfrac{2\alpha^2+1}{4\alpha^2}$, 有

$$\widetilde{\phi} = Q\cosh R, \quad \widetilde{\sigma} = Q\sinh R. \tag{10.5.4}$$

由共形变换 $\widetilde{g}_{\mu\nu} = Q^2 g_{\mu\nu}$ 得到爱因斯坦标架中的作用量为

$$S_{\text{EF}} = \frac{1}{2kk_5^2(2\alpha^2+1)}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\mathcal{R} - \frac{12\alpha^2}{1+2\alpha^2}\frac{(\partial Q^2)}{Q^2} - \frac{6}{2\alpha^2+1}(\partial R)^2\right], \tag{10.5.5}$$

在这个标架中两个场的动能符号就都是对的了. 当 $\alpha \to 0$(即 Randall-Sundrum 情形) 时, Q 场将退耦, 这表明五维时空标量场退耦了, 唯一的标量自由度就是膜间

距. 引力常数为

$$16\pi G = 2kk_5^2(2\alpha^2+1)\ . \tag{10.5.6}$$

很容易发现作用量的物质部分: 如果物质位于膜上, 它会“感觉到”诱导度规, 这时作用量为

$$S_m^{(1)} = S_m^{(1)}(\Psi_1, g_{\mu\nu}^{B(1)}),\quad S_m^{(2)} = S_m^{(2)}(\Psi_2, g_{\mu\nu}^{B(2)})\ , \tag{10.5.7}$$

式中 $g_{\mu\nu}^{B(i)}$ 表示每个膜上的诱导度规. 在变换到爱因斯坦标架的过程中我们用到了

$$S_m^{(1)} = S_m^{(1)}(\Psi_1, A^2(Q,R)g_{\mu\nu}),\quad S_m^{(2)} = S_m^{(2)}(\Psi_2, B^2(Q,R)g_{\mu\nu})\ , \tag{10.5.8}$$

其中物质通过函数 A 和 B 与场精确耦合, 下面将给出函数 A 和 B(忽略微商相互作用).

利用模空间近似得到的理论具有多标量 - 张量理论的形式, 两个膜与模场之间有不同的耦合. 采用模空间近似的两种方法已用于获得低能有效作用量和两膜系统的场方程, 得到的理论的定量性质与膜空间近似理论一致.

10.5.2 观测约束

为了得到理论的约束条件, 我们将模的拉氏量中的动能项写成非线性求和形式

$$\gamma_{ij}\partial\phi^i\partial\phi^j\ , \tag{10.5.9}$$

式中 $i=1,2$ 表示模 $\phi^1=Q$ 和 $\phi^2=R$. 其中耦合项为

$$\gamma_{QQ} = \frac{12\alpha^2}{1+2\alpha^2}\frac{1}{Q^2}\ ,\qquad \gamma_{RR} = \frac{6}{1+2\alpha^2}\ . \tag{10.5.10}$$

注意到在 R-S 模型中, 当 $\alpha\to 0$ 时, 势与 Q 的耦合变得很小. 在只有单个场的一般 Brans-Dicke 理论中, 这对应 Brans-Dicke 参数的消失, 但实验排除了这种可能性. 我们将看到与物质的耦合不会出现这种情况. 实际上代表与一般物质耦合的作用量可以写成

$$A = a(\phi)f^{-1/2}(\phi,\sigma)\ ,\quad B = a(\sigma)f^{-1/2}(\phi,\sigma)\ , \tag{10.5.11}$$

其中我们忽略了微商相互作用.

引入参数

$$\alpha_Q = \partial_Q \ln A,\quad \alpha_R = \partial_R \ln A\ . \tag{10.5.12}$$

我们发现

$$A = Q^{-\frac{\alpha^2\lambda}{2}}(\cosh R)^{\frac{\lambda}{4}}\,, \quad \lambda = 4/(1+2\alpha^2)\,, \tag{10.5.13}$$

由此得到

$$\alpha_Q = -\frac{\alpha^2\lambda}{2}\frac{1}{Q}\,, \quad \alpha_R = \frac{\lambda\tanh R}{4}\,. \tag{10.5.14}$$

观测约束使得参数

$$\theta = \gamma^{ij}\alpha_i\alpha_j \tag{10.5.15}$$

小于 10^{-3}. 于是我们得到一个边界

$$\theta = \frac{4}{3}\frac{\alpha^2}{1+2\alpha^2} + \frac{\tanh^2 R}{6(1+2\alpha^2)}\,, \tag{10.5.16}$$

满足条件

$$\alpha \leqslant 10^{-2}\,, \quad R \leqslant 0.2\,. \tag{10.5.17}$$

α 很小意味着五维时空几何被严重弯曲, 如 AdS 时空. 当 $\alpha = 0$ 时, 很容易解释 R 的边界

$$\tanh R = \mathrm{e}^{-k(\sigma-\phi)}\,, \tag{10.5.18}$$

即只有 radion 场的指数可以量度膜间距. 引力实验要求膜之间相距足够远. 当 $\alpha \neq 0$ 但很小时, 为了得到很小的 R 值, 我们可以让隐藏的膜接近即将形成的奇点 $[a(\sigma) = 0]$.

采用同样的方法, 也可以对位于负张力膜上的物质求出参数 θ 的值, 但对 θ 的观测约束无法满足. 因此, 如果标准模型中的粒子限制在负张力膜上, 模必须是稳定的. 接下来我们假设标准模型中的粒子被限制在正张力膜上并研究模场的宇宙学演化.

10.5.3 宇宙学含义

10.4 节最后的小结给出了一个重要结论: 为了使理论与观察结果相符, 参数 α 必须取很小的值. 类似地, 场 R 也必须很小, 以致能和今天的观测结果一致. 但对于场 R, 存在自然的初始条件吗? 下面通过研究系统的宇宙学演化来回答这些问题.

均匀各向同性宇宙的场方程可以由作用量得到. 弗里德曼方程可以写为

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_1 + \rho_2 + V_{\mathrm{eff}} + W_{\mathrm{eff}}) + \frac{2\alpha^2}{1+2\alpha^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{1+2\alpha^2}\dot{R}^2\,, \tag{10.5.19}$$

其中我们定义了 $Q = \exp\phi$. 关于 R 和 ϕ 的场方程可写为

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} = -8\pi G\frac{1+2\alpha^2}{6}\left[\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial R} + \frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial R} + \alpha_R^{(1)}(\rho_1 - 3p_1) + \alpha_R^{(2)}(\rho_2 - 3p_2)\right], \tag{10.5.20}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -8\pi G\frac{1+2\alpha^2}{12}\left[\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi} + \frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial \phi} + \alpha_\phi^{(1)}(\rho_1 - 3p_1) + \alpha_\phi^{(2)}(\rho_2 - 3p_2)\right]. \tag{10.5.21}$$

耦合参数由下式给出:

$$\alpha_\phi^{(1)} = -\frac{2\alpha^2}{1+2\alpha^2}, \qquad \alpha_\phi^{(2)} = -\frac{2\alpha^2}{1+2\alpha^2}, \tag{10.5.22}$$

$$\alpha_R^{(1)} = \frac{\tanh R}{1+2\alpha^2}, \qquad \alpha_R^{(2)} = \frac{(\tanh R)^{-1}}{1+2\alpha^2}. \tag{10.5.23}$$

我们在两个膜上都引入了物质, 势 V_{eff} 和 W_{eff}. 现在我们只讨论膜上有物质的情况. 在辐射为主时期, 能动张量的迹为 0, 所以 Q 和 ϕ 为常数, 标度因子为 $a(t) \propto t^{1/2}$.

在物质为主时期, 当 $t \gg t_e$ 时得到方程的解为

$$\rho_1 = \rho_e\left(\frac{a}{a_e}\right)^{-3-2\alpha^2/3}, \quad a = a_e\left(\frac{t}{t_e}\right)^{2/3-4\alpha^2/27}, \tag{10.5.24}$$

以及

$$\phi = \phi_e + \frac{1}{3}\ln\frac{a}{a_e}, \qquad R = R_0\left(\frac{t}{t_e}\right)^{-1/3} + R_1\left(\frac{t}{t_e}\right)^{-2/3}, \tag{10.5.25}$$

式中 $t \gg t_e$. 注意到 R 是衰减的, 这意味随着宇宙演化会得到较小的 R, 这与引力实验相符. 然而, 早期宇宙中 R 的大小会受到核合成和宇宙微波背景辐射各向异性的约束. 核合成时期和现在的 R 值之间存在很大的差异, 这导致粒子有各种不同的质量, 或者说会得到多个牛顿常数, 这与实验不符. 如果我们还同时将物质放在负张力膜上, 场 R 将更快地演化至 0, 这种行为很像标量 - 张量理论中的吸引子解 (Damour and Nordtvedt,1993).

在五维图像中, R 变得很小意味着负张力膜被推向奇点. 实际上, 对于更一般的情况, 方程的数值解显示 R 甚至可以是负的. 但在五维描述下, 这是没有物理意义的, 因为它意味着负张力膜将穿过奇点. 因此, 随着理论的发展, 还需要更深入地理解五维时空的奇点. 当然, 我们可以简单地假设负张力膜撞到奇点时被破坏了. 更有趣的一种可能是膜受到了奇点的抵抗. 人们推测有可能通过低能条件下有效作用量中的一些有效势来描述这个问题.

10.6 膜 碰 撞

我们看到, 膜宇宙模型的缺陷在于存在奇点问题: 负张力膜会撞到奇点. 因此, 描述膜上的物理除了要用到场论还必须有一些技巧. 只有当人们建立一个统一理论 (统一广义相对论和量子力学) 时, 才能解决这样的问题, 弦理论可能是这样一种理论, 宇宙奇点解的本质仍是弦理论中的一个重要问题. 当两个膜碰撞时会出现第二个奇点, 当额外维中的某一维收缩直到消失时, 低能有效作用量中仍存在一个奇点. 人们认为膜碰撞在研究宇宙学尤其在研究大爆炸时有重要作用 (Khoury,2002).

在 M 理论中, 膜间距变小对应弦耦合常数减小, 因此我们可以采用微扰方法. 现在我们分析这种碰撞及其可能产生的结果. 在碰撞过程中存在一种自然而直观的现象, 即宇宙反弹.

我们将用一个标量场和引力描述一个 d 维理论, 其中引力场方程的解包含的奇点在 $t=0$ 处. 人们发现这种模型是 $d+1$ 维模型的低能近似, $d+1$ 维的额外维是两个边界膜的间距, 而奇点对应膜碰撞. 在 $d+1$ 维图像中, 两个膜可以越过对方; 因此碰撞后膜的运动是连续的.

对于一般的空间迹形, 人们可能试图在这种背景中定义弦理论并用这种弦理论来解决奇点问题. 但在广义相对论中, 这些迹形是不稳定的, 因此排除了用一般迹形作为弦理论背景的可能性. 下面我们介绍相关的结论.

我们用模空间近似方法探讨了含有五维时空标量场的模型, 现在考虑低能条件下包含单个标量场的模空间. 标量场 ϕ 与引力耦合, 作用量为

$$S=\int \mathrm{d}^d x\sqrt{-g}\left[R-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2\right] . \tag{10.6.1}$$

具有形式为

$$\mathrm{d}s^2=a^2(t)[-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x_i] \tag{10.6.2}$$

的宇宙解很容易得到,

$$a=a(1)\mid t\mid^{\frac{1}{d-2}} ,\qquad \phi=\phi(1)+\epsilon\sqrt{\frac{2(d-1)}{d-2}}\ln\mid t\mid , \tag{10.6.3}$$

式中 $\epsilon=\pm1$. 此解在奇点 $t=0$ 处有两个分支, 分别对应于 $t<0$ 和 $t>0$. 是什么导致了这个模型具有额外维呢? 通过定义

$$\psi=\mathrm{e}^{\gamma\phi} \tag{10.6.4}$$

和

$$\overline{g}^{\mu\nu}=\psi^{-4/(d-2)}g_{\mu\nu} \tag{10.6.5}$$

可以将前面的系统升到 $d+1$ 维. 其中 $\gamma=\sqrt{(d-2)/8(d-1)}$. 考虑到 $d+1$ 维纯引力理论中度规为

$$\mathrm{d}s_{d+1}^2=\psi^4\mathrm{d}w^2+\overline{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu\ , \tag{10.6.6}$$

式中 $\omega\in[0,1]$, $\omega=0$ 和 $\omega=1$ 代表两个边界膜. 如果限制两个场 $\psi(x^\mu)$ 和 $g_{\mu\nu}(x^\mu)$ 仅依赖于 d 维, 在区间 $w\in[0,1]$ 内, 维数减少, 即积分遍及整个额外维, 从而得到有效作用量 (10.6.1).

现在我们通过解 (10.6.3) 来讨论 $d+1$ 维时空的特征. 对给定的依赖于积分常数 $\phi(1)$ 和 $a(1)$ 的 B, $d+1$ 维时空的度规变为

$$\mathrm{d}s_{d+1}^2=B^2t^2\mathrm{d}w^2+\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu\ . \tag{10.6.7}$$

可以看出, 时空几何非常简单, 它是 $R^{(d-1)}$ 和 M 的直积 $R^{(d-1)}\times M$, 其中 M 是二维 Milne 时空, 其度规为

$$\mathrm{d}s_M^2=-\mathrm{d}t^2+B^4t^2\mathrm{d}w^2\ . \tag{10.6.8}$$

利用光锥坐标

$$x^\pm=\pm t\mathrm{e}^{\pm B^2w}\ , \tag{10.6.9}$$

Milne 时空度规变为

$$\mathrm{d}s_M^2=\mathrm{d}x_+\mathrm{d}x_-\ , \tag{10.6.10}$$

这与二维闵可夫斯基时空度规一致. 这里区别额外维区间的方法发生了变化, 因为 Milne 空间通过变换

$$x^\pm\rightarrow\mathrm{e}^{\pm 2B^2}x^\pm \tag{10.6.11}$$

给出, 正如在 Randall-Sundrum 模型中, 我们用 S^1/Z_2 区别额外维间隔.

两边界膜在 $x^\pm=0$ 处碰撞, 其轨迹由下式给出:

$$x_0^\pm=\pm t\ ,\qquad x_1^\pm=\pm t\mathrm{e}^{\pm B^2}\ . \tag{10.6.12}$$

我们可能期望在奇点处两个膜越过对方并继续演化, 但 Horowitz 和 Polchinski 已证明迹形时空的结构是不稳定的. 考虑这个几何中的一个粒子, 他们指出, 时空会坍缩到一个类空奇点. 实际上我们只关注迹形作用量下的一个粒子和它的第 n 个图像. 就碰撞而言, 随着 n 增大 b 变为常数而中心质量的能量 $\sqrt{s}$ 以 $\cosh nB^2$ 的方式增长. 当 n 足够的大时

$$G\sqrt{s}>b^{d-2}\ . \tag{10.6.13}$$

两个粒子在其 Schwarzschild 半径内进入对方, 从而通过引力塌缩形成一个黑洞. 因此迹形时空在广义相对论中没意义, 即没有为弦理论定义一个与时间无关的背景.

10.7 膜宇宙模型中的短程线

在 RS 模型提出之后, 膜宇宙模型引起了人们的极大兴趣. 其中一个较为重要的问题就是研究膜宇宙模型中的短程线问题. Mück(2000) 给出了 RS 模型中自由类时粒子的运动. 发现在该模型中, 如果不引入引力之外的额外的机制, 则物质将不可避免地有沿额外维度的运动, 即物质将不再被禁闭在膜上. 之后, Youm(2001) 又考虑了在五维时空中传播的类光粒子, 发现对于膜上的观测者, 该类光粒子将变成类时粒子, 并且有额外的力作用其上. Youm 考虑的五维时空具有稳定的额外维度. 本节讨论 Mück 的工作, 10.8 节讨论 Youm 的工作, 然后讨论额外维度非稳定的情况.

我们由五维时空度规出发, 可以得到短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\theta^2}-2k\ \mathrm{sgn}\ y\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=0\ , \tag{10.7.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+k\ \mathrm{sgn}\ y\mathrm{e}^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\theta}=0\ , \tag{10.7.2}$$

式中 θ 为仿射参量.

Mück 等求解了上述方程, 得到粒子的运动轨迹 $(y_0=\dot{y}_0=0)$

$$x^\mu=x_0^\mu+v^\mu t\ , \tag{10.7.3}$$

$$y=\frac{1}{2k}\ln(1-v^2k^2t^2)\ , \tag{10.7.4}$$

"$\cdot$" 表示对时间的导数. 其中 v^μ 是一个四维矢量. t 为膜上的时间, t 和 θ 具有如下的关系:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=\mathrm{e}^{2k|y|}\ . \tag{10.7.5}$$

由此可知, 对膜上的有质量粒子 $(v^2<0)$, 它不可避免地要沿额外维度运动. 因此, 在 RS II 模型下, 为了使物质被禁闭在膜上的假设成立, 就不得不引入除引力外的新机制, 即非引力机制.

10.8 膜宇宙模型中的零短程线

在膜宇宙模型中, 一般总是假定物质是被禁闭在膜上的, 而只有引力子可以在整个五维时空中传播. Youm(2000) 假定五维度规具有稳定的额外维度.

由五维时空度规可以得到短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\lambda^2}+\frac{\dot{n}}{n}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\frac{2n'}{n}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{a\dot{a}}{n^2}\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2=0\,, \tag{10.8.1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2}+\frac{2\dot{a}}{a}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{2a'}{a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}=0, \tag{10.8.1b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\lambda^2}+nn'\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2-aa'\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2=0\,, \tag{10.8.1c}$$

式中 “·” 代表对 t 求导数, 而 $'$ 则代表对 y 求导数. λ 是五维时空短程线的仿射参量, 定义为

$$-\varepsilon_5=G_{MN}\frac{\mathrm{d}x^M}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^N}{\mathrm{d}\lambda}=-n^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+a^2\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2\,, \tag{10.8.2}$$

式中 $\varepsilon_5=0,1$ 分别代表类光粒子和类时粒子. 此处仅考虑类光的情况 (因为只有引力子可以在五维时空中传播). 为了考察低维观测者 (即在膜上的观测者) 所观察到的状况, Youm 将上述五维时空中的短程线方程 (10.8.1) 重新用超曲面 $y=\mathrm{const}$ 上四维时空的量表示出来. $y=$const 上超曲面上的度规为

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu=-n^2\mathrm{d}t^2+a^2\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\,. \tag{10.8.3}$$

定义超曲面上的仿射参量 $\widetilde{\lambda}$ 满足

$$-\varepsilon_4=g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=-n^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+a^2\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\,, \tag{10.8.4}$$

式中 $\varepsilon_4=-1,0,1$ 分别代表对应于膜上观察到的类空、类光和类时粒子. 假定 λ 是 $\widetilde{\lambda}$ 的函数: $\lambda=\lambda(\widetilde{\lambda})$, 则如果满足条件

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2=1\,, \tag{10.8.5}$$

则由式 (10.8.2) 可得到

$$-n^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+a^2\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=-1\,. \tag{10.8.6}$$

即在五维时空中传播的引力子, 超曲面上的观察者发现是一个类时粒子. 利用以上各式, 可以把五维时空短程线方程 (10.8.1) 改为

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+\frac{\dot{n}}{n}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+\frac{a\dot{a}}{n^2}\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2=\left[nn'\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-aa'\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-2\frac{n'}{n}\right]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\,, \tag{10.8.7a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+\frac{2\dot{a}}{a}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=\left[nn'\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-aa'\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-2\frac{a'}{a}\right]\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\ . \tag{10.8.7b}$$

由此可知, 对超曲面上的观测者来说, 五维时空中自由运动的类光粒子是在额外维非引力作用下的类时粒子. 方程的右端对应于非引力所引起的四维加速矢量 A^μ 的时间和空间分量. 该四维矢量具有平行于四速度的非零分量

$$g_{\mu\nu}A^\mu\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=\left[2-n^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+a^2\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2\right]\left[nn'\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-aa'\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)\right]\ . \tag{10.8.8}$$

这和经典的粒子力学相矛盾. 对于没有意识到额外维度存在的膜上的观测者来说, 他将会将此解释为固有质量随时间的改变. Youm 给出了固有质量随时间的变化关系

$$\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=g_{\mu\nu}A^\mu\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\ . \tag{10.8.9}$$

考虑观测者处于膜上 (即处于 $y=0$) 的情况. 由于度规分量对 y 的一阶导数在 $y=0$ 处是不连续的, 因此方程 (10.8.7) 在该处没有很好的定义, 取其平均值. 考虑到膜的两侧具有 Z_2 对称性, 方程 (10.8.7) 的形式可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+a_0\dot{a}_0\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2=0\ , \tag{10.8.10a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+\frac{2\dot{a}_0}{a_0}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=0\ , \tag{10.8.10b}$$

其中定义坐标时 t 满足 $n(t,y=0)=1$, 方程中下标 0 代表膜上的量. 由上述方程可知, 对于膜上 (即超曲面 $y=0$ 处) 的观测者来说, 五维时空中自由传播的类光粒子的时迹完全变成了膜上是类时短程线, 即自由类时粒子的时迹, 而不再存在额外的非引力力. 但当考虑膜的两侧不具有 Z_2 对称性时, 低维的观测者依然会观测到额外的非引力力. 据此可以判断现实的膜世界是否具有 Z_2 对称性.

10.9 额外维非稳定的情况

我们考虑具有如下度规形式的膜宇宙模型:

$$G_{MN}\mathrm{d}x^M\mathrm{d}x^N=-n^2(t,y)+a^2(t,y)\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j+b^2(t,y)\mathrm{d}y^2\ , \tag{10.9.1}$$

式中, n, a 和 b 都是任意的光滑函数. 假设宇宙是平直的 (即 $k=1$). 五维时空度规分量为

$$G_n=-n^2,\quad G_{ij}=a^2\delta_{ij},\quad G_{yy}=b^2\,. \tag{10.9.2}$$

对应的仿射联络定义为

$$\Gamma^R_{\ MN}=\frac{G^{RQ}}{2}\left(\frac{\partial G_{MQ}}{\partial x^N}+\frac{\partial G_{NQ}}{\partial x^M}-\frac{\partial G_{MN}}{\partial x^Q}\right)\,. \tag{10.9.3}$$

将度规分量代入式 (10.9.3), 得到不为零的仿射联络:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^t_{\ tt}=\frac{\dot n}{n}\,, &&\Gamma^t_{\ ij}=n^{-2}a\dot a\delta_{ij}\,,\\
&\Gamma^t_{\ yy}=n^{-2}b\dot b\,, &&\Gamma^t_{\ ty}=\frac{n'}{n}\,,\\
&\Gamma^y_{\ yy}=b^{-1}b'\,, &&\Gamma^y_{\ ij}=-b^{-2}aa'\delta_{ij}\,,\\
&\Gamma^y_{\ ty}=b^{-1}\dot b\,, &&\Gamma^y_{\ tt}=b^{-2}nn'\,,\\
&\Gamma^i_{\ tj}=\frac{\dot a}{a}\delta^i_{\ j}\,, &&\Gamma^i_{\ yj}=\frac{a'}{a}\delta^i_{\ j}\,.
\end{aligned} \tag{10.9.4}$$

五维时空中试验粒子的短程线方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^R}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^R_{\ MN}\frac{\mathrm{d}x^M}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^N}{\mathrm{d}\lambda}=0\,. \tag{10.9.5}$$

将式 (10.9.4) 代入式 (10.9.5), 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\lambda^2}+\frac{\dot n}{n}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+2\frac{n'}{n}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{a\dot a}{n^2}\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+n^{-2}b\dot b\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2=0\,, \tag{10.9.6a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2}+\frac{2\dot a}{a}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{2a'}{a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}=0\,, \tag{10.9.6b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\lambda^2}+b^{-1}b'\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2-b^{-2}aa'\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}+b^{-2}nn'\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+2b^{-1}\dot b\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}=0\,, \tag{10.9.6c}$$

λ 为仿射参量, 定义如下:

$$-\varepsilon_5=G_{MN}\frac{\mathrm{d}x^M}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^N}{\mathrm{d}\lambda}=-n^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+a^2\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}+b^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2\,, \tag{10.9.7}$$

式中 $\varepsilon_5=0,1$ 分别对应于类光粒子和类时粒子的情况. 由于我们假定只有引力子可以在五维时空中传播, 所以也仅需要考虑 $\varepsilon_5=0$ 的情形, 即只考察五维时空中的类光粒子.

五维时空中的短程线方程用 $y=\text{const}$ 的超曲面上的四维时空的量来重新表述，从而得到低维观测者 (即膜上观测者) 所观测到的在五维时空中传播的引力子的情况.

超曲面 $y=\text{const}$ 上的度规为

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu=-n^2\mathrm{d}t^2+a^2\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\ . \tag{10.9.8}$$

超曲面上的仿射参量 $\widetilde{\lambda}$ 定义为

$$-\varepsilon_4=g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=-n^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+a^2\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\ , \tag{10.9.9}$$

式中 $\varepsilon_4=-1,0,1$ 分别代表超曲面上的类空、类光和类时粒子. 我们假定超曲面上的仿射参量是五维时空中仿射参量 λ 的光滑函数

$$\widetilde{\lambda}=\widetilde{\lambda}(\lambda)\ , \tag{10.9.10}$$

则由式 (10.9.7) 可以得到

$$-n^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)+a^2\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=-\left[\varepsilon_5\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+b^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2\right]\ . \tag{10.9.11}$$

对于五维时空中的引力子 ($\varepsilon_5=0$), 若假定

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2=b^{-2}\ , \tag{10.9.12}$$

则式 (10.9.11) 右端等于 -1, 即五维时空中自由传播的引力子, 超曲面上的观测者认为是一个类时粒子. 由式 (10.9.6) 和 (10.9.12) 可以得到超曲面上的仿射参量 $\widetilde{\lambda}$ 与五维时空中仿射参量 λ 之间的关系:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\left(\frac{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}{\mathrm{d}\lambda}\right)=b^{-1}\left[-nn'\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+aa'\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-2b\dot{b}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right]\ . \tag{10.9.13}$$

利用上述关系, 把五维时空中的零短程线方程 (10.9.6) 的 t 和 x^i 分量分别用超曲面上的仿射参量 $\widetilde{\lambda}$ 表示出来

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+\frac{\dot{n}}{n}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+\frac{a\dot{a}}{n^2}\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2\\&=b^{-1}\left[nn'\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-aa'\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-2\frac{n'}{n}+2\dot{b}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}-n^{-2}b^{-1}\dot{b}\ ,\end{aligned} \tag{10.9.14a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+\frac{2\dot{a}}{a}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=b^{-1}\left[nn'\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-aa'\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+2\dot{b}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}-2\frac{a'}{a}\right]\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\ . \tag{10.9.14b}$$

方程的左端具有形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+\Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}} ,$$

其中 $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ 是超曲面 $y=$const 上的度规所对应的仿射联络. 方程的右端对应的是由非引力所引起的四维加速度矢量 A^μ 的时间和空间分量. 即对超曲面上的观测者来说, 在五维时空中自由运动的引力子 (类光粒子) 将被认为是在额外的非引力作用下运动的类时粒子. 四维加速度矢量 A^μ 具有平行于四维速度的非零分量

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}A^\mu\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=&b^{-1}\left[2-n^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+a^2\sum_i\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2\right]\\&\cdot\left[nn'\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-aa'\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2\right]\\&+2b^{-1}\dot{b}\left[-n^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+a^2\sum_k\left(\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}} .\end{aligned}\tag{10.9.15}$$

我们也将此情况解释为固有质量随时间而改变.

下面我们来考虑处于膜 (即处于 $y=0$ 处的超曲面) 上的观测者所观测到的情况. 由于度规分量对 y 的一阶导数在 $y=0$ 处是不连续的, 所以方程 (10.9.14) 在 $y=0$ 处是没有好的定义的. 一般的, 我们将对膜两侧求平均来代替之. 对于 $y=0$ 处的膜, 我们有跃迁条件

$$[a']_0=-\frac{k^2_{(5)}}{3}a_0b_0(\sigma+\rho) ,\tag{10.9.16a}$$

$$[n']_0=-\frac{k^2_{(5)}}{3}b_0(\sigma-3p-2\rho) ,\tag{10.9.16b}$$

式中 σ 是膜上的张力, 而 ρ 和 p 分别代表膜上的物质密度和压强. 而 $[F]_0\equiv F(0^+)-F(0^-)$ 则代表 $F(y)$ 在膜 $y=0$ 两侧的跃变. 再定义函数 $F(y)$ 在膜上的平均值如下: $\bar{F}\equiv[F(0^+)+F(0^-)]/2$. 若假定膜的两侧具有 Z_2 对称性

$$a'(0^+)=-a'(0^-) ,\tag{10.9.17a}$$

$$n'(0^+)=-n'(0^-) .\tag{10.9.17b}$$

则方程 (10.9.14) 变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+a_0\dot{a}_0\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=b^{-1}\dot{b}\left[2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-1\right] ,\tag{10.9.18a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+\frac{2\dot{a}}{a}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=2b^{-1}\dot{b}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}} .\tag{10.9.18b}$$

即对处于膜上的观测者来说, 在假定膜两侧具有 Z_2 对称性的情况下, 依然有额外力的作用. 式 (10.9.18) 的右端对应于由额外维力作用而产生的四维加速度矢量 A^μ 的时间和空间分量. A^μ 依然有沿四维速度的非零分量

$$g_{\mu\nu}A^\mu\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=\left\{-n^2\left[2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-1\right]+2a^2\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2\right\}b^{-1}\dot{b}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\ . \tag{10.9.19}$$

由此可见, 当度规额外维分量不稳定时, 即使假定膜两侧具有 Z_2 对称性, 依然存在额外力的作用.

下面我们考查 $b(y,t)$ 取某些特定的函数时的情况. 依然假定物质被禁闭在膜上, 而只有引力可在整个五维时空中传播. 考虑一张膜处于 $y=0$ 处, 并且假定膜的两侧具有 Z_2 对称性.

当 $b(y,t)=1+\xi\sin t$ 时, 代入式 (10.9.18), 我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+a_0\dot{a}_0\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=(1+\xi\sin t)^{-1}\xi\left[2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-1\right]\cos t\ , \tag{10.9.20a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+\frac{2\widetilde{a}_0}{a_0}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=2(1+\xi\sin t)^{-1}\xi\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\cos t\ . \tag{10.9.20b}$$

当 $b(y,t)$ 取此值时, 膜上的观测者将会发现有额外力的作用. 在 $t=0+k\pi$(k 为整数) 时, 即 $b(y,t)=1$ 处, 依然有额外力的作用. 方程 (10.9.20) 的右端对应于粒子的四维加速度矢量 A^μ, 该矢量具有沿四维速度的非零分量

$$g_{\mu\nu}A^\mu\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=\left\{-n^2\left[2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-1\right]+2a^2\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2\right\}\cdot(1+\xi\sin t)^{-1}\xi\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\ . \tag{10.9.21}$$

当 $b(y,t)=1+\xi\cos t$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+a_0\dot{a}_0\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=-(1+\xi\cos t)^{-1}\xi\left[2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^2-1\right]\sin t\ , \tag{10.9.22a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^2}+\frac{2\dot{a}_0}{a_0}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=-2(1+\xi\cos t)^{-1}\xi\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\sin t\ . \tag{10.9.22b}$$

当 $b(y,t)$ 取此值时, 膜上的观测者也会观测到有额外的力的作用. 在 $t=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时 $[b(y,t)=1]$, 额外力也不为零. 方程 (10.9.22) 右端对应的四维加速度矢量沿四维速度分量也不为零

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=-\left\{-n^{2}\left[2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^{2}-1\right]+2a^{2}\sum_{j}\left(\frac{\mathrm{d}x^{j}}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^{2}\right\}\cdot(1+\xi\cos t)^{-1}\xi\sin t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\ . \tag{10.9.23}$$

当 $b(y,t)=1+\xi(1-\cos t)$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}^{2}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^{2}}+a_{0}\dot{a}_{0}\frac{\mathrm{d}x^{i}}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^{j}}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=[1+\xi(1-\cos t)]^{-1}\xi\left[2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^{2}-1\right]\sin t\ , \tag{10.9.24a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}^{2}}+\frac{2\dot{a}_{0}}{a_{0}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^{i}}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=2[1+\xi(1-\cos t)]^{-1}\xi\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\frac{\mathrm{d}x^{i}}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\sin t\ . \tag{10.9.24b}$$

当 $b(y,t)$ 取此值时, 膜上的观测者一般也会观测到额外力的作用, 但当 $t=2k\pi$[此时 $b(y,t)=1$] 时, 额外力消失. 方程 (10.9.24) 的左端对应的是四维加速度矢量 A^{μ}, 该矢量满足

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}=\left\{-n^{2}\left[2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^{2}-1\right]+2a^{2}\sum_{j}\left(\frac{\mathrm{d}x^{j}}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\right)^{2}\right\}\cdot[1+\xi(1-\cos t)]^{-1}\xi\sin t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\widetilde{\lambda}}\ . \tag{10.9.25}$$

当 $t=2k\pi$ 时, 四维加速度矢量 A^{μ} 沿四维速度方向的分量为零.



参 考 文 献

何香涛. 2002. 观测宇宙学. 北京：科学出版社.

李宗伟, 肖兴华. 2000. 天体物理学. 北京：高等教育出版社.

梁灿彬, 周彬. 2006. 微分几何入门与广义相对论. 第 2 版. 北京：科学出版社.

林忠四郎, 早川幸男. 1981. 宇宙物理学. 师华译. 北京：科学出版社.

刘辽, 赵峥. 2004. 广义相对论. 第 2 版. 北京：高等教育出版社.

王永久. 2000. 广义相对论和宇宙学. 长沙：湖南科学技术出版社.

王永久. 2008. 经典黑洞和量子黑洞. 北京：科学出版社.

王永久, 唐智明. 1990. 引力理论和引力效应. 长沙：湖南科学技术出版社.

温伯格 S. 1980. 引力论和宇宙论. 邹振隆, 张历宁等译. 北京: 科学出版社.

俞允强. 2003. 热大爆炸宇宙学. 北京：北京大学出版社; 俞允强. 1997. 广义相对论引论. 第二版. 北京：北京大学出版社.

赵峥. 1999. 黑洞的热性质与时空奇异性. 北京：北京师范大学出版社.

邹振隆, 张历宁, 等译. 1980. 引力论和宇宙论：广义相对论的原理和应用. 北京：科学出版社.

Albrecht A, Steinhardt P J. 1982. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry. Phys Rev Lett, 48:1220.

Alexander S, Malecki J, Smolin L. 2004. Quantum gravity and inflation. Phys Rev D, 70: 044025.

Andersson N. 1997. Evolving test fields in a black-hole geometry. Phys Rev D, 55:468.

Andersson N, Howls C J. 2004. The asymptotic quasinormal mode spectrum of non-rotating black holes. Class Quantum Grav, 21:1623.

Anninos P, Hbbill D, Sdidel E, et al. 1993. Collision of two black holes. Phys Rev Lett, 71:2851.

Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G. 1998. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. Phys Lett B, 429: 263.

Ashtekar A, Bojowald M. 2006. Quantum geometry and the Schwarzchild singularity. Class. Quantum Grav, 23:391.

Ashtekar A, Bojowald M, Lewandowski J. 2003. Mathematical structure of loop quantum cosmology. Adv Theo Math Phys, 7: 233-268.

Ashtekar A, Bojowald M, Willis J. 2004. Corrections to Friedmann equations induced by quantum geometry. IGPG preprint.

Ashtekar A, Bombeli L, Corichi A. 2005. Semiclassical states for constrained systems. Phys Rev D, 72: 025008.

Ashtekar A, Lewandowski J. 2001. Relation between polymer and fock excitations. Class. Quantum Grav, 18: L117.

Ashtekar A, Lewandowski J. 2004. Background independent quantum gravity: A status report. Class. Quantum Grav, 21: R53R152.

Ashtekar A, Pawlowski T, Singh P. 2006. Quantum nature of the big bang. Phys Rev Lett, 96: 141301.

Barack L. 1999. Late time dynamics of scalar perturbations outside black holes I a shell toy model. Phys. Rev D, 59:044016.

Barbon J L, Emparan R. 1995. Quantum black hole entropy and Newton constant renormalization. Phys Rev D, 52:4527.

Barrero T, Decarlos B, Copeland E J. 1998. Stabilizing the dilaton in superstring cosmology. Phys Rev D, 58: 083513.

Basseler S, et al. Improved test of the equivolence principle for gravitational self-energy. Phys Rev Lett, 83: 3583.

Bateman H, Erdelyi A. 1954. Tables of integral transformations. New York:Mc Graw-Hill Book Company.

Baym G, Pethick C, et al. Ann Rev Astron Astrophys, 17: 415.

Beams J M, et al. Determination of the gravitational constant G. Phys Rev Lett, 23: 655.

Bekenstein J D. 1973. Do we understand black hole entropy? 7th Marcel Grossman meeting on general relativity at Stanford University. Phys Rev D, 7: 2333.

Bennett D. 1986. Evolution of cosmic strings. Phys Rev D, 33: 872.

Bento M C, Bertolami O, Sen A A. 2003. Generalized chaplygin gas and CMBR constraints. Phys Rev D, 67: 063003.

Bergmamm P G. 1976. Introduction to the theory of relativity. New York: Dover Publications INC.

Berti E, Cardoso V, Yoshida S. 2004. Highly damped quansinormal modes of Kerr black holes: A complete numerical investigation. Phys Rev D, 69:124018.

Birkhoff G D. 1927. Relativity and modern physics. Cambridge: Cambridge university press.

Blamont J E. Roddier F. 1961. Precise observation of the profile of the fraunhofer strontium resonance line evidence for the gravitational red shift on the sun. Phys Rev Lett, 7: 437.

Blau S, Guth A. 1987. Inflationary cosmology//Three Hundred Years of Gravitation. ed. S Hawking ,W Israel. Cambridge: Cambridge University Press.

Bojowald M. 2001. Absence of singularity in loop quantum cosmology. Phys Rev Lett, 86: 52275230.

Bojowald M. 2002. Isotropic loop quantum cosmology. Class. Quantum Grav, 19: 2717.

Bojowald M. 2002. Inflation from quantum geometry. Phys Rev Lett, 89: 261301; Bojowald

M. 2005. Non-singular black holes and degrees of freedom in quantum gravity. Phys Rev Lett, 95: 061301.

Bojowald M. 2005. Loop quantum cosmology. Liv Rev Rel, 8: 11.

Bojowald M. 2006. Spherically symmetric quantum geometry: Hamiltonian constraint. Class. Quantum Grav, 23: 2129.

Bojowald M, Date G. 2004. Quantum suppression of the general chaotic behavior close to cosmological singularities. Phys Rev Lett, 92: 071302.

Bojowald M, Date G, Vandersloot K. 2004. Homogeneous loop quantum cosmology: The role of the spin connection. Class Quantum Grav, 21: 1253.

Bojowald M, Hernandez H H, Morales-Tecotl H A. 2001. Perturbative degrees of freedom in loop quantum gravity: Anisotropies. Class. Quantum Grav, 18: L117.

Bojowald M, Hinterleitner F. 2003. Isotropic loop quantum cosmology with matter II: The Lorentzian constraint. Phys Rev D, 68: 124023.

Bojowald M, Maartens R, Singh P. 2004. Loop quantum gravity and the cyclic universe. Phys Rev D, 70: 083517.

Bondi H, Gold T. 1948. The Steady-state theory of the expanding universe. Mon Not R Astron Soc, 108: 252.

Bousso R, Hawking S W. 1996. Pair creation of black holes during inflation. Phys Rev D, 54: 6312.

Brans C, Dicke R H. 1961. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. Phys Rev, 124: 925.

Brault J. 1963. The gravitational redshift in the solar spectrum. Bull Amer Phys Soc, 8: 28.

Brax P, van de Bruck C. 2003. Cosmology and brane worlds. Class Quant Grav, 20: R201.

Brax P, Bruck van de C. 2003. Cosmology and brane worlds. Class. Quantum Grav, 20: 201.

Bruni M, Germani C, Maartens R. 2001. Gravitational collapse on the brane:A no-go theorem. Phys Rev Lett, 87: 231302.

Brustein R, Veneziano G. 1994. The graceful exit problem in string cosmology. Phys Lett, B329: 429.

Bucher M, Goldhaber A S, Turok N. 1995. An open universe from inflation. Phys Rev D, 54: 3314.

Bucher M, Turok N. 1995. Open inflation with an arbitrary false vacuum mass. Phys Rev D, 52: 5538.

Burko L M, Khanna G. 2003. Radiative falloff in the background of rotating black holes. Phys Rev D, 67: 081502(R).

Burko L M, Khanna G. 2004. Universality of massive scalar field late-time tails in blackhole spacetimes. Phys Rev D, 70: 044018.

Caldarelli M M, Cognola G, Klemm D. 1998. Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS black holes and conformal field theories. hep-th/9908022.

Canuto V, et al. Superdense neutron matter A p J, 221: 274.

Cardoso V, Lemos J P S. 2003. Quasinormal modes of the near extremal Schwarzschild-de Sitter black hole. Phys Rev D, 67: 084020.

Cardoso V, Yoshida S, Dias O J C, et al. 2003. Late-time tails of wave propagation in higher dimensional spacetimes. Phys Rev D, 68: 061503(R).

Carlip S. 1995. Entropy from conformal field theory at killing horizons//Carlip S. 1995. Logarithmic corrections to black hole entropy from the Cardy formula. Statistical mechanics of the (2+1)-dimensional black hole. Phys Rev D, 51: 632; Carlip S. 1997. Statistical mechanics of the threedimensional Euclidean black hole. Phys Rev D, 55: 878.

Carmeli M. 1982. Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory. New York: John Wiley and Sons.

Carrol S, Press W, Turner E. 1992. The cosmological constant. Annu Rev Astron Astrophys, 30: 499.

Chandrasekhar S. 1939. An Introduction to the Study of Stellar Structure. Chicago: University of Chicago. Press.

Cheeger J. 1983. Spectral geometry of singular Riemannian spaces. J Differential Geometry, 18: 575.

Chillingworth D. 1976. Differential Topology with a View to Applications. London: Pitman Publishing.

Ching E S C, Leung P T, Suen W M, et al. 1995. Wave propagation in gravitational systems: Late time behavior. Phys Rev D, 52: 2118.

Cho H T. 2003. Dirac quasinormal modes in Schwarzschild black hole spacetimes. Phys Rev D, 68: 024003.

Christodoulou D. 1970. Reversible and irreversible transformation in black-hole physics. Phys Rev Lett, 25: 1596.

Cline J M, Jeon S and Moore G D. 2004. The phantom menaced:constraints on low-energy effective ghosts. Phys Rev D, 70: 043543.

Coleman S, De Luccia F. 1980. Gravitational effects on and of vacuum decay. Phys Rev D, 21: 3305.

Coleman S. 1988. Why there is nothing rather than something: A theory of the cosmological constant. Nucl Phys, B310: 643.

Copeland E J, Easther R, Wands D. 1997. Vacuum fluctuations in axion-dilatom cosmologies. Phys Rev D, 56: 873.

Cox A N(ed.). 1999. Allen's astrophysical quantities(4th ed.) New York: Springer Verlag.

Damour T, Nordtvedt K. 1993. Phys. General relativity as a cosmological attractor of

tensor-scalar theories. Phys Rev Lett, 70: 2217.

Date G. 2005. Absence of Kasner singularity in the effective dynamics of loop quantum cosmology. Phys Rev D, 71: 127502.

Date G, Hossain G M. 2005. Genericity of inflation in isotropic loop quantum cosmology. Phys Rev Lett, 94: 011301.

Date G, Hossain G M. 2005. Genericity of big bounce in isotropic loop quantum cosmology. Phys Rev Lett, 94: 011302.

Damour T, Ruffini R. 1976. Black-hole evaporation in the Klein-Saute-Heisenberg-Euler formalism. Phys Rev D, 14: 332.

Das S, Ghosh A, Mitra P. 2003. Statistical entropy of Schwarzschild black strings and black holes. Hep-th/0005108.

de Alwis S P, Ohta N. 1995. Thermodynamics of quantum fields in black hole backgrounds. Phys Rev D, 52: 3529.

de Carlos B, Casas J A, Quevedo F and Roulet E. 1993. Supersymmetry breaking and determination of the unification gauge coupling constant in string theories. Nucl Phys B, 399: 623.

Demers J G, Lafrance R, Myers R C. 1995. Black hole entropy without brick walls. Phys Rev D, 52: 2245.

Deser S. 1970. Self-interaction and gauge invariance. Gen Rel Grav, 1: 9.

Dicke R H. 1964. Relativity, group and topology, New York: Gorden and Breach, 167.

Dicke R H, et al. 1965. Cosmic-black-body radiation. ApJ, 142: 414.

Dolgov A, Zeldovich Y. 1981. Cosmology and elementary particles. Rev Mod Phys, 53: 1.

Dowker J S. 1994. A note on Polyakovs non-local form of the effective action. Class Quantum Grav,11: L7.

Dreyer O. 2003. Quasinormal modes, the area spectrum, and black hole entropy. Phys Rev Lett, 90: 081301.

Duncombe R L. 1965. Relativity effects for the three inner planets. Astron J, 61: 174.

Dvail G, Gabadadze G, Kolanovic M, Nitti F. 2001. The power of brane-induced gravity. Phys Rev D, 64: 084004.

Einstein A. 1916. Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie. Annalen der Phys, 49: 769.

Einstein A, et al. 1923. The principle of relativity. Dover: Dover publications, 35.

Englert F. 1982. Spontaneous compactification of eleven-dimensional supergravity. Phys Lett, B 119: 339.

Englert F, Rooman M, and Spindel P. 1983. Supersymmetry breaking by torsion and the Ricci-flat squashed seven spheres. Phys Lett B, 127: 47.

Farley F J M, et al. The anomolous magnetic moment of the negative muon. Nuovo Cimento A, 45: 281.

Felder G N, Frolov A V, Kofman L, Linde A V. 2002. Cosmology with negative potentials. Phys Rev D, 66: 023507.

Ferrari V, Mashoon B. 1984. Oscillations of a black hole. Phys Rev Lett, 52:1361.

Ferrari V, Mashoon B. 1984. New approach to the quasinormal modes of a black hole. Phys Rev D, 30:295.

Freedman W. et al. 2001. Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant. Astrophys J, 553: 47.

Frolov V P. 1992. Two-dimensional black hole physics. Phys Rev D, 46: 5383.

Frolov V P, Fursaev D V, Zelnikov A I. 1996. Black hole entropy: Off shell versus on shell. Phys Rev D, 54: 2711.

Frolov V P, Fursaev D V. 1998. Thermal fields, entropy and black holes. Class Quantum Grav, 15:2041.

Frolov V P, Novikov I. 1993. Dynamical origin of the entropy of a black hole. Phys Rev, D48:4545.

Frolov V P, Israel W, Solodukhin S N. 1996. One-loop quantum corrections to the thermodynamics of charged black holes. Phys Rev D, 54: 2732.

Frolov V P, Zelenikov A I. 1998. Quantum gravity: Proceedings of the fourth seminar on quantum gravity. Singapore: World Scientific Publishing Company.

Fronsdal C. 1959. Completion and embedding of the Schwarzschild solution. Phys Rev, 116: 778.

Fulton T, Rohrlich F, Witten L. 1962. Conformal invariance in physics. Rev Mod Phys, 34: 442.

Fursaev D. Euclidean and canonical formulations of statistical mechanics in the presence of killing horizons. hep-th/9709213.

Fursaev D V. 1995. Temperature and entropy of a quantum black hole and conformal anomaly. Phys Rev D, 51: 5352.

Gamow G. 1946. Prescient paper predicting the existence of a uniform and diffuse relic radiation field from the Hot Big Bang. Phy Rev, 70: 572.

Gao C J, Shen Y G.. 2002. Relation between black holes entropy and quantum field spin. Phys Rev D, 56: 084043.

Gao C J, Shen Y G. 2002. Entropy in Kerr-Newman-Kasuya spacetime. Class Quantum Grav, 20: 119.

Gasperini M and Veneziano G. 1993 Pre-big-bang in string cosmology. Astropart. Phys, 1: 317.

Gasperini M, Veneziano G. 2003. The pre-big bang scenario in string cosmology. Phys Rept, 373: 1.

Geroch R P, Jang P S. 1975. Motion of a body in general relativity. J Math Phys, 16:65.

Gleiser R J, Nicasio C O, Price R H, et al. 1996. Colliding black holes:how far can the

close approximation go? Phys Rev Lett, 77:4483.

Glendenning N K. 1997. Compact stars. New York: springer-Verlag.

Gradshteyn I S, Ryzhik I M. 1994. Table of integrals, series, and products. New York: A Cademic Press.

Granshow T E, et al. 1960. Measurement of the gravitational red shift using the Mossbauer effect in Fe^{57}. Phys Rev Lett, 4: 163.

Greenstein J L et al. 1971. Spectra of white Dwarfs with circular polarization. A p J, 169: L63.

Gundlach C, Price R H, Pullin J. 1994. Late-time behavior of stellar collapse and explosions I. Linearized perturbations. Phys Rev D, 49: 883;

Gundlach C, Price R H, Pullin J. 1994. Late-time behavior of stellar collapse and explosions II Nonlinear evoution. Phys Rev D, 49:890.

Gupta S N. 1957. Einstein's and other theories of gravitation. Rev Mod Physics, 29: 334.

Gusev Yu, Zelnikov A. 1989. Finite temperature nonlocal effective action for scalar fields hp-th/0709074.

Guth A H. 1981. Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems. Phys Rev D, 23: 347.

Guth A H. 1983. Speculations on the orgin of the matter, energy and entropy of the universe. In: Asymptotic Realms of Physics: Essays in Honor of Francis E Low, ed. A H Guth, K Huang and R L Jaffe. Cambridge: MIT Press.

Hafele J C, Keating R E. 1972. Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains. Science, 177:166; Around-the-world atomic clocks: observed relativistic time gains. Science, 177:168.

Halliwel J J, Hawking S W. 1985. Origin of structure in the universe. Phys Rev D, 31: 1777.

Harrison E R, et al. 1965. Gravitation theory and gravitational collaps. Chicago: University of Chicago Press.

Hartle J B, Hawking S W. 1976. Path-integral derivation of black-hole radiance. Phys Rev D, 13:2188.

Hartle J B, Hawking S W. 1983. Wave function of the universe. Phys Rev D, 28: 2960.

Hawking S. 1976. Breakdown of predictability in gravitational collapse. Phys Rev D, 14:2460.

Hawking S W. 1966. Singularities in the Universe. Phys Rev Lett, 17: 444.

Hawking S W. 1966. Pertubations of an expanding universe. A p J, 145: 544.

Hawking S W. 1966. The occurrence of singularities in cosmology. Proc Roy Soc London A, 295: 490.

Hawking S W, Ellis G F R. 1973. The Large Scale Structrue of Space-Time. Cambridge: Cambridge University Press.

Hawking S W, Luttrell J C. 1984. Higher derivatives in quantum cosmology: (I) The isotropic case. Nucl Phys B, 247: 250.

Hawking S W, Turok N. 1998. Comment on 'Quantum creation of an open universe', by Andrei Linde. gr-qc/9802062.

Hawking S W, Turok N. 1998. Open inflation without false vacua. Phy Lett B, 425: 25.

Hertog T, Horowitz G. 2005. Holomorphic description of ADS cosmologies. JHEP 0504: 005.

Heusler M. 1996. Black hole uniqueness theorems. Cambridge: Cambridge University press.

Ho J, Kim W T, Park Y J, et al. 2000. Entropy in the Kerr-Newman black hole. gr-qc/9704032.

Hod S. 1998. Both's correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes. Phys Rev Lett, 81:4293; Hod S. 2000. Radiative tail of realistic rotating gravitational collapse. Phys Rev Lett, 84:10; Hod S, Prain T. 1998. Late-time evolution of charged gravitational collapse and decay of charged scalar hair II Phys Rev D, 58:024018; Hod S, Piran T. 1998. Late-time tails in gravitational collapse of a selfinteracting(massive) scalar-field and decay of a self-interacting scalar hair. Phys Rev D, 58:044018.

Hofmann S, Winkler O. The spectrum of fluctuations in inflationary quantum cosmology. astro-ph/0411124.

Hossain G M. 2005. Primordial density perturbations in effective loop quantum cosmology. Class. Quantum Grav, 22: 2511.

Hovdebo J L, Myers R C. 2003. Bouncing braneworlds go crunch! JCAP 0311: 012.

Hoyle F. 1948. A new model for the expanding universe. Mon Not R Astron Soc, 108: 372.

Hubble E. 1929. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. Proc Nat Acad Sci U S, 15: 168.

Hwang J- C. 2002. Cosmological structure problem of the ekpyrotic scenario. Phys Rev D, 65: 063514.

Israel W. 1967. Event horizons in static vacuum space-times. Phys Rev, 164: 1776.

Iyer S, Will C M. 1987. Black-hole normal modes: A WKB approach. I Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering. Phys Rev, D35:3621.

Iyer S, Will C M. 1987. Black-hole normal modes: A WKB approach. II Schwarzschild black holes. Phys Rev D, 35:3632.

Jacobson T. 2003. Black hole entropy and induced gravity. gr-qc/9404039.

Jaffe A H et al. 2001. Cosmology from maxima-1,boomerang and COBE/DMRCMB observations. Phys Rev Lett, 86: 3475.

Jing J L et al. 2005. Can the "brick wall" model present the same results in different

coordinate representations? Phys Rev D, 69: 024011.

Jing J L, et al. 2005. Dirac quasinormal modes of the Reissner-Nordstrom de Sitter black hole. Phys Rev D, 72: 084009. Jing J L, et al. 2005. Late-time evolution of charged massive Dirac fields in the Reissner-Nordström black-hole background. Phys Rev D, 72: 027501. Jing J L.2005. Dirac Quasinormal modes of Schwarzschild black hole. Phys Rev D, 71: 124006. Jing J L. 2004. Late-time behavior of massive Dirac fields in a Schwarzschild background. Phys Rev D, 70: 065004. Jing J L.2004. Dirac quasinormal modes of the Reissner-Norstrom-de Sitter black hole. Phys Rev, D69: 084009. Jing J L. 2001. Quantum entropy of the Kerr black hole arising from the gravitational perturbation. Phys Rev, D64: 064015. Jing J L.1999.Quantum entropy of a nonextreme stationary axisymmetric black hole due to a minimally coupled quantum scalar field. Phys Rev D, 60: 084015. Jing J L, Pan Q Y. 2005. Dirac quasinormal frequencies of Schwarzschild-anti-de sitter and Reissner-Nordstrom-anti-de sitter black hole. Phys Rev D, 72:124011.

Johri V B 2004. Pantom cosmologies. Phys Rev D, 70: 041303.

Kabat D, Strassler M J. 1994. A comment on entropy and area. Phys Lett B, 329: 46.

Kallosh R, Kofman L, Linde A D, Tsetylin A A. 2001. BPS branes in cosmology. Phys Rev D, 64: 123524.

Kanno S, Soda J. 2002. Radion and holographic brane gravity. Phys Rev D, 66: 083506.

Kaul R K, Majumdar P. Logarithmic correction to the Bekenstein-Hawking entropy. gr-qc/0002040.

Khoury J, Ovrut B A, Seiberg N, Steinhardt J P, Turok N. 2001. The Ekpyrotic universe: colliding branes and the origin of the hot big bang. Phys Rev D, 64: 123522.

Khoury J, Ovrut B A, Steinhardt J P, Turok N. 2002. From big crunch to big bang. Phys Rev, D65: 086007.

Khoury J, Ovrut B. A, Steinhardt P. J, Turok N. 2002. Density perturbations in the ekpyrotic scenario. Phys Rev D, 66: 046005.

Khoury J, Zhang R. 2002. The friedmann equation in brane-world scenarios. Phys Rev Lett, 89: 061302.

Kinnersley W. 1969. Field of an arbitrarily accelerating point mass. Phys Rev,186:1335.

Kiselev V V. 2003. Quintessence and blackhole. Class Quant Grav, 22:4651.

Kokkotas K D, Schmidt B G. 1999. Quasi-normal modes of stars and black holes. Living Rev Relativ, 2: 2.

Kolb E W, Turner M S. 1990. The Early Universe, Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company.

Koyama H, Tomimatsu A. 2001. Asymptotic tails of massive scalar fields in a Schwarzschild background. Phys Rev D, 64: 044014.

Koyama H, Tomimatsu A. 2001. Asymptotic power-law tails of massive scalar fields in a

Reissner-Nordstrom background. Phys Rev D, 63: 064032.

Koyama H, Tomimatsu A. 2002. Sloly decaying tails of massive scalar fields in spherically symmetric spacetimes. Phys Rev D, 65: 084031.

Kramer D, Stephani H, Lerlt E, MacCallum M. 1980. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge: Cambridge University Press.

Krivan W. 1999. Late-time dynamics of scalar fields on rotating black hole backgrounds. Phys Rev D, 60:101501.

Kruskal M D. 1960. Maximal extension of Schwarzschild metric. Phys Rev, 119:1743.

Kuang Zhiquan, Li Jiangzeng, Liang Canbin. 1986. Gauge freedom of plane-symmetric line elements with semi-plane-symmetric null electromagnetic fields. Phys Rev D, 34:2241.

Leaver E W. 1985. An analytic representation for quasi-normal modes of Kerr black holes. Proc R Soc London A, 402: 285.

Leaver E W. 1986. Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry. Phys Rev D, 34: 384.

Liang Canbin. 1995. A family of cylindrically symmetric solutions to Einstein-Maxwell equantions. Gen Rela Grav, 27: 669.

Lidsey J E. 2004. Early universe dynamics in semiclassical loop quantum cosmology. JCAP 0412: 007.

Linde A D. 1982. A new inflationary universe scenario: A Possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. Phys Lett B, 108: 389.

Linde A D. 1995. Inflation with variable Ω. Phys Lett, B351: 99;

Linde A D, Mezhlumian A. 1995. Inflation with $\Omega \neq 1$. Phys Rev D, 52: 6789.

Linder E. V. 2003. Exploring the expansion history of the universe. Phys. Rev Lett, 90: 091301.

Longair M S. 1998. Galaxy formation. Berlin: Springer-Verlag.

Lukas A, Ovrut B. A, Stelle K. S, Waldram D. 1999. Universe as a domain wall. Phys Rev D, 59: 086001.

Lukas A, Ovrut B. A, Stelle K. S, Waldram D.1999. Heterotic M-theory in five dimensions. Nucl Phys B, 552: 246.

Maartens R, Wands D, Bassett B. A, Heard I. 2000. Chaotic inflation on the brane. Phys Rev D, 62: 041301.

Mäkelä J, et al. 2001. Quantum-mechnical model of the Kerr-Newman black hole. Phys Rev D, 64: 024018.

Mäkelä J, Repo P. 1998. Quantum-mechanical model of the Reissner-Nordstrom black hole. Phys Rev D, 57:4899.

Malecki J. 2004. Inflationary quantum cosmology: General framework and exact Bianchi solution. Phys Rev D, 70: 084040.

Mann R B, Solodukhin S N. 1996. Conical geometry and quantum entropy of a charged Kerr black hole. Phys Rev D, 54: 3932.

Mann R B, Tarasov L, Zelnikov A. 1992. Brick walls for black holes. Class Quantum Grav, 9:1487.

Mather J C, et al. 1990. First result from COBE on the spectrum of the microwave background radition. A p J, Lett, 354: L37.

Mukhanov V, Feldman H, Brandenberger R. 1992. Theory of cosmological perturbations. Phys Rep, 215.

Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. 1973. Gravitation. San Fracisco: W H Freeman and Company.

Moller C. 1955. The theory of relativity. 1 ed. London: Oxford Univ Press, 250.

Modesto L. Loop quantum black hole. gr-qc/050978.

Moretti V, Iellici D. ζ-function regularization and one-loop renormalization of field fluctuations in curved space-times. gr-qc/9705077.

Motl L. 2003. An analytical computation of asymptotic Schwarzschild quasinormal frequencies. Adv.Theor. Math. Phys, 6:1135.

Motl L, Neitzke A. 2003. Asymptotic black hole quasinormal frequencies. Adv. Theor. Math Phys, 7:307.

Movahed M S, Rahvar S. 2006. Observational constraints on a variable dark energy model. Phys Rev D, 73: 083581.

Mück W, Viswanthan K S, Volovich I V.2000. Geodesics and Newton's law in brane backgrounds. Phys Rev D, 62: 105019.

Mukhanov V, Abramo L, Brandenberger R. 1997. Backreaction problem for cosmological perturbations. Phys Rev Lett, 78: 1624.

Mukhanov V, Feldman H, Brandenberger R. 1992. Theory of cosmological perturbations, Phys Rep, 215.

Mukherji S, Peloso M. 2002. Bouncing and cyclic universes from brane models. Phys Lett B, 547: 297.

Myers R C. 1994. Black hole entropy in two dimensions. Phys Rev D, 50:6412.

Nesseris S and Perivolaropoulos L. 2004. A comparison of cosmological models using recent supernova data. Phys Rev D, 70: 043531.

Newman E T, Penrose R. 1962. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. J Math Phys, 3:566.

Nojiri S, Odintsov S D. 2003. Quantum de sitter cosmology and phantom matter. Phys. Lett B, 562: 147.

Nojiri S, Odintsov S D. 2003. De sitter brane universeinduced by phantom and quantum effects. Phys Lett B, 565:1.

Nojiri S, Odintsov S D , Tsujikawa S.2005. Properties of singularities in(phantom) dark

energy universe,Phys Rev D, 71: 063004.

Nollert H P. 1993. Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: The determination of quasinormal frequencies with very large imaginary parts. Phys Rev D, 47: 5253.

Nollert H P. 1999. Quasinormal modes: The characteristic 'sound' of black holes and nertron stars. Class Quantum Grav, 16:R159.

Novikov I D, Frolov V P. 1989. Physics of black holes. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Oppenheimer J R, Snyder H. On continued gravitational contraction. Phys Rev, 56: 455; Oppenheimer J R, Volkoff G M. 1938. On massive neutron cores. Phys Rev, 55: 374.

Peebles P J E. 1993. Principles of physical cosmology. Princeton: Princeton University Press.

Peebles P J E, Ratra B. 2003. The cosmological constant and dark energy. Rev Mod Phys, 75: 599.

Peiris H V et al. 2003. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe(WMAP) Observations: implications for inflation, Astrophys J Suppl, 148213.

Penrose R. 1964. Conformal treatment of infinity. In: Relativity, Groups and Topology, ed C DeWitt and B DeWitt. New York: Gordon and Breach.

Penrose R. 1965 Gravitational collapse and space-time singularities. Phys Rev Lett, 14: 57.

Penzias A A, Wilson R W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s. A p J, 142: 419.

Perez A. 2006. On the regularization ambiguities in loop quantum gravity. Phys Rev D, 73: 044007.

Perlmutter S, et al. 1999. Measurements of Ω and from 42 high-redshift supernovae. Astrophys J, 517: 565.

Peter P, Pinto-Neto N. 2002. Primordial perturbations in a nonsingular bouncing universe model. Phys Rev D, 66: 063509.

Piao Y, Zhang Y. 2004. Phantom inflation and primordial perturbation spectrum. Phys Rev D, 70: 063513.

Piao Y, Zhou E. 2003. Nearly scale-invariant spectrum of adiabatic fluctuations may be from a very slowly expanding phase of the universe. Phys Rev D, 68: 083513.

Polchinski J. 1999. String Theory: Two Volumes. Cambridge University Press.

Polyakov A M. 1981. Quantum geometry of bosonic strings. Phys Lett B, 103: 207.

Pound R V, Rebka G A Jr. 1960. Apparent weight of photons. Phys Rev Lett, 4: 337.

Pound R V, Snider J L. 1965. Effect of gravity on gamma radiation. Phys Rev B, 140: 788.

Pound R V, Snider J L. 1964. Effect of gravity on nuclear resonance. Phys Rev Lett, 13: 539.

Puxun Wu, Hongwei Yu. 2005. Avoidance of big rip in phantom cosmology by gravitational back reaction. Nucl Phys B, 727,355.

Randall L. 1999. An alternative to compactification. Phys Rev Lett, 83: 4690.

Randall L, Sundrum R. 1999. Large mass hierarchy from a small extra dimension. Phys Rev Lett, 83: 3370.

Randall L, Sundrum R. 1999. An alternative to compactification. Phys Rev Lett, 83: 4690.

Ratra B, Peebles P J E. 1998. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. Phys Rev D, 37:3406.

Riess A G, et al. 1998. Observational evidence from supernovae for an acceleration universe and a cosmological constant. Astron J, 116:1009.

Rindler W. 1982. Introduction to Special Relativity. Oxford: Clarendon Press.

Roades C E Jr, Ruffini R. 1974. Maximum mass of a neutron star Phys Rev Lett, 32: 324.

Rovelli C. 2004. Quantum Grav, CUP, Cambridge.

Sawyer R F, Scalapino D J. 1973. Pion condensation in superdeuse nuclear matter. Phys Rev D, 7: 953.

Schiff L I. 1960. Possible new experimental test of general relativity theory. Phys Rev Lett, 4: 215.

Schramm D N, Wagoner R. 1977. Element product in early universe. Ann Rev of Nuclear Science, 27: 37.

Schutz B F. 1980. Geometrical Methods of Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press.

Schutz B, Will C. 1985. Black hole normal modes-A semianalytic approach. Astrophys J, 291: 133.

Schwarzschild K. 1916. Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie Sitzber. Preuss Akad Wiss: 189.

Scranton R, et al. 2004. Physical evidence for dark energy. Astro-ph/0307335.

Shen Y G. 2000. The femionic entropy of spherically symmetric blacd holes. Mod. Phys Lett A, 15: 1901.

Shen Y G. 2002. Entropy of Horowitz-Strominger black holes due to arbitrary spin fields. Physics Letters, B537: 187.

Shtanov Y, Sahni V. 2003. Bouncing braneworlds. Phys Lett B, 557: 1.

Shu F W, Shen Y G. 2004. Quasinormal modes of charged black holes in string theory. Physic Review D, 70: 084046.

Simon J, Verde L and Jimenez R. 2005. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. Phys Rev D, 71: 123001.

Singh P. 2005. Effective state metamorphosis in semiclassical loop quantum cosmology. Class. Quantum Grav. 22: 4203-4216.

Singh P, Vandersloot K. 2005. Semiclassical states, effective dynamics and classical emer-

gence in loop quantum cosmology. Phys Rev D, 72: 084004.

Solodukhin S N. 1995. Conical singularity and quantum corrections to the entropy of a black hole. Phys Rev D, 51: 609.

Soloviev V O. 2002. Black hole entropy from Poisson brackets(demystification of some calculation). Hep-th/9905220.

Stephani H. 1982. General relativity. Cambridge: Cambridge University Press.

Stephani H. 1982. General relativity: An Introduction to the Theory of the Gravitational Field. Cambridge: Cambridge University Press.

Straumann N. 1984. General Relativity and Relativistic Astrophysics. Berlin: Springer-Verlag.

Sun Z Y, Shen Y G. 2006. Dark energy cosmology. Int J Theor Phys, 45: 813.

Suneeta V. 2003. Quasinormal modes for the SdS black hole: an analytical approximation scheme. Phys Rev D, 68: 024020.

Susskind L, Uglum J. 1994. Black hole entropy in canonical quantum gravity and superstring theory. Phys Rev D, 50: 2700.

Synge J L. 1960. Relativity, the general theory. Amsterdam: North-Holland.

't Hooft G. 1985. On the quantum structure of a black hole. Nucl Phys B, 256: 727.

Taub H. 1951. Empty space-times admitting a there parameter group of motions. Ann Math, 53:472.

Tegmark M, et al. 2004. Cosomlogical parameters from SDSS and WMAP. Phys Rev D, 69: 103501.

Teukolsky S. 1972. Rotation black holes-separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations. Phys Rev Lett, 29: 1114.

Thirring W. 1961. An alternative approach to the theory of gravitation. Ann Phys(U. S. A), 16: 96.

Thome K S, Price R H, Macdonald D A. 1986. Black holes: the membrane paradigm. New Haven CT: Yale University Press.

Tolman R G. 1949. The age of the universe. Rev Mod Phys, 21: 374.

Tseytlin A A. 1992. Dilaton cosmic solutions. Int.J Mod. Phys D, 1: 223.

Tsujikawa S, Singh P, Maartens R. 2004. Loop quantum gravity effects on inflation and the CMB. Class. Quantum Grav, 21: 5767.

Turner M S. 1999. Dark matter, dark energy and fundamental physics. Astro-ph/9912211; Turner M S. 2002. The case for Ω =0.33±0.035. arXiv: astro-ph/0106035v2.

Vishveshwara C. 1970. Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black-hole. Nature, 227: 936.

Vandersloot K. 2005. Hamiltonian constraint of loop quantum cosmology. Phys Rev D, 71: 103506.

Volovik G E. 2004. Simulation of quantum field theory and gravity in superfluid He-3.

condmat/9706172.

Wald R. 1984. General Relativity. Chicago: University of Chicago Press.

Wang Y and Mukherjee P. 2006. Robust dark energy constraints from supernovae,galaxy clustering,and three-year wilkinson microwave anisotropy probe observations. Astrophys J, 650: 1. Wang Y J et al. 2008. On dust extinction of GR bursthost gal. Astrophys J, 685: 1046-1051. Wang Y J, et al. 2008. On buckyonions as an interstellar grain component. Mon Not R Astron Soc, 390: 39. Wang Y J, et al. 2006. On the unusual depletions toward Sk 155, Astrophys J Lett, 640: 151. 3. Wang Y J, et al. 2003. Chaotic dynamics of test particle around gravitational field with a dipole, Class. Quantum Grav, 20: 3897. Wang Y J, Tang Z M. 2002. Energy levels of electron near Kerr black hole. Astrophysics and Space Science, 281:689. Wang Y J, Tang Z M. 2002. Gravitational properties of an accelerating celestial body with a large number of monopoles. Astrophysics and Space Science, 282: 363; Aigen Li, Misset K A, Wang Y J. 2006. On the unusual depletions toward Sk 155. Astrophys J Lett, 640: 151; Jing J L, Wang Y J, Zhu J Y. 1994. Generalized first law of themody-namics for black-holes in spacetimes which Are not asymptotically Flat. Physics Letters A, 187: 31; Jing J L, Yu H W, Wang Y J. 1993. Thermodynamics of a black hole with a global monopole . Physics Letters A, 178:59; Chen J H, Wang Y J. 2003. Chaotic dynamics of a test paricle around a grawitational field with a dipple. Class Quantum Grav., 20: 3897. Wang Yong-Jiu, Tang Zhi-Ming. 1986. Field of an accerlerating celestial body with a large number of magnetic monopoles. Scientia Sinica, 29: 639. Wang Yong-Jiu, Peng Q H. 1985. Gravitational properties of the Neutron star with magnetic chargeand magnetic moment. Scientia Sinica, 28: 422. Wang Yong-Jiu , Tang Zhi-Ming. 2002. On density perturbations and missing mass. Science in China, 45:508. Wang Yong-Jiu, Tang Zhi-Ming. 2001. Metric of the gravitational field outside the neutron star. Science in China, 44: 801.

Weber J. 1969. Evidence for discovery of gravitational radiation. Phys Rev Lett, 22: 1320.

Weinberg S. 1972. Gravitation and Cosmology: Principles and Aplications of The General Theory of Relativity. New York: John Wiley.

Weinberg S. 1989. The cosmological constant problem. Mod Phys, 61: 1.

Weinberg S. 1965. Photons and gravitons in perturbation theory: derivation of Maxwell's and Einstein's equations. Phys Rev B, 138: 988.

Weisberg J M, Taylor J H. 1984. Observations of post-Newtonian timing effects in the binary pulsar PSR 1913+16. Phys Rev Lett, 52: 1348.

Weyl H. 1922. Space Time Matter. London: Methuen, 238.

Wheeler J A. 1962. Geometrodynamics. In: Witten L ed. Gravitation. New York: John Wiley & Sons Inc, 412.

Will C M. 1981, 1993. Theory and Experiment in Gravitational Physics. Cambridge:

Cambridge University Press.

Williams J G, Dicke R H, et al. 1976. New test of the equivalence principle from lunar laser ranjing. Phys Rev Lett, 36: 551.

Willis J. 2004. On the low energy ramifications and a mathematical extension of loop quantum gravity. Ph.D Dissertation, The Pennsylvaina state university.

Witten E. 1984. Cosmic separation of phases. Phys Rev D, 30: 272.

Wu P, Yu H. 2007. Constraints on the generalized. Chaplygin gas model from recent Supemova data and baryonic acoustic oscillations. Ap J, 658: 663.

Wu Z C. 1997. Quantum Creation of a Black hole. Int. J. Modern Phys., D6:199; Wu Z C. 1999. Pair creation of black holes in anti-de sitter space background. Phys Lett B, 445: 274.

Yang I-Ching, Yeh Ching-Tzung, Hsu Rue-Ron, et al. 2005. On the energy of a charged dilaton black hole. gr-qc/9609038.

Youm D. 2000. Extra force in brane worlds. Phys Rev D, 62: 084002.

Yu H W. 2002. Decay of massive scalar hair in the background of a black hole with a global monopole. Phys Rev D, 65: 087502. Yu H W, Zhou W T. 2007. Relationship between Hawking radiation from black holes and spontaneous excitation of atoms. Phys Rev D, 76: 027503. Yu H W, Zhou W T. 2007. Do static atoms outside a Schwarzschild black hole spontaneously excite? Phys Rev D, 76: 044023. Yu H W, et al. 2006. Spontaneous excitation of an accelerated hydrogen atom coupled with electromagnetic vacuum fluctuations, Phys Rev D, 73: 107501. Yu H W, et al. 2006. Spontaneous absorption of an accelerated hydrogen atom near a conducting plane in vacuum, Phys Rev D, 74: 044032. Yu H W, et al. 2006. Spontaneous excitation of an accelerated hydrogen atom coupled with electromagnetic vacuum fluctuations, Phys Rev D, 73: 107501. Yu H W, et al. 2006. Spontaneous absorption of an accelerated hydrogen atom near a conducting plane in vacuum. Phys Rev D, 74: 044032. Yu H W, et al. 2006. Relationship between Hawking radiation from black holes and spontaneous excitation of atoms. Phys Rev D, 76: 027503.

Zaslavskii O B. 1996. Role of a boundary in the relationship between black hole temperature and the trace anomaly. Phys Rev D, 53: 4691.

Zeldovich Y A B, Novikov I D. 1971. Relativistic Astrophysics I. Chicago: Univ of Chicago Press, 110.

Zerilli F J. 1974. Perturbation analysis for gravitational and electromagnetic radiation in a Reissner-Nordstrom geometry. Phys Rev D, 9: 860.

Zhang L F. 2003. Geodesic in brane cosmology, Comm Theor Phys, 39: 353.

Zhidenko A. 2004. Quasi-normal modes of Schwarzschild-de sitter black holes. Class Quantum Grav, 21: 273.

Zurek W H, Thorne K S. 1985. Statistical mechanical origin of the entropy of a rotating, charged black hole. Phys Rev Lett, 54: 2171.

[General Information]
书名=经典宇宙和量子宇宙
作者=
页数=
出版社=
出版日期=
SS号=12629606
DX号=000006868608
url=http://www.lishidl.cn/DrsPath.do?kid=636468646B68626831313935343033332&username=hzsfxy&spagenum=1&pages=2&fid=8599038&a=e7613a2f7b113071d72bd1043d0a158e&btime=2011-12-05&etime=2011-12-25&template=bookdsr1&firstdrs=http%3A%2F%2Fbook2.duxiu.com%2FbookDetail.jsp%3FdxNumber%3D000006868608%26d%3D0CF7A7F60441C3C337763494C2A4D865